RYDER

INGEGNERIA ELETTRONICA

SECONDA EDIZIONE

LIGUORI EDITORE

INGEGNERIA ELETTRONICA

J. D. RYDER

INGEGNERIA ELETTRONICA

LIGUORI EDITORE - NAPOLI

PREFAZIONE

In questo testo vengono esposti i circuiti fondamentali necessari per coloro che si avviano a lavorare nel campo dei controlli, dei calcolatori, e delle applicazioni della strumentazione elettronica. Poichè queste parti dell'elettronica sono molto estese, è stato necessario escludere alcuni argomenti per contenere il volume in dimensioni ragionevoli. Di conseguenza non è da attendersi che le applicazioni dei circuiti elettronici vengano riportate con molti dettagli; vengono esposti solo i principi fondamentali dei circuiti elettronici mentre per le applicazioni particolari bisognerà spesso ricorrere alla bibliografia specializzata.

Si sono trattati in particolare i circuiti necessari per coloro che si avviano a lavorare nel campo dei calcolatori elettronici o che dovranno usare circuiti di calcolo in sistemi più complessi. I primi due capitoli sono una rassegna dei principi dell'elettronica e dei dispositivi a vuoto ed allo stato solido per coloro che siano a digiuno di queste informazioni. Si è fatto spesso ricorso all'analisi matematica ed alla teoria dei circuiti affinchè fosse possibile comprendere quantitamativente la materia esposta.

L'applicazione dei dispositivi elettronici si è notevolmente estesa in seguito alla disponibilità di una grande varietà di dispositivi allo stato solido. Di conseguenza si sono trattati in particolare i principi dei dispositivi allo stato solido lasciando ai tubi solo quelle applicazioni nelle quali essi vengono ancora utilmente impiegati.

J. D. Ryder

CAPITOLO I

PRINCIPI FISICI DEI TUBI ELETTRONICI

L'elettronica ha assunto notevole importanza in numerosi rami della ingegneria moderna; i suoi recenti sviluppi hanno portato alla utilizzazione di frequenze fino a parecchi gigahertz (10^9 Hz) *, al controllo di potenze elettriche fino a molti megawatt ed all'impiego di una grande varietà di forme d'onda elettriche.

Elementi fondamentali dei circuiti elettronici sono il tubo a due elettrodi, o *diodo* e quello a tre elettrodi detto *triodo*; esistono inoltre tubi più complessi, per applicazioni particolari.

Le applicazioni di questi dispositivi elementari, che saranno esaminate in seguito, comprendono l'impiego del diodo per raddrizzare correnti alternate, del triodo per controllare l'energia elettrica, generare oscillazioni, amplificare segnali e realizzare circuiti a scatto; questi ultimi, in realtà, possono essere realizzati sia con diodi che con triodi.

In questo capitolo e nel successivo, si esamineranno i principi teorici del funzionamento dei tubi a vuoto e dei componenti allo stato solido. Benché i semiconduttori presentino oggi numerosi vantaggi rispetto ai tubi, (dimensioni più ridotte, vita più lunga, maggiore adattabilità alle diverse applicazioni), tratteremo prima questi ultimi, poiché, cronologicamente, sono stati realizzati per primi.

1-1. L'atomo, l'elettrone, il fotone.

Le teorie atomiche moderne, fondate sul modello proposto da Bohr, pongono la massa e la carica positiva dell'atomo in un *nucleo* centrale, circondato da elettroni orbitali. Il nucleo è costituito di *neutroni* e *protoni*.

---

* L'unità di misura della frequenza, cicli al secondo, è detta hertz (abbreviato Hz), secondo la simbologia adottata dall'Institute of Electrical and Electronics Engineers nel 1965.

Oltre all'unità fondamentale, vengono comunemente adoperati i seguenti multipli:

kilo (k) = 10^3
mega (M) = 10^6
giga (G) = 10^9
tera (T) = 10^{12}

I neutroni hanno massa pari all'incirca ad 1/16 di quella dell'atomo di ossigeno e sono elettricamente neutri; i protoni sono un poco più leggeri dei neutroni ed hanno carica uguale in valore a quella degli elettroni, ma di segno positivo.

Gli elementi chimici si differenziano per il diverso numero dei protoni e neutroni che ne costituiscono il nucleo; il numero di protoni, ossia le unità di carica positiva, è uguale al numero atomico dell'elemento: l'idrogeno ha un protone, l'elio ne ha due e così via. Poiché l'atomo è elettricamente neutro, in condizioni normali, il numero di elettroni che ruota intorno al nucleo è uguale al numero di protoni.

All'*elettrone* che è la più piccola unità di carica elettrica conosciuta si è convenuto di assegnare segno negativo. La carica dell'elettrone è stata misurata, per la prima volta, da Millikan nel 1910; esperimenti successivi hanno consentito di stabilire i seguenti valori per le costanti dell'elettrone:

$$\text{Carica} = e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$
$$\text{Massa} = m = 9{,}108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$\text{Carica/massa} = \frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ coulomb/kg}$$

Le costanti precedenti descrivono l'elettrone come una particella; esso infatti si comporta spesso come tale. Talvolta invece l'elettrone sembra comportarsi come un'onda o piuttosto le proprietà caratteristiche delle onde consentono la comprensione di certi fenomeni. Non è ancora chiaro il significato di questo doppio comportamento; comunque, quando all'elettrone si assegnano le caratteristiche di un'onda, la sua lunghezza d'onda è legata alla sua velocità dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{m\,v} \quad \text{metri}$$

in cui $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ joule-sec è la costante di Plank, e v la velocità dell'elettrone espressa in metri al secondo.

Il fotone è un'altra importante particella fondamentale; esso è un pacchetto di energia radiante, cioè di luce, e la sua energia w è legata alla frequenza f dalla relazione

$$W = h\,f \quad \text{joule}$$

Al fotone dunque è associata un'energia proporzionale alla sua frequenza. Anche il fotone mostra un doppio comportamento ed in molte esperienze di ottica deve essere considerato come un'onda. La lunghezza d'onda del fotone è allora:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \text{metri}$$

Dove $c = 2{,}99793 \cdot 10^8 \cong 3 \cdot 10^8$ m/sec è la velocità della luce nel vuoto.

Il fotone non ha massa materiale; si considera tuttavia che esso possieda una « massa di radiazione » legata all'energia del fotone dall'equazione di Einstein:

$$W = m c^2 \quad \text{joule}$$

1-2. Azione dei campi elettrici sugli elettroni.

Nei dispositivi elettronici, il moto degli elettroni e delle altre particelle cariche è ordinariamente dovuto alle forze che esercitano su di essi i campi elettrici e magnetici presenti. Quando si considera il moto delle cariche, si suppone di solito che la *densità di carica*, cioè il numero di cariche per unità di volume, sia tanto piccola che si possa trascurare l'azione repulsiva che ogni carica esercita sulle altre. Si trascurano inoltre le forze gravitazionali perché molto piccole, e si suppone infine che, nei tubi a vuoto, il grado di vuoto sia abbastanza elevato perché non accadano collisioni di particelle cariche con atomi di gas. Tutte queste ipotesi sono ben verificate in pratica.

Le forze esercitate dai campi elettrici vengono spesso impiegate per accelerare fasci di elettroni. L'intensità di un campo elettrico si definisce come la forza **f** (newton) che agisce sull'unità di carica positiva (coulomb):

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{f}}{q} \quad \text{volt/m} \tag{1-1}$$

Se si introduce in questo campo un elettrone di carica $-e$, pari a $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb, su di esso agisce la forza

$$\mathbf{f}_e = -e\mathcal{E} \quad \text{newton} \tag{1-2}$$

Il segno meno indica che la forza ha direzione opposta a quella del campo, cioè essa è diretta verso l'elettrodo positivo. Ora, $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$, per cui l'accelerazione cui è sottoposto l'elettrone nel campo elettrico è:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-e\mathcal{E}}{m} \tag{1-3}$$

se si considerano velocità tali che si possa trascurare la variazione relativistica della massa. Se il campo è funzione del tempo, anche l'accelerazione sarà funzione del tempo.

Il lavoro compiuto dalla forza, per spostare l'elettrone dal punto A al punto B del campo, è dato da

$$W = \int_A^B f_e \cos\alpha \, ds = -\int_A^B e\mathcal{E} \cos\alpha \, ds$$

dove α è l'angolo formato dalla direzione della forza con la direzione positiva dello spostamento *ds*.

Tale lavoro è uguale all'energia cinetica acquistata dall'elettrone e se α è nullo, cioè se lo spostamento avviene nella direzione della forza agente,

si ha:

$$W = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = -e \int_A^B \mathcal{E}\, ds \qquad (1\text{-}4)$$

L'integrale della intensità del campo elettrico, cambiato di segno, è uguale alla differenza di potenziale V fra i due punti A e B, si ha pertanto:

$$W = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = eV \quad \text{joule} \qquad (1\text{-}5)$$

Cioè l'energia che acquista un elettrone che si muove in un campo elettrico è uguale al prodotto della carica dell'elettrone per la differenza di potenziale attraverso la quale l'elettrone si sposta.

Se la velocità iniziale è zero, allora

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 5{,}93 \times 10^5 \sqrt{V} \quad \text{m/sec} \qquad (1\text{-}6)$$

Questa è la velocità che acquista un elettrone, avente velocità iniziale nulla, quando raggiunge un punto il cui potenziale è V volt superiore a quello del punto di partenza.

L'equazione (1-5) dà origine ad una unità di energia frequentemente usata in elettronica: *l'elettrone-volt.* Un elettrone-volt è l'energia che acquista un elettrone che venga sottoposto alla differenza di potenziale di 1 volt.

$$1 \text{ ev} = 1 \times 1{,}60 \times 10^{-19} = 1{,}60 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

Nella fisica delle alte energie si usano comunemente le abbreviazioni Mev e Bev che significano rispettivamente « milione di elettrone volt » e « bilione di elettrone volt ».

Esempio — *Un elettrone dotato di velocità iniziale dovuta alla energia di* 10 *ev, entra nel campo elettrico fra due placche parallele nel punto A (fig.*

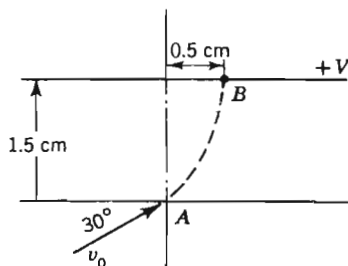



FIG. 1-1. — Traiettoria dell'elettrone.

1-1) *formando un angolo di* 30° *con il piano degli elettrodi. Si desidera che l'elettrone urti la placca superiore nel punto B, posto* 0,5 *cm a destra della verticale condotta per A. Calcolare il potenziale da assegnare alla placca supe-*

riore, il tempo di transito, la velocità finale, l'energia ceduta all'elettrodo superiore.

Velocità iniziale:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Ve}{m}} = \sqrt{2 \times 10 \times 1{,}76 \times 10^{11}} = 1{,}87 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

Componenti della velocità

$$v_{0y} = 1{,}87 \times 10^6 \times \text{sen } 30^0 = 0{,}935 \times 10^6 \text{ m/sec}$$
$$v_{0x} = 1{,}87 \times 10^6 \times \cos 30^0 = 1{,}62 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

La componente orizzontale v_{0x} *non è alterata dal campo, per cui il tempo che impiega l'elettrone a spostarsi di* 0,5 *cm* (0,005 m) *in senso orizzontale è uguale al tempo necessario a raggiungere la placca superiore*:

$$t = \frac{0{,}005}{1{,}62 \times 10^6} = 3{,}09 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

L'accelerazione dovuta al campo elettrico, considerata positiva se è rivolta verso l'alto, è:

$$a = \frac{e\mathcal{E}}{m} = 1{,}76 \times 10^{11}\mathcal{E}$$

La distanza che viene percorsa in senso verticale è: $y = a\frac{t^2}{2} + v_{0y}t = 15$ cm

$$0{,}0015 = \frac{1{,}76 \times 10^{11}\ \mathcal{E}(3{,}09 \times 10^{-9})^2}{2} + 0{,}935 \times 10^6 \times 3{,}09 \times 10^{-9}$$

$$\mathcal{E} = \frac{12{,}1 \times 10^{-3}}{8{,}40 \times 10^{-7}} = 1{,}44 \times 10^4 \text{ volt/m}$$

Il potenziale è $V = 1{,}44 \times 10^4 \times 0{,}015 = 216$ *volt positivo sulla placca superiore.*

Componente verticale della velocità

$$v_y = at + v_{0y} =$$
$$= 1{,}76 \times 10^{11} \times 1{,}44 \times 10^4 \times 3{,}09 \times 10^{-9} + 0{,}935 \times 10^6 =$$
$$= 8{,}78 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

Velocità finale risultante

$$= \sqrt{v_Y^2 + v_{0x}^2}$$
$$= \sqrt{(8{,}78 \times 10^6)^2 + (1{,}62 \times 10^6)^2} = 8{,}93 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

L'energia ceduta alla placca superiore al momento dell'urto è:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{9{,}11 \times 10^{-31}\ (8{,}93 \times 10^6)^2}{2} = 3{,}62 \times 10^{-17} \text{ joule}$$

Verifica: In totale l'elettrone si è spostato attraverso un potenziale di $10 + 216 = 226$ *volt. L'energia totale acquistata dall'elettrone è pertanto* 226 *ev*:

$$226 \text{ ev} = 226 \times 1{,}60 \times 10^{-19} = 3{,}62 \times 10^{-17} \text{ joule}$$

1-3. Azione dei campi magnetici sugli elettroni.

La forza che agisce su un conduttore attraversato da corrente e posto in un campo magnetico è data da:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{i} l \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{i} l \text{ sen } \theta \quad \text{newton} \tag{1-7}$$

dove: $\mathbf{B}$ = induzione magnetica, espressa in weber/m^2

l = lunghezza della parte di conduttore che si trova nel campo, metri

θ = angolo formato dalla direzione positiva della corrente con l'induzione magnetica.

Tale forza è proporzionale alla componente di **i** perpendicolare a **B** ed agisce in direzione normale al piano che contiene **i** e **B**.

Una corrente costituita da n elettroni che attraversano il campo nel tempo t ha l'intensità di

$$i = -\frac{ne}{t} \quad \text{ampere} \tag{1-8}$$

Si può allora modificare la (1-7) per un fascio di elettroni:

$$\mathbf{f}_m = -\frac{nel\,\mathbf{B} \text{ sen } \theta}{t}$$

Poiché l/t è la velocità degli elettroni, la forza che agisce su di un solo elettrone che si muove nel campo è uguale a:

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{B}ev \text{ sen } \theta = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{newton} \tag{1-9}$$

Se indichiamo con $v_p = v \cos \theta$ e con $v_n = v \text{ sen } \theta$ le componenti della velocità dell'elettrone parallela e normale alla direzione di **B**, possiamo scrivere la (1-9)

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{B}ev_n \tag{1-10}$$

Per il moto degli elettroni, si può sostituire la nota regola della mano destra con quella della mano sinistra. Se il pollice indica la direzione della velocità dell'elettrone e l'indice la direzione di **B**, il medio indica allora la

direzione della forza che agisce sull'elettrone. Nella fig. 1-2, la forza agente sull'elettrone è diretta verso destra. Poiché $\mathbf{f}_m$ è in ogni istante perpendicolare alla direzione della velocità, essa non può compiere lavoro sull'elettrone, la cui velocità $\mathbf{V}_n$ rimane perciò costante. Poiché sia $\mathbf{V}_n$ che $\mathbf{B}$ sono costanti, $\mathbf{f}_m$ deve essere costante, e produce un'accelerazione costante ad angolo retto con la velocità $\mathbf{V}_n$.

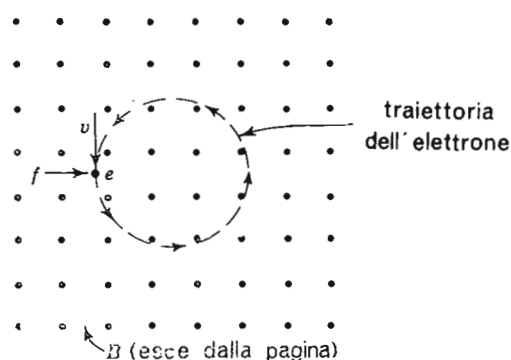



FIG. 1-2. — Traiettoria dell'elettrone nel campo magnetico; il flusso è diretto dalla pagina verso il lettore

La traiettoria risultante è una circonferenza che viene percorsa con velocità periferica $\mathbf{V}_n$.

La forza centrifuga deve essere uguale alla forza esercitata dal campo magnetico, cioè:

$$\frac{mv_n^2}{r} = Bev_n$$

pertanto il raggio della circonferenza sarà

$$r = \frac{mv \text{ sen } \theta}{Be} \quad \text{metri} \qquad (1\text{-}11)$$

Da semplici relazioni di dinamica, si ricava il tempo T necessario per compiere una rivoluzione completa sulla traiettoria circolare:

$$T = \frac{2\pi m}{Be} \quad \text{sec} \qquad (1\text{-}12)$$

Questa quantità è indipendente dalla velocità; un elettrone dotato di alta velocità percorre una circonferenza di grande raggio nello stesso tempo che impiega un elettrone più lento a percorrere una circonferenza di raggio più piccolo.

Esempio — *Un elettrone avente energia di* 20 *ev, entra in un campo magnetico di* 0,02 *weber/m*^{2} *con un angolo di* 30^0 *rispetto al campo stesso. Deter-*

minare la posizione dell'elettrone, dopo che esso ha compiuto una rivoluzione nel campo.

La velocità iniziale è

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Ve}{m}} = \sqrt{2 \times 20 \times 1{,}76 \times 10^{11}} = 2{,}65 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

Quindi

$$v_p = v_0 \cos 30^0 = 2{,}65 \times 10^6 \times 0{,}866 = 2{,}29 \times 10^6 \text{ m/sec}$$
$$v_n = v_0 \operatorname{sen} 30^0 = 2{,}65 \times 10^6 \times 0{,}500 = 1{,}32 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

Il tempo impiegato per una rivoluzione è allora:

$$T = \frac{2\pi m}{Be} = \frac{2\pi}{0{,}02 \times 1{,}76 \times 10^{11}} = 1{,}78 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

Durante questo intervallo di tempo, l'elettrone si sposta in direzione parallela al campo a causa della componente v_p *della velocità, cosicchè esso raggiunge un punto che dista* L *metri dal punto di ingresso, in direzione parallela a quella delle linee di campo. La quantità* L *è data da*

$$L = v_pT = 2{,}29 \times 10^6 \times 1{,}78 \times 10^{-9}$$
$$= 4{,}07 \times 10^{-3} \text{ m} = 0{,}407 \text{ cm}$$

1-4. La corrente.

Si definisce corrente elettrica il moto, o la variazione nel tempo, delle cariche positive; la direzione della corrente convenzionale è quella del moto delle cariche positive. Il moto degli elettroni o comunque di cariche negative, è dunque una corrente negativa e la direzione della corrente convenzionale, che ad essa corrisponde, è opposta alla direzione del moto degli elettroni.

In un tubo a vuoto, la conduzione è normalmente dovuta agli elettroni sicché spesso risulta più conveniente, per la comprensione di alcuni fenomeni, ragionare in termini di corrente elettronica.

Nei transistori occorre considerare sia il moto di cariche positive cioè un flusso di « lacune », sia il moto di cariche negative cioè di elettroni. Pertanto, i fenomeni interni di un dispositivo elettronico, saranno descritti considerando il moto ora dell'uno ora dell'altro tipo di particella carica.

Quando invece un tubo o un transistore viene considerato come un elemento di circuito, il suo comportamento viene descritto in temini di tensioni e correnti ai terminali ed è allora necessario fare uso della corrente convenzionale.

Quando un elettrone si trova libero in un campo elettrico come indicato in fig. 1-3, esso viene accelerato verso l'elettrodo positivo ed induce

su di esso una carica positiva; cioè esso spinge un elettrone dall'elettrodo nel circuito esterno. Si ha quindi un piccolo spostamento di carica negativa, attraverso il generatore esterno, dal polo positivo al negativo, che appare come una corrente negativa che entra nel terminale positivo, oppure come una corrente convenzionale uscente da questo terminale; il generatore esterno, fornisce l'energia necessaria per accelerare l'elettrone.

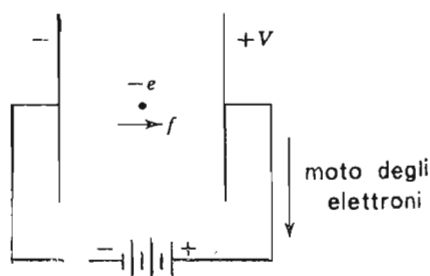



FIG. 1-3. — L'elettrone nel campo elettrico.

Quando l'elettrone urta l'elettrodo cede la sua energia cinetica sotto forma di calore o di altra radiazione (per esempio raggi X, se la velocità dell'elettrone è elevata).

Un elettrone può essere spinto in un campo elettrico che lo rallenta; esso si troverà allora in moto verso l'elettrodo negativo e provocherà nel circuito lo spostamento di un elettrone dal polo negativo al positivo. Questo equivale ad una corrente convenzionale che attraversa la batteria dal polo positivo al negativo e rappresenta un aumento di energia per la sorgente esterna di cariche. L'elettrone perde energia cinetica e di conseguenza viene rallentato o ritardato dal campo.

Quando un gran numero di elettroni o di altre cariche si spostano in un'unica direzione dello spazio, conviene misurare la corrente che ne risulta, in termini di *densità di carica* ρ presente nello spazio e di velocità media v delle cariche.

La carica che passa nell'unità di tempo attraverso una sezione ortogonale alla direzione del moto e di area unitaria, è detta densità di corrente J; risulta:

$$J = \rho v \tag{1-13}$$

Scrivendo $\rho = -ne$ per gli elettroni, ove si è indicato con n il numero di elettroni contenuto in un metro cubo, si ha:

$$J = -nev \tag{1-14}$$

Nei conduttori metallici un certo numero di elettroni è sempre relativamente libero di spostarsi nel reticolo cristallino; questi elettroni, di origine

termica, sono dotati di velocità non avente alcuna direzione preferenziale. Quando si applica una tensione ad un conduttore si stabilisce nel suo interno un piccolo campo elettrico; gli elettroni liberi vengono accelerati da questo campo come indicato dalla equazione (1-3), e così si sovrappone alle velocità termiche, dirette in tutte le direzioni, una componente di trasporto diretta verso il polo positivo. Questa componente costituisce una corrente convenzionale diretta verso il polo negativo.

Secondo la legge di Ohm, la densità di corrente nel conduttore può essere scritta come

$$J = \sigma \mathcal{E} \tag{1-15}$$

dove σ è la conduttività del materiale espressa in mho-metro.

1-5. L'emissione degli elettroni.

In un metallo esiste un grandissimo numero di atomi, disposti regolarmente uno vicino all'altro, in modo da formare un reticolo che è detto *cristallo.* Gli elettroni che ruotano intorno a ciascun nucleo posseggono sia energia cinetica, dovuta al moto lungo le loro orbite, sia energia potenziale, dovuta alla loro posizione nel campo elettrico del nucleo.

In tutti gli atomi gli elettroni possono assumere solo un numero finito di stati energetici, o livelli di energia; inoltre in un certo atomo, in un dato istante di tempo, solamente un elettrone può trovarsi in un determinato stato energetico.

Gli elettroni di energia più bassa sono fortemente trattenuti dal campo elettrico del nucleo positivo, mentre gli elettroni di energia più alta ruotano più lontani dal nucleo. In realtà numerosi elettroni, nei solidi, posseggono una energia tanto elevata da ruotare ad una distanza tale dal proprio nucleo che i campi dei nuclei vicini si sovrappongono l'uno all'altro; questi elettroni, dotati di alta energia, sono allora liberi di spostarsi disordinatamente attraverso il reticolo. Sono questi gli elettroni liberi, di cui si è parlato in precedenza e sono essi che danno luogo alla conduzione.

La figura 1-4 mostra questo fatto; gli elettroni di bassa energia sono strettamente legati ai nuclei Nu dentro le buche di energia; gli elettroni dotati di maggiore energia, come ad esempio — *e*, non sono legati ai nuclei e sono trattenuti solo dalla barriera di potenziale elettrico che esiste alla superficie del metallo.

I tubi elettronici a vuoto utilizzano gli elettroni che, emessi da superfici metalliche, sono liberi nello spazio. Perchè un elettrone si allontani dalla superficie di un metallo, occorre che esso compia un lavoro. L'elettrone deve cioè possedere abbastanza energia da vincere le forze che esistono alla superficie del materiale.

Queste forze superficiali sono indicate nella figura come una barriera superficiale. Perché possa avvenire l'emissione di un elettrone, la energia occorrente per la sua emissione, che sarà di tipo cinetico, dovrà apparire come una velocità diretta verso l'esterno.

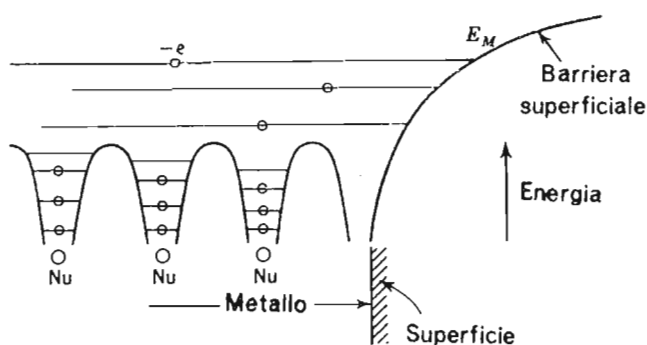



FIG. 1-4. — Livelli di energia dell'elettrone vicino al nucleo e lontano da esso

L'energia posseduta dagli elettroni di un metallo è stata oggetto di notevoli studi; nel capitolo II si ritornerà su questo argomento. Per il momento è sufficiente sapere che, a O°K, il numero di elettroni, che possiede un certo valore di energia diretta verso l'esterno, è dato dalla curva a tratto pieno di fig. 1-5; cioè un gran numero di elettroni possiede energia quasi nulla, tale numero decresce linearmente ed infine nessun elettrone possiede energia maggiore del valore indicato con E_M. Questa è l'energia dell'elettrone che a O°K risulta il più energetico; E_M è una misura relativa dell'energia degli elettroni in un solido ed è nota come *energia caratteristica di Fermi.*

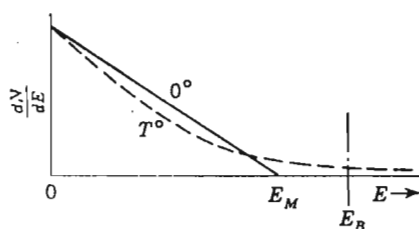



FIG. 1-5. — Distribuzione delle energie fra gli elettroni che hanno una componente della velocità normale alla superficie.

Quando la temperatura del metallo aumenta, una parte della energia termica viene somministrata agli elettroni di più alta energia i quali si spostano a livelli di energia più alti, superiori ad E_M. Poiché la maggior parte della energia termica somministrata al metallo viene assorbita come vibrazioni termiche degli atomi mentre solo una piccola frazione è disponibile

per accrescere l'energia degli elettroni, la distribuzione si modifica solo leggermente, secondo la curva tratteggiata, relativa alla temperatura T^0. Poichè tuttavia la curva, relativa alla temperatura T^0, tende asintoticamente all'asse delle ascisse, esisteranno, in questo caso, alcuni elettroni dotati di una grande velocità diretta verso l'esterno.

Il livello di energia indicato con E_B è l'energia necessaria a vincere le forze superficiali; si osservi che, ad alta temperatura, vi saranno degli elettroni la cui velocità, se diretta verso l'esterno, è sufficiente per consentire ad essi di allontanarsi dalla superficie. Questi elettroni ad alta energia danno origine ad una corrente di emissione.

Occorre somministrare al metallo l'energia E_B-E_M per ciascun elettrone che viene accelerato a velocità sufficiente per l'emissione; finora si è supposto che questa energia venisse ceduta agli elettroni sotto forma di calore; esistono però altri modi di somministrare tale energia e da cui prende nome il particolare tipo di emissione elettronica che ne consegue. Così, se si somministra energia termica, il processo si chiamerà *emissione termica.* Se l'energia è ceduta meccanicamente mediante bombardamento della superficie con un fascio di elettroni o di ioni, si parlerà di *emissione secondaria;* se gli elettroni sono strappati da un elevato campo elettrico che li attira, l'emissione si chiamerà *emissione di campo*; infine il bombardamento di una superficie con energia radiante, cioè con fotoni dà luogo alla *emissione fotoelettrica.*

Il valore E_B, della barriera di potenziale superficiale, dipende dal tipo di superficie, dal suo stato di pulizia, dal fatto che sia o meno ricoperta da un altro metallo o da atomi di gas. L'energia E_B-E_M che deve essere somministrata, è detta *funzione di lavoro* del materiale; si esprime di solito in elettrone volt e si indica con il simbolo E_W:

$$E_W = E_B - E_M \qquad (1\text{-}16)$$

Alcuni valori caratteristici di E_W sono indicati nella tabella 1.

Per determinare la corrente che può essere emessa da una superficie ad una data temperatura, occorre determinare, dalle leggi della termodinamica, la curva di fig. 1-5 relativa alla temperatura T^0. Si integra poi la distribuzione trovata, fra E_B e l'infinito e si ottiene così il numero di elettroni che hanno energia sufficiente ad allontanarsi dalla superficie; questo valore deve essere moltiplicato per la velocità media e per la carica dell'elettrone. L'equazione finale è:

$$i = A_0 S T^2 \varepsilon^{-b_0/T} \qquad (1\text{-}17)$$

dove $A_0 = 4\pi mek^2/h^3$ (ampère/m^2/^{0}K^2) è una costante di proporzionalià
S (m^2) è l'area della superficie emittente;
T (^{0}K) è la temperatura della superficie;
$b_0 = eE_W/k = 11.600\ E_W$;
$k = 1{,}380 \times 10^{-23}$ Joule/^{0}K è la costante di Boltzmann.

TABELLA 1 — VALORI DELLE COSTANTI DI EMISSIONE PER ALCUNI METALLI

Materiale	A_0, $A/m^2/{}^0K^2$	b_0	E_W, *ev*	*Temperatura di fusione* ${}^0K$
Carbonio	$60,2 \times 10^4$	54.500	4,7	
Cesio	$16,2 \times 10^4$	21.000	1,81	301
Molibdeno	$60,2 \times 10^4$	49.900	4,3	2895
Nickel	$26,8 \times 10^4$	32.100	5,0	1725
Platino	32×10^4	61.700	5,32	2047
Tantalio	$60,2 \times 10^4$	47.600	4,1	3123
Torio....................	$60,2 \times 10^4$	39.400	3,4	2118
Tungsteno	$60,2 \times 10^4$	52.400	4,52	3655

Questa espressione è nota come equazione di Dushman, dal nome di colui che la ha ricavata.

La costante A_0 dovrebbe avere teoricamente il valore di 120×10^4 per tutti i materiali, ma l'esperienza mostra che essa, in pratica, è notevolmente variabile; ciò viene di solito attribuito al fatto che una parte degli elettroni viene riflessa dalla superficie verso l'interno del metallo.

La relazione di Dushman è utile nel progetto di dispositivi termoionici e consente di calcolare la massima corrente che si può ottenere da una sorgente termica di elettroni, ad una data temperatura; tale corrente è detta *corrente di saturazione termica.*

I catodi dei tubi elettronici funzionano in un ambito di temperatura

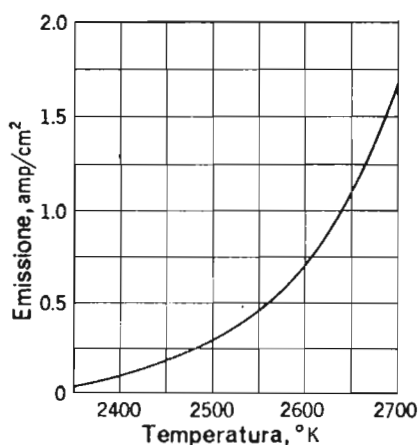



FIG. 1-6. — Densità di corrente emessa in funzione della temperatura, per il tungsteno.

abbastanza ristretto; il limite inferiore è fissato dalla necessità di avere una emissione abbastanza intensa, il limite superiore dalla evaporazione o fusione del metallo che emette gli elettroni. In fig. 1-6 è riportata la curva della corrente emessa in funzione della temperatura per il tungsteno, per l'ambito di temperatura di normale impiego.

Si possono determinare le costanti di emissione A_0 e b_0, modificando l'equazione (1-17) nel modo seguente:

$$\log \frac{i}{T^2} = \log (A_0S) - \frac{0{,}4343b_0}{T} \qquad (1\text{-}18)$$

Se si fa un diagramma della quantità $\log (i/T^2)$ in funzione di $^1/T$, si otterrà una retta la cui pendenza è $-0{,}4343b_0$ e che incontra l'asse delle ordinate nel punto $\log(A_0S)$, il che permette di determinare A_0 e b_0.

1-6. Materiali per emettitori termoionici.

In un tubo elettronico l'emettitore è l'elettrodo negativo e prende il nome di *catodo*. Per avere una intensa emissione sono da preferirsi basse funzioni di lavoro e stabilità del materiale alle alte temperature; spesso occorre ricorrere a delle soluzioni di compromesso.

Nei primi dipositivi termoionici si impiegava il *tungsteno* a causa della sua elevata temperatura di fusione. Se usiamo come fattore di merito il *rendimento di emissione*, quello del tungsteno, compreso fra 4 e 20 mA per Watt di potenza riscaldante, risulta abbastanza basso, cosicché oggi si usa il tungsteno solo in alcuni tubi per alta tensione e nei tubi a raggi X. Nella tabella 2 sono riportate le caratteristiche di alcuni materiali emettitori.

TABELLA 2

Materiale	A_0 $A/m^2/^0K^2$	b_0	E_W, ev	*Rendimento di emissione mA/watt*	*Temperatura di lavoro* ^0K
Tungsteno	$60{,}2 \times 10^4$	52.400	4,52	4-20	2500-2600
Torio su tungsteno	$3{,}0 \times 10^4$	30.500	2,6	50-100	1900-2000
Ricoperto di ossidi	$0{,}01 \times 10^4$	11.600	1,0	100-10.000	1000-1200

Il tungsteno toriato, che contiene qualche percento di ossido di torio aggiunto al tungsteno, è un emettitore migliore del tungsteno; alla temperatura di normale funzionamento, l'ossido si decompone e gli atomi di torio formano uno strato monoatomico sulla superficie. Si sviluppa allora un

intenso campo elettrico fra il torio adsorbito ed il supporto di tungsteno; questo campo, riducendo la funzione di lavoro, agevola l'emissione.

Una temperatura troppo alta fa sì che la evaporazione del torio avvenga a velocità maggiore di quella con cui altro torio diffonde verso la superficie. Una temperatura inferiore al valore normale, riduce la velocità di decomposizione dell'ossido, per cui si ha a disposizione una quantità insufficiente di torio. Per una lunga vita di questo tipo di emettitore è perciò opportuno un attento controllo della temperatura di funzionamento.

I *catodi ricoperti di ossidi* sono costituiti da un supporto di nickel, ricoperto con ossidi di bario e stronzio; alla temperatura di normale funzionamento una parte dell'ossido si decompone liberando il metallo e questo dà luogo ad una pellicola adsorbita in superficie, come avviene nel tungsteno toriato, che riduce la funzione di lavoro. Il rendimento di emissione è molto elevato e può essere ancora migliorato in caso di impiego impulsivo o comunque di breve durata.

I catodi ricoperti di ossidi vengono usati in buona parte dei tubi a vuoto che oggi si costruiscono, poiché richiedono una bassa potenza per il riscaldamento.

Esempio — *Sia dato un catodo ad ossidi piatto, a forma di disco, con una sola faccia ricoperta e con diametro di* 3 *mm. Determinare la temperatura a cui esso funziona, quando si misura una emissione, cioè una corrente di saturazione, di* 5,70 *mA*:

$$\text{Area} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0{,}003^2}{4} = 0{,}00000707 \text{ m}^2$$

$$i = A_0 S T^2 \varepsilon^{-b_0/T}$$

$$0{,}0057 = 0{,}01 \times 10^4 \times 7{,}07 \times 10^{-6} T^2 \varepsilon^{-11.600/T}$$

$$T^2 \varepsilon^{-11.600/T} = 8{,}05$$

passando al logaritmo di base 10,

$$2 \log T - \frac{11.600}{T} \times 0{,}4343 = 0{,}906$$

$$2 \log T - \frac{5030}{T} = 0{,}906$$

Questa equazione va risolta per tentativi assegnando diversi valori a T; poichè i catodi ricoperti di ossidi funzionano intorno ai 1000°K, *prendiamo questo come primo valore di T*:

$$2 \times 3{,}0 - 5{,}03 = 0{,}906$$

$$0{,}97 \neq 0{,}906$$

Allora il valore di partenza era troppo alto. Proviamo con 990°K:

$$2 \times 2{,}996 - 5{,}080 = 0{,}906$$
$$5{,}992 - 5{,}080 \neq 0{,}906$$

990°K *è ancora un po' troppo alto; provando con* 988°K *si ha*:

$$2 \times 2{,}995 - 5{,}091 = 0{,}904 \cong 0{,}906$$

La temperatura di funzionamento è dunque di poco superiore a 988°K.

1-7. Catodi termoionici.

Esistono tre tipi fondamentali di catodi termoionici. Nel tipo a *riscaldamento diretto*, o a *filamento*, un filo di tungsteno, tungsteno toriato, o nickel ricoperto di ossidi, viene riscaldato dalla corrente che lo attraversa e l'emissione ha luogo direttamente dal filo.

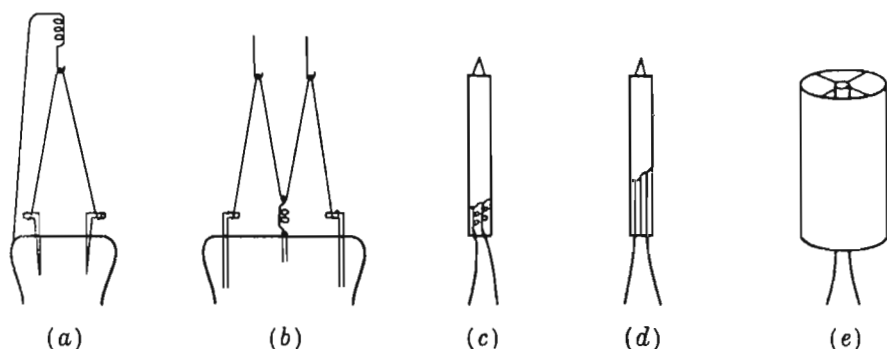



FIG. 1-7. — Tipi di catodo: *a*) V capovolta; *b*) W capovolta; *c*) riscaldatore a spirale; *d*) riscaldatore ondulato; *e*) schermato.

Alcuni tipi sono mostrati in fig. 1-7. Il tipo a *riscaldamento indiretto* è costituito da un tubetto di nickel ricoperto di ossidi e da un riscaldatore di tungsteno, isolato, inserito nel tubetto. L'emissione avviene alla superficie esterna del tubetto mentre la corrente di riscaldamento viene fornita al riscaldatore; le funzioni della emissione e del riscaldamento sono così separate. Con questa costruzione si ha una notevole inerzia termica ed il riscaldamento può essere effettuato mediante corrente alternata senza che si verifichino forti variazioni cicliche di temperatura che provocherebbero fluttuazioni nella emissione.

Il *catodo schermato*, è costituito da una striscia metallica ricoperta di ossidi, arrotolata o ondulata, e circondata da uno schermo termico che ha la funzione di ridurre il calore irradiato e quindi la potenza occorrente per ottenere una certa emissione.

Poichè la struttura schermata dà luogo a cavità interne in cui gli elettroni resterebbero imprigionati formando delle sacche di carica negativa, che impedirebbero l'ulteriore emissione, questi catodi sono usati solo nei tubi a gas in cui gli ioni positivi del gas provvedono a neutralizzare queste sacche di cariche negative.

1-8. Emissione secondaria ed emissione di campo.

Nell'*emissione secondaria*, gli elettroni vengono emessi, cioè estratti dal materiale, per effetto della azione meccanica di un elettrone o di un ione che ne urta le superficie; l'elettrone secondario che viene emesso, sarà attirato da ogni elettrodo a potenziale più elevato che si trovi nelle vicinanze, e darà luogo ad un flusso di cariche che si allontana dalla superficie. Si dice *coefficiente di emissione secondaria*, δ, il numero di elettroni secondari emessi in media per ogni elettrone primario che urta la superficie. In figura 1-8 sono riportati gli andamenti di δ per alcune superfici, in funzione dell'energia del fascio primario.

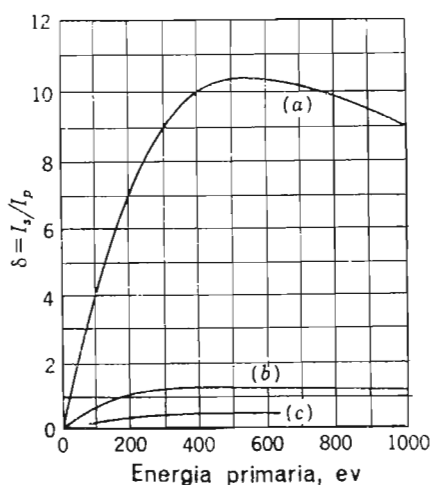



FIG. 1-8. — Coefficienti di emissione secondaria per (*a*) superficie di Cs—CsO — Ag; (*b*) Nickel; (*c*) Nickel ricoperto di carbonio

Perchè un materiale abbia una forte emissione secondaria, è importante il suo stato superficiale ed il fatto che abbia un piccolo valore della funzione di lavoro; le superfici composte, come ad esempio cesio su ossido di cesio, sono buoni emettitori. Se si vuole ridurre l'emissione secondaria si usa invece grafite pura.

Se si applica alla superficie di un metallo un forte campo elettrico positivo, è possibile strappare direttamente gli elettroni anche a bassa temperatura. Il campo abbassa il valore di E_B, o di E_W, che compaiono nella equazione della emissione. Ad intensità di campo dell'ordine di 10^6 volt/cm l'emissione è notevolmente elevata. Questa è l'*emissione di campo*. Nel progetto di alcuni tipi di tubi a raggi X ad alta tensione, è necessario prendere le opportune precauzioni per evitare che si stabiliscano campi troppo intensi fra gli elettrodi, con conseguenti danneggiamenti dovuti alle forti correnti che si hanno con questo tipo di emissione.

1-9. Effetti di carica spaziale nel diodo a vuoto.

Se si salda un catodo termoionico in un bulbo e dopo aver praticato il vuoto lo si riscalda alla temperatura di emissione, gli elettroni emessi riempiranno di cariche negative lo spazio che circonda il catodo. Il campo elettrico, dovuto alle cariche presenti nello spazio, respinge verso il catodo gli elettroni che man mano vengono emessi; si giunge alla condizione di equilibrio quando il campo repulsivo, dovuto alla *carica spaziale*, è sufficiente a respingere verso il catodo un numero di elettroni pari a quelli che vengono emessi, per cui l'emissione complessiva è nulla.

Se ora nel bulbo viene aggiunto un elettrodo positivo, detto anodo, gli elettroni verranno attratti da questo riducendo la carica spaziale e quindi il campo repulsivo che agisce in prossimità della superficie del catodo; così possono essere emessi dal catodo degli altri elettroni. Se il potenziale dell'anodo diminuisce, aumenta la carica spaziale e il campo che ne deriva; diminuisce quindi il numero di elettroni che riesce ad abbandonare il catodo. Si raggiunge una nuova condizione di equilibrio quando il campo alla superficie del catodo è tale da permettere l'emissione di un numero di elettroni uguale a quello che viene raccolto dall'anodo.

Se si fa variare il potenziale anodo-catodo e si fa un diagramma della corrente in funzione di questo potenziale, si ottiene una curva del tipo mostrato in fig. 1-9. Questo è il diagramma tensione-corrente di un *diodo a vuoto*, cioè di un tubo elettronico a due elettrodi; esso mostra che il *diodo* è un dispositivo non lineare.

La parte A-B della curva mostra che alcuni degli elettroni emessi posseggono una energia superiore a quella necessaria per l'emissione, dato che riescono a raggiungere un elettrodo leggermente negativo. Nella zona C-D la curva si appiattisce a causa del fenomeno di *saturazione termica*; tutti gli elettroni emessi vengono cioè raccolti dall'anodo positivo (legge di Dushmann). Ad una temperatura più bassa T_1 il valore della corrente di saturazione sarà più basso.

Il fenomeno della carica spaziale serve a spiegare l'andamento del tratto B-C: la tensione anodica applicata non è sufficiente ad attrarre tutti gli elettroni emessi e quindi si forma la carica spaziale; questa crea un campo, alla superficie del catodo, che respinge gli elettroni e limita la corrente anodica.

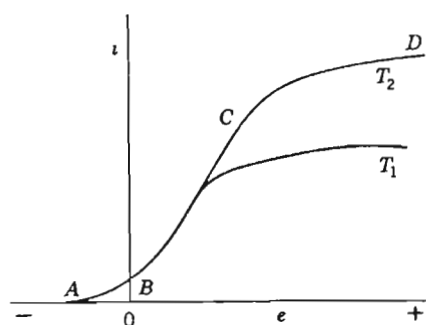



FIG. 1-9 — Diagramma tensione corrente per un diodo con catodo di tungsteno

Nel caso di elettrodi piani e paralleli ed in assenza di carica spaziale, la distribuzione del potenziale fra gli elettrodi è uniforme come è mostrato in fig. 1-10a. Quando la temperatura del catodo è abbastanza alta da provocare una emissione più intensa di quella che occorre per la corrente anodica richiesta, la carica spaziale negativa abbassa il potenziale in tutti i punti e la distribuzione del potenziale diventa quella di fig. 1-10b. La presenza del campo che contrasta l'emissione, presso la superficie del catodo, è indicata dalla pendenza negativa della curva del potenziale in questa zona.

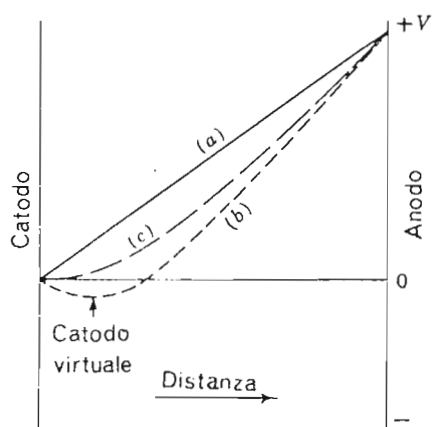



FIG. 1-10. — Andamento del potenziale in un diodo: (*a*) in assenza di carica spaziale, (*b*) velocità iniziale diversa da zero e carica spaziale, (*c*) velocità iniziale nulla.

Si comprende che il *catodo virtuale*, è dovuto alla piccola velocità iniziale posseduta dagli elettroni; se questa velocità fosse nulla, la curva del potenziale sarebbe quella di fig. 1-10c la quale ha pendenza nulla, e quindi campo nullo, in corrispondenza della superficie del catodo.

L'andamento della curva nella zona B-C può essere calcolato analiticamente nell'ipotesi che entrambi gli elettrodi siano piani, paralleli, di dimensioni infinite e posti a distanza *d* l'uno dall'altro, ed inoltre nell'ipotesi che il catodo possa dar luogo ad una emissione comunque intensa. L'equazione (1-13) fornisce l'espressione per la densità di corrente, cioè per la corrente per unità di superficie dell'anodo:

$$J = -\rho v \quad A/m^2 \tag{1-19}$$

Se si trascura l'energia di emissione, la velocità v degli elettroni è funzione della loro energia, cioè:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = Ve \quad \text{joule} \tag{1-20}$$

in cui V è il potenziale in un punto generico della regione in esame.

L'equazione di Poisson indica come varia l'intensità del campo elettrico in una regione in cui sono presenti delle cariche elettriche:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_v} \tag{1-21}$$

in cui $\mathcal{E}_v = 10^{-9}/36\pi$ (farad/m) è la permittività del vuoto.

Sostituendo le (1-19) ed (1-20) nell'equazione di Poisson, si giunge alla equazione differenziale:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\varepsilon_v \sqrt{2Ve/m}} \tag{1-22}$$

che risolta dà:

$$J = \frac{4\varepsilon_v}{9}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}\frac{V^{3/2}}{x^2} \tag{1-23}$$

La quale, per un anodo che dista *d* metri dal catodo, ed esprimendo la tensione come differenza di potenziale anodo-catodo E_b, diventa:

$$J = 2{,}34 \times 10^{-6}\,\frac{E_b^{3/2}}{d^2} \quad A/m^2 \tag{1-24}$$

che è nota come *legge di Langmuir-Child*, o *dell'esponente* 3/2.

Essa mostra che, se l'emissione è sufficientemente intensa, la corrente è una funzione non lineare della tensione anodica.

Trascurando la velocità iniziale di emissione, si è supposto che il campo sia nullo alla superficie del catodo. Questo non è rigorosamente vero, come è

mostrato in figura 1-10b; in realtà il campo è nullo in corrispondenza del catodo virtuale, cosicché l'ipotesi fatta di elettroni emessi con velocità iniziale nulla, equivale a considerare la superficie del catodo leggermente più vicina all'anodo.

Per un tubo a vuoto con anodo cilindrico di lunghezza l raggio r_a e con catodo coassiale di raggio r_k, la corrente, in regime di carica spaziale, è data da:

$$i_b = 14{,}6 \times 10^{-6} \frac{l}{r_a} \frac{e_b{}^{3/2}}{\beta^2} \quad \text{ampere} \qquad (1\text{-}25)$$

La quantità β è funzione del rapporto r_a/r_k; quando il valore di questo rapporto è superiore a 7 si può assumere con buona approssimazione $\beta^2 = 1$.

La legge dell'esponente 3/2 è di grande importanza teorica, dato che quasi sempre i tubi a vuoto operano nella zona in cui essa è valida; inoltre, si è trovato che essa è valida qualunque sia la geometria del diodo.

1-10. La dissipazione nei diodi.

Quando si accelera un elettrone dal catodo all'anodo di un tubo a vuoto, si somministra ad esso dell'energia cinetica la quale, al momento dell'urto contro l'anodo, viene convertita in calore ed in radiazioni; parte di queste ultime possono essere raggi X se si tratta di tubi ad altissima tensione.

La potenza istantanea ceduta all'anodo è $e_b i_b$. Questa potenza deve essere trasferita dall'anodo all'esterno o per irraggiamento o per conduzione. Un eccessivo aumento di temperatura può dar luogo alla liberazione dei gas occlusi nell'anodo peggiorando il grado di vuoto.

Gli anodi dei piccoli tubi sono ordinariamente di nickel, annerito per aumentare l'irraggiamento; i tubi di media potenza fanno uso di anodi di tantalio o molibdeno, materiali ad alto punto di fusione e pertanto in grado di lavorare fino alla temperatura del rosso vivo. Spesso viene impiegata anche la grafite, a causa del suo elevato coefficiente di irraggiamento. I tubi di grande potenza sono raffreddati esternamente mediante acqua o aria forzata.

Data la grande importanza della dissipazione di potenza, si usa classificare i tubi a vuoto in base al valore limite delle perdite o della dissipazione interna di potenza che sono in grado di sopportare. La potenza di uscita che si può ottenere dipende perciò dal rendimento del circuito e del tubo. Questa è un'importante differenza rispetto alle classificazioni in uso per quasi tutti gli altri dispositivi elettrici.

1-11. Controllo della corrente mediante una griglia: il triodo a vuoto.

Intorno al 1907, De Forest introdusse una rete di fili, cioè una *griglia*, fra catodo ed anodo di un diodo, realizzando così il *triodo*. La griglia esercita un controllo elettrostatico sulla corrente, per cui il triodo è in sostanza un relais controllato.

Di solito si polarizza la griglia negativa rispetto al catodo; trovandosi nella zona di carica spaziale l'effetto della griglia si somma a quello della carica spaziale stessa nel creare il campo alla superficie del catodo e quindi nel controllare la corrente del tubo.

Nel paragrafo 1-9 si è mostrato che tanto il campo alla superficie del catodo che la corrente sono funzioni del potenziale anodo-catodo, e_b. Con l'aggiunta della griglia, il campo alla superficie del catodo, e quindi la corrente, diventano funzioni anche del potenziale griglia-catodo e_c. La griglia è più vicina al catodo di quanto lo sia l'anodo, per cui 1 volt applicato alla griglia produce sul catodo un campo quale sarebbe prodotto da un potenziale molto più alto applicato all'anodo. Il rapporto fra il potenziale anodico, necessario per produrre una certa variazione della intensità di campo alla superficie del catodo e il potenziale di griglia necessario per produrre una uguale variazione, è detto *coefficiente di amplificazione* del tubo e si indica col simbolo μ.

La variazione di 1 volt nel potenziale anodico, ha sulla corrente una efficacia μ volte più piccola di una uguale variazione del potenziale di griglia. La corrente i_b si può quindi esprimere nel modo seguente:

$$i_b = f\left(e_c + \frac{e_b}{\mu}\right) \tag{1-26}$$

Questa relazione analitica è molto usata nello studio del triodo.

L'esperienza mostra che la relazione (1-26) può essere approssimata come segue:

$$i_b = K\left(e_c + \frac{e_b}{\mu}\right)^a \tag{1-27}$$

in cui a è circa uguale a 3/2 come era da aspettarsi. La costante K è nota come *perveanza* e si misura in ampère/(volt)$^{3/2}$.

La dimostrazione sperimentale di una relazione non lineare fra i_b ed e_c, del tipo della eq. (1-27), è mostrata dallo oscillogramma di fig. 1-11, dove si è fatto variare e_c mantenendo e_b costante. Questo oscillogramma mostra che la corrente anodica si annulla per una data tensione negativa di griglia che è detta *tensione di interdizione* di griglia. In effetti i tubi vanno all'interdizione con legge asintotica, per cui è molto utile la nozione di *interdizione estrapolata*. Essa si ottiene prolungando la caratteristica linearmente

fino a corrente zero come è mostrato in fig. 1-12. Analiticamente si può ottenere il valore della interdizione estrapolata, ponendo $i_b = 0$ nella (1-27):

$$e_c = -\frac{e_b}{\mu} \tag{1-28}$$

Poichè di solito la griglia è negativa rispetto al catodo, essa non attirerà elettroni e la corrente di griglia sarà trascurabile. Se invece la griglia è positiva, circolerà in essa una corrente e la griglia dissiperà allora della potenza; di questo bisogna tenere conto nel progetto sia dei tubi che dei circuiti.

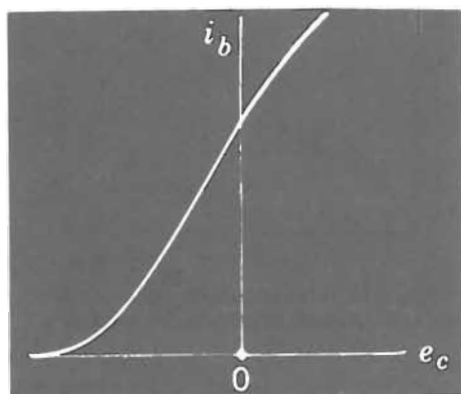
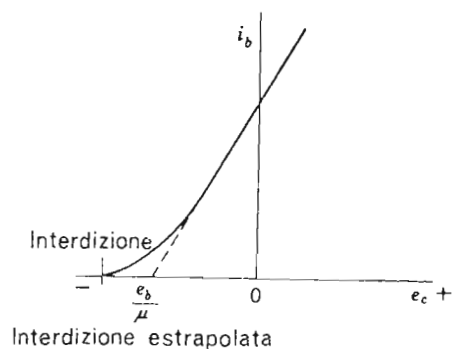



FIG. 1-11. — Diagramma i_b, e_c per un triodo.

GIG. 1-12. — Interdizione effettiva e valore estrapolato.

1-12. La caratteristica tensione-corrente.

La relazione tensione-corrente, o la curva relativa, è importante per definire le caratteristiche circuitali di un elemento non lineare. Per questo è necessaria la nozione di *resistenza differenziale o dinamica*.

La *resistenza statica*, viene definita nei circuiti elettrici in termini di corrente e tensione applicata, come:

$$R_A = \frac{v_A}{i_A} \quad \text{ohm} \tag{1-29}$$

Questa resistenza è data dal reciproco della pendenza della retta tratteggiata che unisce l'origine al punto A in fig. 1-13.

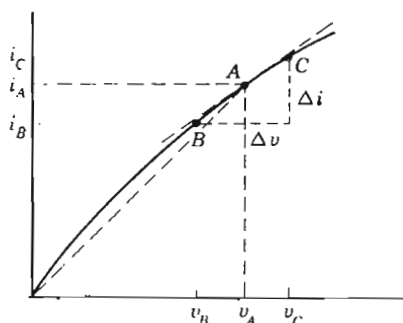



FIG. 1-13. — Caratteristica tensione corrente di una resistenza non lineare.

La resistenza differenziale, o dinamica, si incontra nei circuiti con tensioni e correnti variabili e si definisce in termini di variazioni infinitesime. Se ad un elemento è applicata la tensione v_a, il valore della corrente sarà i_a ed il punto di funzionamento sarà sulla curva in A. Se la tensione applicata viene fatta variare di una piccola quantità fino a portarla a v_b in B e poi a v_c in C, la corrente diventa prima i_B e poi i_c. Per ogni variazione della tensione applicata rispetto al valore che essa ha nel punto A, vi sarà dunque uno spostamento del punto di funzionamento lungo la curva. Per una componente variabile o alternativa della tensione, intorno al punto A, la resistenza sarà allora:

$$r = \frac{v_C - v_B}{i_C - i_B} = \frac{\Delta v}{\Delta i} \overline{\overline{\Delta v \to o}} \frac{dv}{di} \tag{1-30}$$

L'ultima espressione definisce la resistenza dinamica nel punto A, essa è rappresentata dal reciproco della pendenza della curva nel punto di funzionamento, nell'intorno del quale avviene la variazione.

Un dispositivo la cui curva tensione-corrente è lineare, ovvero a pendenza costante, è un elemento di circuito *lineare*; mentre se ha pendenza variabile è detto *non lineare*. Perciò sia il diodo che il triodo sono, in generale, non lineari. La non linearità impone alcune restrizioni nell'analisi dei circuiti in cui si fa uso di questi dispositivi, siano essi tubi o transistori.

Il metodo più generale è quello di operare direttamente sulla curva tensione-corrente con metodi grafici: questo metodo dà risultati precisi solo se si tratta di ampi segnali.

Il secondo metodo è analitico e si applica quando la variazione può essere considerata piccola, se cioè essa interessa solo una piccola parte della curva tensione-corrente. È allora giustificato supporre che questa piccola parte di caratteristica sia lineare ed utilizzare quindi i normali metodi di analisi dei circuiti, sostituendo al dispositivo non lineare un circuito equivalente lineare. Questo metodo analitico è largamente usato perché di facile impiego e perché molte applicazioni prevedono piccole variazioni e condizioni di funzionamento lineari.

1-13. Simbologia.

Per una più facile comprensione delle diverse grandezze elettriche presenti nei circuiti con tubi elettronici, è necessario fissare una certa simbologia. In questo testo verranno impiegati i simboli stabiliti dallo Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).

Le tensioni sono normalmente misurate rispetto al catodo preso come riferimento come in fig. 1-14. Le lettere minuscole vengono usate per indicare quantità variabili o valori istantanei, mentre le lettere maiuscole indicano grandezze continue o valori efficaci. Le grandezze relative ai tre elementi del triodo (catodo, griglia ed anodo, o placca) sono contrassegnate rispettivamente dai pedici k, g, p. I pedici b e B, c e C, vengono anche usati per indicare grandezze relative ai circuiti di placca e di griglia rispettivamente.

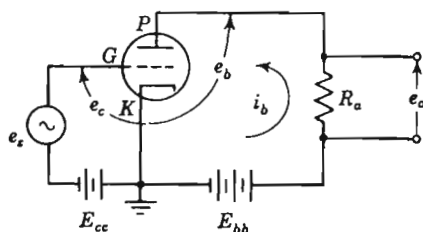



FIG. 1-14. — Un semplice amplificatore a triodo.

Alcuni dei simboli più comuni sono:

e_c: valore istantaneo della tensione totale catodo-griglia.

e_g: valore istantaneo della componente alternativa della tensione catodo--griglia.

E_c: valore medio, o di riposo, della tensione catodo-griglia.

E_{cc}: tensione continua catodo-griglia.
e_s: valore istantaneo della tensione alternata di ingresso.
E_s: valore efficace della tensione alternata di ingresso.
E_g: valore efficace della componente alternativa della tensione catodo-griglia.
i_b: valore istantaneo della corrente anodica totale.
i_p: valore istantaneo della componente alternativa della corrente anodica.
I_b: valore medio, o di riposo, della corrente anodica.
I_{bs}: valore medio della corrente anodica con segnale presente. Si usa questo simbolo quando si vuol mettere in evidenza che I_b ed I_{bs} sono differenti, come avviene talvolta nel funzionamento non lineare.
I_p: valore efficace della componente alternativa della corrente anodica.
e_b: valore istantaneo della tensione catodo-anodo.
E_b: valore medio, o di riposo, della tensione catodo-anodo.
E_{bb}: tensione continua di alimentazione catodo-anodo.
e_o: valore istantaneo della tensione alternativa di uscita catodo-anodo $= e_p$.

Per i tubi con più griglie si usa un sistema di pedici alfa numerici; ad esempio e_{c1}, e_{c2}. Il numero indica la griglia in questione; la griglia numero 1 è quella più vicina al catodo. Se il pedice numerico manca si intende riferirsi alla griglia usata per l'ingresso del segnale.

Dalle precedenti definizioni e dalla figura 1-15a, ne segue che:

$$e_c = E_{cc} + e_g \quad (1\text{-}31)$$

In molti circuiti la polarizzazione di griglia E_{cc} è negativa verso la griglia. Poiché e_c è definito positivo verso la griglia, occorrerà talvolta usare il segno meno con E_{cc}. La variazione di corrente anodica, dovuta alla tensione di griglia e_g, dà luogo alle condizioni di fig. 1-15b definite dalla relazione

$$i_b = I_b + i_p \quad (1\text{-}32)$$

La condizione di riposo, cioè di assenza di segnale in ingresso, porta alla seguente relazione fra le tensioni nel circuito anodico:

$$E_b = E_{bb} - I_b R_a \quad (1\text{-}33)$$

Per cui la tensione istantanea catodo-anodo, quando è presente il segnale di ingresso e_g, vale:

$$e_b = E_{bb} - (I_b + i_p)R_a$$

dalla quale si ricava l'espressione della componente variabile della tensione di uscita che vale:

$$e_o = - i_p R_a \quad (1\text{-}34)$$

$$e_b = E_b + e_o$$

Queste relazioni si giustificano in base alla fig. 1-15c.

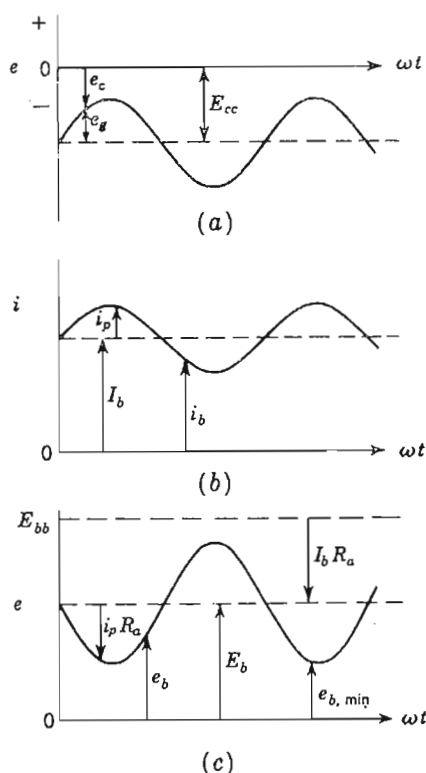



FIG. 1-15. — Relazioni fra le tensioni e e le correnti

1-14. Parametri del triodo.

Si è già mostrato che sussiste la seguente relazione analitica fra le tensioni e la corrente di un triodo:

$$i_b = f(e_c, e_b) \tag{1-35}$$

Ordinariamente si pone $i_c = 0$ e si rappresenta la relazione precedente mediante tre famiglie di curve.

Se si fa un diagramma di i_b ed e_b, assumendo e_c come parametro, si ottengono le curve di fig. 1-16*a* e *b*; poichè queste curve rappresentano una relazione fra corrente e tensione, la loro pendenza è l'inverso di una resistenza. La pendenza di queste curve non è costante, esiste tuttavia una zona a pendenza approssimativamente costante, nella quale il triodo può essere considerato come un dispositivo lineare. Il triodo funziona con variazioni di corrente o tensione intorno ad un punto della caratteristica, sicché il parametro importante è la *resistenza dinamica*. L'inverso della pendenza nel punto Q

di fig. 1-16*a* è:

$$r_p = \left.\frac{\partial e_b}{\partial i_b}\right]_{e_c=\text{costante}} \tag{1-36}$$

Mediante questa relazione si definisce r_p, *resistenza di placca in regime dinamico*. Il suo reciproco è la *conduttanza di placca* g_p. La resistenza di placca r_p, dipende dal tipo di triodo; essa può assumere valori variabili fra 300 ed oltre 100.000 ohm.

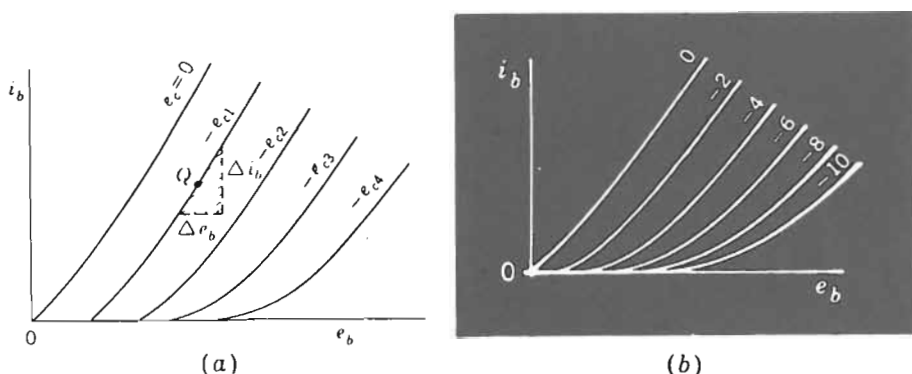



FIG. 1-16. — (*a*) caratteristiche anodiche di un triodo; (*b*) oscillogramma della famiglia di caratteristiche anodiche del triodo 6J5. Lunghezza dell'asse orizzontale e_b = 400 v.

La seconda famiglia di curve è la caratteristica *mutua*. che mette in relazione e_c ed i_b per diversi valori di e_b come in fig. 1-17. Anche in questo caso è importante la pendenza della curva cioè la rapidità con cui varia i_b al variare di e_c

$$g_m = \left.\frac{\partial i_b}{\partial e_c}\right]_{e_b=\text{costante}} \tag{1-37}$$

Le dimensioni di questa derivata sono quelle di una conduttanza; il parametro g_m è detto *transconduttanza griglia-placca* dato che deriva da una relazione fra la corrente di un circuito e la tensione di un altro circuito. Ordinariamente la transconduttanza si misura in micromhos (μmhos) cioè 10^{-6} mho; essa può assumere valori variabili fra qualche centinaio ed oltre 40.000 μmho.

Nel paragrafo 1-11 si è definito il parametro μ come rapporto tra l'effetto della tensione di griglia e quello della tensione anodica sul campo alla superficie del catodo, o sulla corrente anodica. Ora, g_m è una misura dell'effetto della tensione di griglia sulla corrente anodica, mentre g_p dell'effetto della tensione anodica sulla stessa corrente. Quindi μ, g_m e g_p saranno legati fra

loro dalla relazione:

$$\mu = \frac{g_m}{g_p} = \frac{\partial i_b/\partial e_c}{\partial i_b/\partial e_b} = -\left.\frac{\partial e_b}{\partial e_c}\right]_{i_b=\text{costante}} \qquad (1\text{-}38)$$

Tale definizione mostra che μ è uguale alla pendenza delle curve di fig. 1-18, nota come famiglia di caratteristiche *a corrente costante.* Il segno meno indica che perchè la corrente anodica rimanga costante, la variazione della tensione di griglia deve essere di segno opposto a quella della tensione anodica.

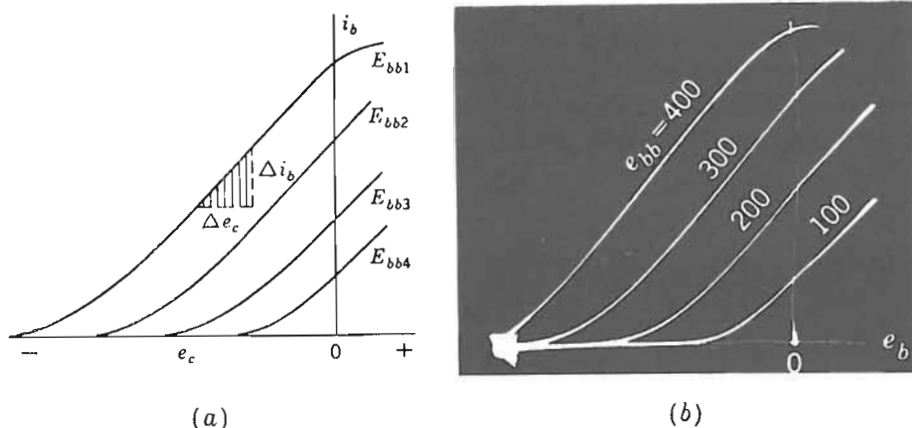



FIG. 1-17. — (*a*) caratteristiche mutue di un triodo, (*b*) oscillogramma relativo al triodo 6J5.

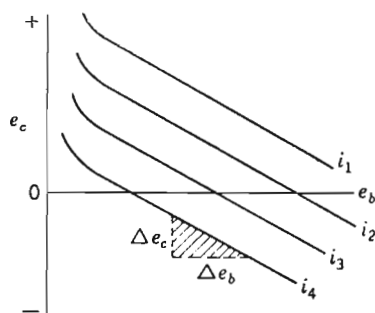



FIG. 1-18. — Curve e corrente costante di un triodo.

Al parametro μ si è dato il nome di *coefficiente di amplificazione.*

L'equazione 1-38 si scrive spesso come segue:

$$\mu = g_m r_p \qquad (1\text{-}39)$$

questa relazione stabilisce un legame fra i tre parametri del tubo, in un certo punto di funzionamento, ed impone alcune restrizioni ai progettisti di tubi

elettronici. Così un tubo ad alto μ sarà anche ad alta r_p. Per ottenere un'alta g_m, occorre una piccola distanza griglia-catodo per aumentare l'efficacia della tensione di griglia.

1-15. La caratteristica mutua dinamica.

Le caratteristiche mutue di fig. 1-17 sono state ricavate a tensione anodo-catodo costante e sono dette *curve statiche*. Quando si pone un carico nel circuito anodico, il tubo fornisce una uscita utile ma in questo caso mentre la tensione di alimentazione rimane costante quella anodica varia. Per chiarire l'effettivo funzionamento del circuito, dobbiamo simulare le reali condizioni di lavoro tracciando una *curva mutua dinamica* per un dato carico, con tensione anodica variabile. Si ottiene questa curva sottraendo la tensione $i_b R_a$ da ogni ascissa della curva statica scelta.

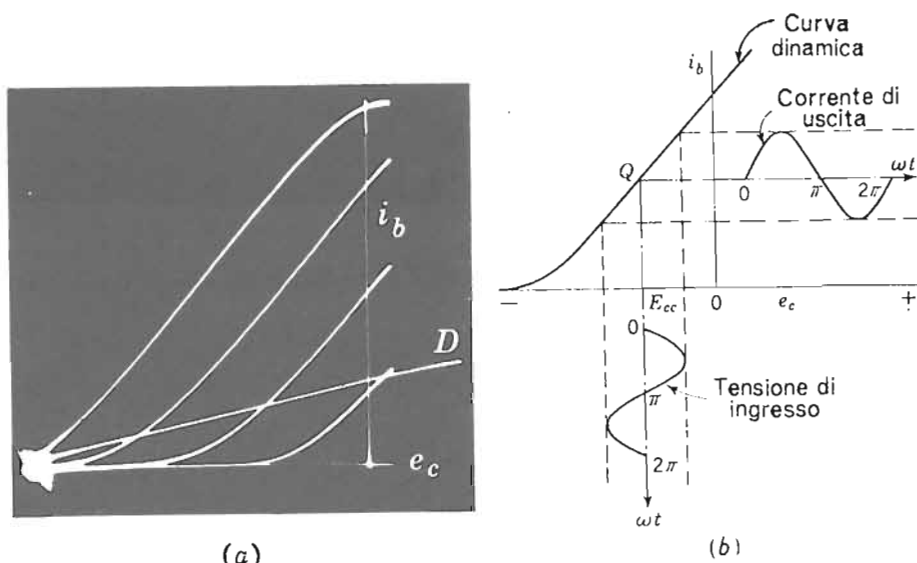



FIG. 1-19. — (*a*) caratteristiche mutue del triodo 6J5; D è la caratteristica dinamica che si ottiene per E_{bb} = 400 v ed un carico di 20000 ohm. (*b*) determinazione grafica della forma d'onda della corrente di uscita a partire dalla caratteristica dinamica

Una caratteristica dinamica è la D di fig. 1-19*a* dove essa è riportata insieme ad una famiglia di curve statiche. La curva dinamica è sempre più lineare della statica per il fatto che si è aggiunta la resistenza di carico, che è lineare, a quella non lineare del tubo. La caratteristica dinamica può essere usata per mostrare le relazione esistente tra la tensione di ingresso e la corrente di uscita; in fig. 1-19*b* è mostrato come sia trascurabile la distorsione della forma d'onda che si ottiene quando la curva dinamica è quasi lineare

nella regione di funzionamento. Ordinariamente se si vuole eseguire l'analisi matematica dei circuiti elettronici, si considera la curva dinamica come non lineare e la si approssima con una serie di potenze.

1-16. Analisi grafica del funzionamento del triodo.

Poichè è difficile tracciare la curva dinamica, si preferisce impiegare il metodo della retta di carico per studiare graficamente i problemi inerenti al progetto del circuito di un tubo elettronico.

Il circuito di fig. 1-20, composto dal triodo, l'alimentazione E_{bb} e la resistenza di carico R_a, è un circuito serie i cui componenti sono attraversati dalla corrente i_b. La tensione anodica è:

$$e_b = E_{bb} - i_b R_a$$

da cui

$$i_b = \frac{E_{bb}}{R_a} - \frac{e_b}{R_a} \tag{1-40}$$

Nel triodo, i_b, e_c ed e_b sono legati dalla relazione (1-35) ossia:

$$i_b = f(e_c, e_b) \tag{1-41}$$

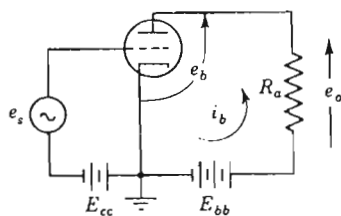



FIG. 1-20. — Un amplificatore a triodo.

Le equazioni (1-40) ed (1-41) definiscono entrambe la stessa corrente i_b e, data la generalità della eq. (1-41), non è possibile risolvere il sistema formato da queste due equazioni; è invece possibile eseguirne una soluzione grafica, essendo l'equazione (1-41) rappresentata dalla famiglia di caratteristiche di placca. Questo è noto come il metodo della *retta di carico* per la risoluzione dei circuiti.

La (1-40) è l'equazione di una retta che passa per i punti:

$$i_b = 0,\ e_b = E_{bb} \qquad i_b = \frac{E_{bb}}{R_a},\ e_b = 0$$

con una pendenza — $1/R_a$. Questa retta, sovrapposta alla famiglia di caratteristiche di placca di un dato tubo, darà il valore della corrente per ogni valore di e_c, dati E_{bb} ed il carico.

In fig. (1-21) è tracciata tale retta che è la *retta di carico in corrente continua* per $E_{bb} = 300$ volt ed $R_a = 7.500$ ohm; essa incontra l'asse della corrente nel punto $E_{bb}/R_a = 40$ mA e l'asse della tensione nel punto $E_{bb} =$ $= 300$ volt. Ora, se la polarizzazione di griglia è stata fissata a — 10 volt, nel centro della regione lineare, il punto Q, che è il punto di funzionamento in condizione di riposo, cioè con segnale di ingresso nullo, si troverà all'intersezione della retta di carico in continua con la curva $e_c = -10$ volt. Ne risulta quindi che al punto Q si ha: $I_b = 19$mA, $E_b = 157$ volt; mentre la tensione sul carico è:

$$300 - 157 = 143 \text{ volt}$$

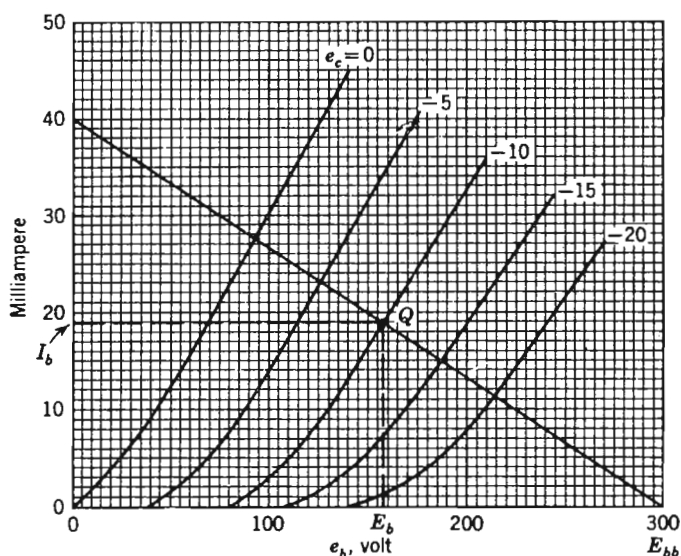



Fig. 1-21. — Costruzione della retta di carico in corrente continua.

Generalmente il segnale di ingresso è variabile o alternativo e quindi il punto istantaneo di funzionamento si muove su e giù sulla linea di carico ogni volta che la tensione di griglia varia secondo il segnale in ingresso.

Se più amplificatori sono disposti in cascata, cioè se un secondo tubo impiega come segnale di ingresso l'uscita variabile del primo, occorre separare, nel circuito di uscita, il segnale alternato dalla componente continua. Si ottiene ciò mediante un circuito di accoppiamento, uno dei quali è mostrato in fig. 1-22, costituito da un condensatore C che serve a bloccare le

tensioni continue, da R_a che fa da resistore di carico, e da R_g che costituisce un carico per l'alternata nel circuito di uscita. Dunque i circuiti di carico in alternata ed in continua non sono identici. Il punto di funzionamento del tubo è ancora determinato da R_a e dalla retta di carico in continua mentre occorre un'altra linea per rappresentare il carico in alternata.

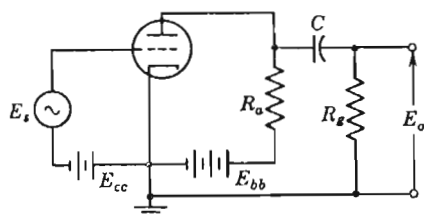



FIG. 1-22. — Amplificatore a triodo con accoppiamento R-C

Se la reattanza di C è piccola, con $R_g = 15.000$ ohm ed $R_a = 7.500$ ohm, come nell'esempio precedente, allora la resistenza di carico in alternata sarà uguale al valore del loro parallelo, cioè 5.000 ohm. Per $E_s = 0$, il tubo è in condizioni di riposo nel punto Q sulla retta di carico in continua che sarà anche un punto della *retta di carico in alternata.* Una retta che passi per Q con pendenza uguale a $-1/R_{ac}$ ($-1/5.000$ per il circuito in questione) sarà la retta di carico in alternata. Si può costruire una retta che interseca gli assi nei punti 100 volt e $100/R_{ac} = 100/5000 = 20$ mA come è mostrato in figura; questa retta ha la pendenza esatta e pertanto la vera retta di carico in alternata sarà la parallela ad essa passante per il punto Q.

Ogni punto della retta in alternata è relativo ad un valore istantaneo della tensione di ingresso.

Se si impiega un segnale di ingresso di forma sinusoidale avente un valore massimo di 10 volt, il punto di funzionamento si sposterà fino ad $e_c=0$ nel picco positivo A con una corrente di 30 mA e fino ad un minimo di $e_c =$ $= -20$ nel picco negativo B con una corrente minima di 9 mA. La forma d'onda della corrente di uscita si può eventualmente tracciare per punti.

Il valore efficace della tensione alternativa di uscita si ottiene nel modo seguente

$$E_o = \frac{E_{max} - E_{min}}{2\sqrt{2}} = \frac{206 - 102}{2\sqrt{2}} = 36,7 \text{ volt}$$

dato che l'oscillazione completa da A a B è uguale al doppio del valore di picco. Poichè $\sqrt{2}$ è la relazione fra il valore massimo ed il valore efficace

di un'onda sinusoidale, il risultato sarà corretto solo per uscita quasi sinoidale. Il valore efficace della corrente alternativa di placca è:

$$I_p = \frac{I_{max} - I_{min}}{2\sqrt{2}} = \frac{30 - 9}{2\sqrt{2}} = 7{,}4 \text{ mA}$$

Il guadagno in tensione che si ottiene con l'amplificatore vale dunque:

$$|A| = \left|\frac{E_o}{E_s}\right| = \frac{36{,}7}{7{,}07} = 5{,}2$$

Quindi la linea di carico dà notevoli informazioni con mezzi grafici. Si usa di solito questo metodo solo per grandi segnali in sistemi non sufficientemente lineari e per i quali non sia giustificato l'impiego di metodi analitici.

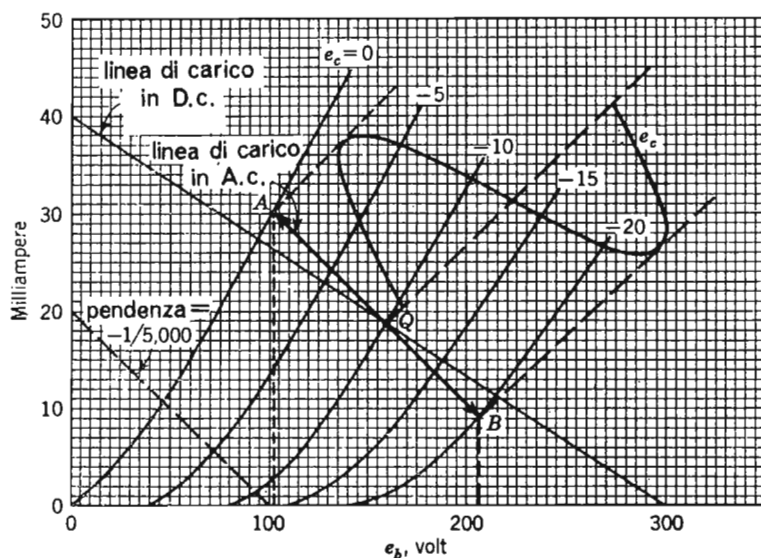



FIG. 1-23. — Costruzione delle rette di carico in corrente continua ed alternata.

Le regole generali per tracciare le linee di carico sono:

1. Tracciare, sulla famiglia di caratteristiche anodiche, la retta di carico in continua la quale interseca l'asse y nel punto E_{bb}/R_a e l'asse x nel punto E_{bb}.

2. Fissare su questa retta il punto Q.

3. Costruire una retta che abbia la pendenza della retta in alternata

usando le intersezioni con gli assi $E_{bb} = 100$ ed

$$i = \frac{100}{R_{ac}}$$

4. Costruire la retta di carico in alternata passante per Q e parallela alla linea tracciata al punto 3.

1-17. Il pentodo.

Le capacità fra gli elettrodi, proprie del triodo, diventano delle piccole reattanze a frequenze superiori al megahertz dando origine a difficoltà circuitali che costituiscono un serio limite alla possibilità di impiego del triodo a tali frequenze.

Per ovviare ai difetti del triodo, Hull, nel 1927, immaginò un tubo a quattro elettrodi, il *tetrodo* il quale pochi anni più tardi venne superato da un tubo ulteriormente migliorato, il *pentodo*, a cinque elettrodi.

Il pentodo ha tre griglie: *controllo*, *schermo* e *soppressore* (fig. 1-24). La griglia schermo ed il soppressore formano una schermatura elettrostatica tra la griglia controllo e l'anodo; in questo modo la capacità griglia-anodo C_{gp} si riduce da $3 \div 10$pF (1pF $= 10^{-12}$ farad) a 0,001pF o meno. Ciò estende il campo di funzionamento del pentodo rispetto al triodo, fino a frequenze dell'ordine dei megahertz.

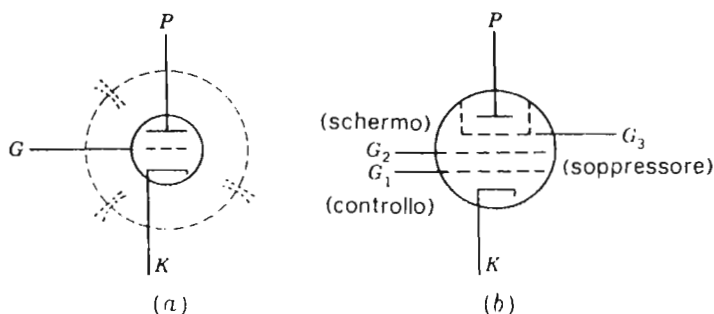



Fig. 1-24. — (*a*) Capacità interelettrodiche di un triodo. (*b*) Schema del pentodo

La griglia schermo funziona ad un potenziale continuo positivo e al potenziale del catodo per le alternate, per cui essa accelera gli elettroni ma funziona anche da schermo. Senza soppressore, il fascio primario di elettroni, ad alta velocità, provocherebbe emissione secondaria dall'anodo. Allora, in ogni ciclo, ogni volta che la tensione anodica scende al di sotto della tensione di schermo, questi elettroni secondari abbandonerebbero l'anodo ed andrebbero verso lo schermo, riducendo in tal modo la corrente anodica.

Se poniamo fra griglia schermo ed anodo una griglia di soppressione al potenziale V del catodo, gli elettroni secondari incontrano un campo che li respinge e vengono subito riportati sull'anodo. Contemporaneamente, il fascio primario, che ha una energia sufficiente a vincere il campo del soppressore, raggiunge indisturbato l'anodo.

La fig. 1-25 mostra il tipico andamento delle caratteristiche del pentodo. Essendo la corrente quasi indipendente dalla tensione anodica il pentodo è simile ad un generatore a corrente costante. La piccola pendenza delle curve anodiche indica una forte resistenza di placca, dell'ordine dei megaohm; nello stesso tempo, a causa dell'alto valore di g_m, un certo segnale darà ampie variazioni della corrente di uscita ed un soddisfacente guadagno in tensione, cioè del rapporto fra tensione di uscita e di ingresso.

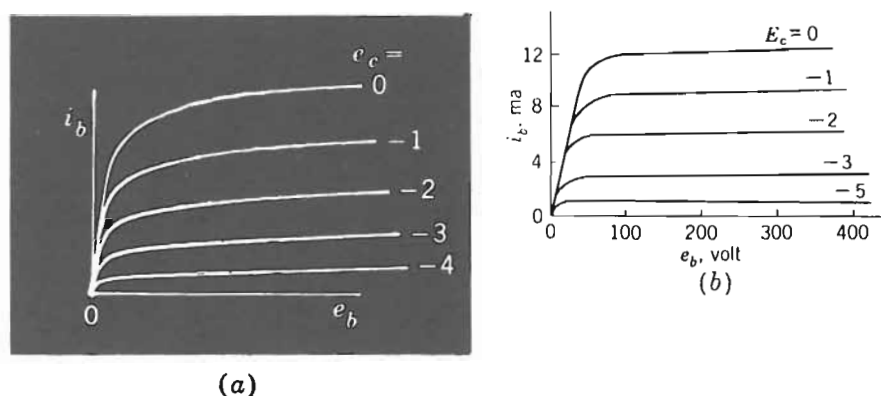



FIG. 1-25. — (*a*) Oscillogramma delle caratteristiche del pentodo 6J7; E_{c2} = 90 v. (*b*) andamento tipico delle caratteristiche anodiche di un pentodo; E_{c2} = 90 v.

In effetti, il pentodo funziona quasi come un triodo con lo schermo che fa da anodo, mentre l'anodo del pentodo serve quasi esclusivamente a raccogliere la corrente.

Oggi il pentodo è largamente usato in tutti i campi di frequenza grazie all'alto guadagno in tensione di cui è capace e alle sue piccole capacità interne.

1-18. Il tetrodo a fascio.

A causa della curvatura delle caratteristiche a basse tensioni anodiche, la zona lineare della caratteristica dinamica del pentodo può essere insufficiente quando si hanno ampi segnali di ingresso. Questa curvatura è presente perchè il soppressore è uno schermo imperfetto per cui si ha ancora

una emissione secondaria. Tra l'altro, in alcune applicazioni, non è tollerabile la elevata corrente di griglia schermo presente nel pentodo.

Il *tubo a fascio*, che è un tetrodo modificato, presenta delle caratteristiche migliori di quelle del pentodo. Al soppressore si sostituiscono delle placche, poste ai lati del catodo, che costringono il fascio di elettroni in una regione limitata dell'area anodica.

La forte densità di elettroni che si ottiene, produce, davanti all'anodo, una carica spaziale negativa in grado di simulare l'azione del soppressore senza avere le imperfezioni di uno schermo fisico. I fili della griglia schermo sono inoltre disposti nell'ombra elettronica dei fili della griglia controllo per cui la corrente di schermo è notevolmente più bassa. Il risultato di queste modifiche è un sostanziale miglioramento delle caratteristiche anodiche come è mostrato dalla fig. 1-26. Poiché presenta dei valori di g_m più alti che il pentodo il tubo a fascio è adatto a dare forti correnti di uscita con piccoli segnali di ingresso.

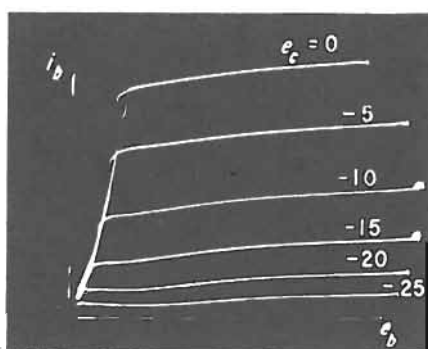



Fig. 1-26. — Caratteristiche di un tetrodo a fascio; $E_{c2} = 230$ v.

1-19. Il pentodo a μ variabile.

La variazione della corrente di uscita prodotta da certo segnale di ingresso, e quindi il guadagno di tensione, è per definizione funzione di g_m che a sua volta è funzione della polarizzazione di griglia E_{cc}. Se il punto di funzionamento si sposta sulla curva dinamica verso il basso, in seguito a un aumento della polarizzazione negativa di griglia, la pendenza della curva diminuisce e g_m decresce. La variazione della tensione di polarizzazione di griglia è quindi un mezzo per variare con continuità il guadagno di tensione di un amplificatore. Nel triodo e nel comune pentodo, la presenza di una elevata curvatura delle curve dinamiche in prossimità dello zero, dà luogo a delle condizioni di polarizzazione eccessivamente critiche.

Il *pentodo a μ variabile* è stato progettato per svolgere questa funzione di controllo del guadagno. La caratteristica dinamica di tale tubo presenta una pendenza variabile con continuità in un vasto campo, come è mostrato in fig. 1-27. Si raggiunge questo risultato avvolgendo i fili della griglia a passo variabile. Se si applica una piccola polarizzazione negativa di griglia, il tubo presenta un alto valore di g_m, che si ottiene come valore medio fra quelli relativi alle porzioni di griglia a passo largo e stretto. Quando la polarizzazione diventa più negativa, la parte della griglia a passo più stretto raggiunge la condizione di interdizione e g_m assume un valore più basso corrispondente a quella parte di griglia a passo più largo che è ancora efficace. Si riescono ad ottenere variazioni di 100 : 1 nel guadagno variando la polarizzazione fra — 3 e — 35 volt.

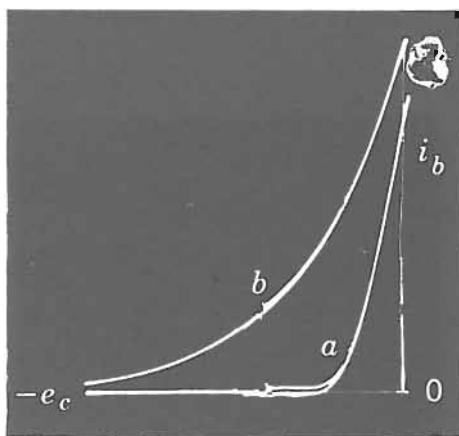



Fig. 1-27. — Caratteristica mutua dinamica per (*a*) il pentodo 6sJ7 ad interdizione netta, (*b*) il pentodo 6sk7 a μ variabile

1-20. Il tubo a raggi catodici e l'oscilloscopio.

Il tubo a raggi catodici rende visibile su di uno schermo il punto di impatto di un fascio mobile di elettroni; con esso si possono direttamente vedere ed analizzare le forme d'onda di correnti e tensioni.

Poichè gli elettroni sono particelle cariche, per tracciare una curva sullo schermo fluorescente si può deviare il fascio mediante campi elettrici o magnetici. Si può fare un diagramma del valore istantaneo di un potenziale elettrico rispetto ad un'altro o di una grandezza elettrica variabile rispetto al tempo. In figura 1-28 è mostrato lo schema di un tale tubo; il catodo K è la sorgente di elettroni; la griglia G ha un piccolo foro nel centro e lascia passare solo un sottile pennello di elettroni; la corrente del fascio e l'inten-

sità del punto luminoso sullo schermo si possono variare agendo sulla polarizzazione di griglia. Il pennello di elettroni attraversa poi i fori degli anodi A_1 ed A_2, i quali formano una lente elettrostatica mediante la quale il fascio di elettroni può essere messo a fuoco per ottenere un piccolo punto luminoso sullo schermo. Il controllo della messa a fuoco si fa variando il potenziale di A_1. Il complesso di elettrodi che forma il fascio è detto *cannone elettronico.*

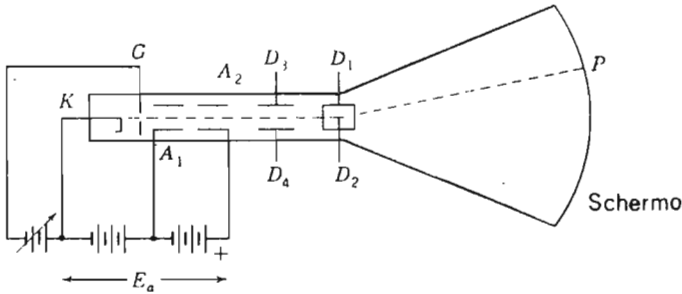



FIG. 1-28. — Schema di un tubo a raggi catodici.

All'uscita del cannone, il fascio passa fra due coppie di elettrodi piani e paralleli posti ad angolo retto fra loro. Un campo elettrico fra D_3 e D_4 devia il fascio di elettroni in direzione normale al piano delle placche (deflessione verticale in figura). Una tensione applicata alla coppia D_1, D_2 produce una deflessione perpendicolare alla prima, cioè orizzontale. In definitiva si può controllare la posizione del punto sullo schermo in due direzioni mediante due potenziali. Poichè gli elettroni hanno una piccola inerzia è possibile deflettere il fascio con precisione a frequenze fino a 10^7 Hz.

La deflessione del fascio si può calcolare in base alla geometria del tubo con la formula seguente:

$$D = \frac{l_d L E_d}{2\, d E_c} \quad \text{metri} \tag{1-42}$$

In cui l_d (m) = lunghezza delle placche di deflessione;
L (m) = distanza fra il centro delle placche e lo schermo;
E_d (v) = potenziale di deflessione;
E_c (v) = potenziale acceleratore;
d (m) = distanza fra le placche.

La formula mostra che la deflessione è proporzionale al potenziale di deflessione applicato.

Il potenziale di accelerazione può assumere valori compresi fra 1000 ed 80.000 volt secondo la luminosità desiderata.

Applicando alle placche di deflessione dell'asse x una tensione varia-

bile linearmente col tempo, si può fare un diagramma del potenziale applicato all'asse y, in funzione del tempo. In fig. 1-29 è mostrato un diagramma di questo tipo per un'onda alternativa rettificata. La tensione lineare della base dei tempi sarà a forma di dente di sega come in fig. 1-30. Una tensione negativa, ricavata dalla rapida variazione che si verifica quando la tensione a dente di sega si annulla, viene applicata alla griglia G in modo da interdire o spegnere il fascio durante il ritorno alla posizione di partenza.

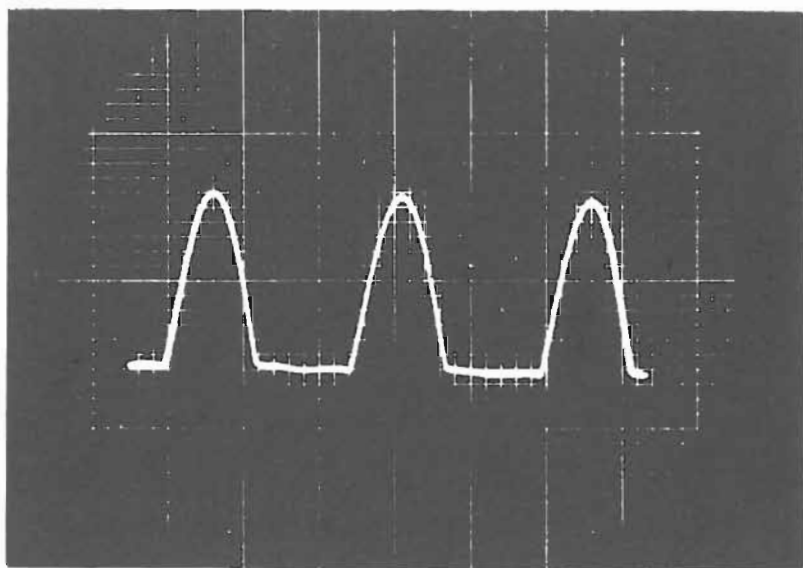



FIG. 1-29. — Diagramma di una forma d'onda, in funzione del tempo, su di uno schermo tarato.

Il fascio può anche essere deviato mediante un campo magnetico ad esso ortogonale; tale campo si realizza con un avvolgimento attraversato da corrente. La deflessione che si ottiene sarà:

$$D = Bl_mL \sqrt{\frac{e}{2mE_a}} \quad \text{metri} \tag{1-43}$$

E_a (volt) = potenziale acceleratore;
B (weber/m^2) = induzione magnetica;
l_m (metri) = lunghezza del percorso del fascio nel campo magnetico;
L (metri) = distanza fra il punto medio del campo e lo schermo.

L'induzione B è funzione della corrente che circola nell'avvolgimento; questa corrente è proporzionale all'integrale della tensione applicata, per

cui se si vogliono osservare delle tensioni per mezzo della deflessione magnetica, non si ottengono le forme d'onda esatte. È possibile però generare una corrente che vari linearmente col tempo, per realizzare, a deflessione magnetica, la base dei tempi o la scansione, come negli apparecchi televisivi.

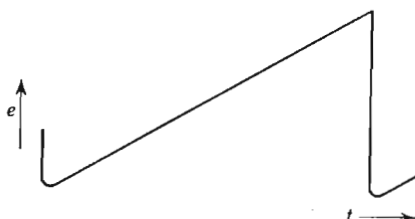



FIG. 1-30. — Forma d'onda della tensione lineare usata per lo spazzolamento

Lo schermo fluorescente è costituito di sostanze naturali e sintetiche mescolate in modo da ottenere le volute caratteristiche cromatiche e di fluorescenza. Esistono fosfori sui quali l'immagine persiste per breve tempo ed altri su cui persiste a lungo, in modo da rendere possibile l'osservazione visiva di fenomeni molto rapidi o casuali. Si possono avere tempi di persistenza compresi fra qualche microsecondo ed alcuni minuti. I normali oscilloscopi da laboratorio hanno uno schermo verde costituito dal fosforo P1 che è a media persistenza (20 . 30 msec) e che consente una buona osservazione visiva.

TABELLA 3 — CARATTERISTICHE DEGLI SCHEMI FLUORESCENTI

Tipo di fosforo	*Colore*	*Persistenza*	*Campo di applicazione*
P1	verde	media: 20 m sec	oscilloscopia
P2	giallo-verde	media	oscilloscopia
P4	bianco	piuttosto bassa	televisione
P5	blu	molto bassa, 20μ sec	fotografia
P7	bianco verdastro	alta	radar
P11	blu	piuttosto bassa	fotografia
P12	arancione	alta	radar
P15	verde	molto bassa	fenomeni veloci
P16	arancione	molto alta	radar

In fig. 1-31 è mostrato lo schema a blocchi di un oscilloscopio; vi sono gli amplificatori per le tensioni di deflessione x ed y, il generatore della forma d'onda per lo spazzolamento, alimentatori che forniscono i potenziali acceleratori e focalizzatori, nonchè le tensioni di alimentazione per gli amplificatori.

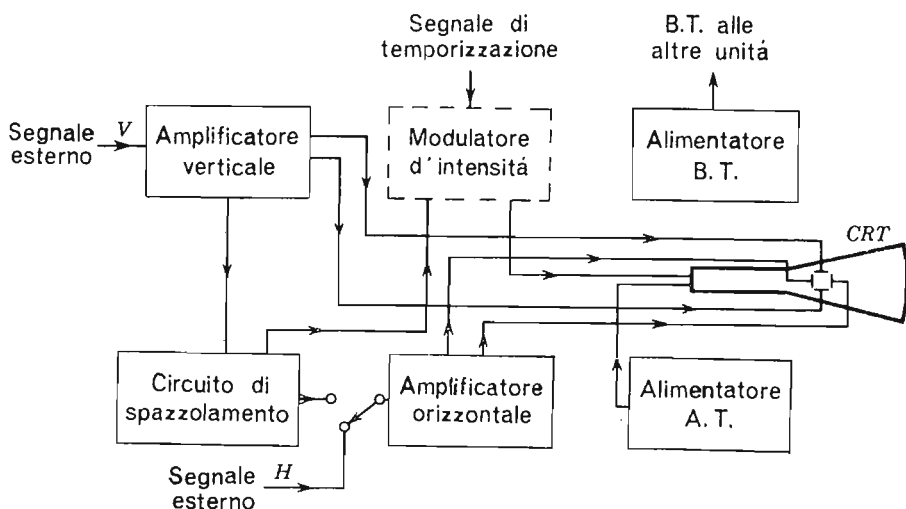



FIG. 1-31. — Schema a blocchi di un oscilloscopio.

È abbastanza facile fotografare le tracce che compaiono sullo schermo di un oscilloscopio; questo metodo è stato impiegato per molte figure di questo testo. Sono più adatti gli schermi con fosfori P1 e P5 che possono essere fotografati con pellicole pancromatiche. Si ottengono dei buoni negativi con sensibilità di 100 ASA, tempo di esposizione 1/10 sec, diaframma f = 5,6. Lo sviluppo deve essere eseguito ad alto contrasto, a meno che non si usino pellicole Polaroid per ottenere subito la fotografia.

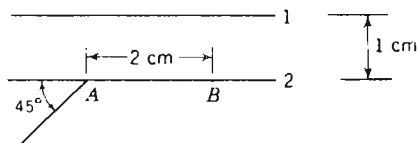



FIG. 1-32.

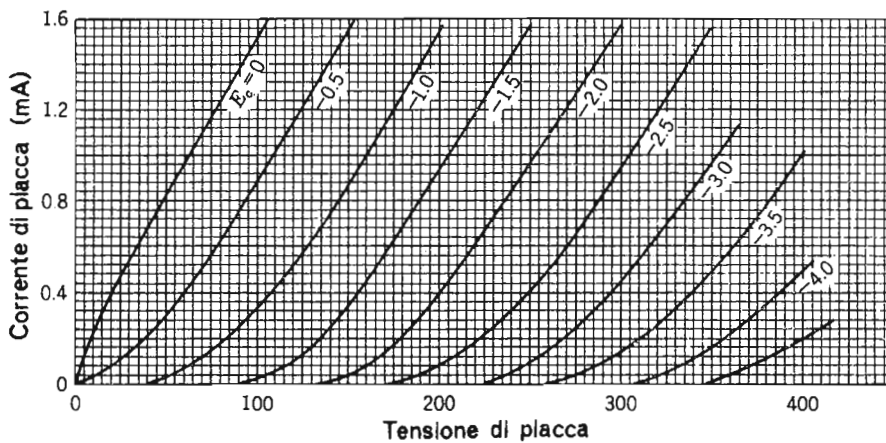



FIG. 1-33.

PROBLEMI

1-1. Due elettrodi metallici paralleli distano 0,5 cm; l'elettrodo superiore è a + 20 volt. Dall'elettrodo negativo viene liberato un elettrone dotato di una velocità verso l'alto corrispondente ad un'energia di 12 ev. Calcolare (a) il tempo che impiega l'elettrone a spostarsi da un elettrodo all'altro, (b) la sua velocità e la sua energia al momento dell'urto.

1-2. Un elettrone viene liberato al centro dell'elettrodo negativo del problema 1-1 con una velocità di 5×10^6 m/sec. e con un angolo di 30° rispetto all'elettrodo. Disegnare la traiettoria percorsa dall'elettrone e determinare il tempo di transito, la distanza percorsa in direzione parallela all'elettrodo, l'energia ceduta all'elettrodo al momento dell'urto. L'elettrodo superiore è a + 20 volt.

1-3. L'elettrone di fig. 1-32 ha una energia di 10ev diretta come è mostrato in figura. Determinare la differenza di potenziale E che deve essere applicata fra gli elettrodi 1 e 2 perchè l'elettrone raggiunga il punto B.

1-4. Sostituire, nel problema 1-3, un campo magnetico a quello elettrico E; determinare il valore dell'induzione B necessaria perchè un elettrone, dotato di una energia di 10 ev, raggiunga il punto B. Indicare la direzione del campo magnetico applicato.

1-5. Un elettrone dotato di una energia di 100 ev e diretto in direzione orizzontale, entra nel campo esistente fra due placche orizzontali lunghe 2 cm e distanti 1,5 cm. La placca inferiore è a + 200 volt rispetto a quella superiore. Determinare l'intensità e la direzione del campo magnetico capace di annullare la deviazione dell'elettrone dalla sua traiettoria iniziale. Trascurare la deformazione del campo in corrispondenza del bordo degli elettrodi.

1-6. Un elettrone dotato di una energia di 50 ev entra in un campo magnetico di 0,04 weber/m², normalmente alla direzione del campo. Calcolare il numero di giri al minuto compiuti dall'elettrone ed il raggio della sua traiettoria nel campo magnetico.

1-7. Un filamento di tungsteno lungo 2,5 cm e del diametro di 0,015 cm lavora alla temperatura di 2.550°K. Calcolare: (a) la corrente emessa; (b) determinare la temperatura a cui deve trovarsi un filamento di tungsteno toriato perchè dia luogo alla stessa emissione.

1-8. Determinare quale valore dovrebbe avere la funzione di lavoro del tungsteno toriato perchè la densità di corrente emessa sia di 15.000 A/m² alla temperatura di 2.550°K.

1-9. Un catodo ricoperto di ossidi lungo 5,3 cm e di 0,125 cm di diametro lavora a 1.025°K; determinare la massima corrente che può essere emessa a questa temperatura. Determinare inoltre quale è la variazione di corrente che si ha se la temperatura diventa 1.000°K.

1-10. Un diodo ha un filamento di tungsteno lungo 3,18 cm e di 0,0125 cm di diametro; la corrente di saturazione è 24 mA; determinare la temperatura del filamento.

1-11. In un diodo a vuoto occorrono 30 volt per avere 120 mA in regime di carica spaziale; determinare la tensione necessaria per avere una corrente di 95 mA. Determinare inoltre la massima corrente possibile sapendo che la dissipazione sull'anodo non può superare 3,2 watt.

1-12. Un diodo ad anodo cilindrico e con catodo di tungsteno toriato lungo 2,5 cm e di 0,05 cm di diametro funziona con il catodo a 1.900°K. Il diametro dell'anodo è 1 cm, la corrente anodica è il 35% del valore di saturazione. Calcolare la tensione fra catodo ed anodo.

1-13. Un diodo ad anodo cilindrico, ha un catodo di tungsteno toriato capace di dare una corrente di saturazione di 300 mA. L'anodo deve avere dimensioni sufficienti per irradiare una potenza di 1,5 w/cm² quando con la tensione di 100 volt circola la corrente di saturazione; la temperatura del catodo è 1.925°K. Determinare il diametro e la lunghezza dell'anodo, il diametro del catodo. Porre nei calcoli $\beta^2 = 1$.

1-14. Una lampada a filamento di tungsteno ha la caratteristica tensione corrente data dalla equazione $I = 0{,}012\ V^{1,9}$ A.
Determinare la resistenza statica e dinamica e la tensione che deve essere applicata perchè circolino 0,62 e 1,15 A.

1-15. Per un triodo sono dati i seguenti valori:

i_b, *mA*	e_c, *volt*	e_b, *volt*
10,0	— 3	155
10,0	— 5	190
9,0	— 3	145
8,3	— 4	155

Determinare i valori di μ, g_m, r_p, supponendo che i dati definiscano delle caratteristiche lineari.

1-16. La funzione della Eq. (1-26) può essere sviluppata in serie di Taylor i cui primi termini, per un certo triodo, sono:

$$i_b = 57 \times 10^{-6}(12e_c + e_b) + 0{,}24 \times 10^{-6}(12e_c + e_b)$$

ed i termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto a questi. Determinare i valori di i_b, r_p, g_m per un punto di lavoro Q posto ad $e_c = -6$v, $e_b = 180$v.

1-17. Per il triodo individuato dalle curve di fig. 1-33, determinare μ, g_m, ed r_p nella regione lineare delle caratteristiche nell'intorno del punto di lavoro $e_b = 200$v, $e_c = -1{,}5$v.

1-18. Dato il triodo ed il punto di lavoro Q del problema 1-17 ed un carico resistivo di 125.000 ohm, determinare la tensione di uscita che si ottiene per $E_s = 0{,}7$ volt efficaci.

BIBLIOGRAFIA

1. CROWTHER J. A.: "Ions, Electrons, and Ionizing Radiations", 7th ed., Longmans, Green & Co., Inc., New York, 1939.
2. DUSHMAN S.: Thermionic Emission, *Revs. Mod. Phys.*, **2:** 381 (1930).
3. JONES H. A., e LANGMUIR I.: Characteristics of Tungsten Filaments as Functions of Temperature, *Gen. Elec. Rev.*, **30:** 310, 354, 408 (1927).
4. LANGMUIR I.: The Electron Emission from Thoriated Tungsten Filaments, *Phys. Rev.*, **22:** 357 (1923).
5. BLEWETT J. P.: Properties of Oxide-coated Cathodes, *J. Appl. Phys.*, **10:** 831 (1939).
6. COOMES E. A.: The Pulsed Properties of Oxide Cathodes, *J. Appl. Phys.*, **17:** 647 (1946).
7. WOOLRIDGE D. E.: Theory of Secondary Emission, *Phys. Rev.*, **56:** 562 (1939).
8. LANGMUIR I.: The Effects of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum, *Phys. Rev.*, **2:** 450 (1913).
9. RYDER J. D.: "Electronic Fundamentals and Applications", 3d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
10. American Standars for Graphical Symbols for Electronic Devices, *Amer. Std.* Z32.10-1944, American Standards Association, New York.

CAPITOLO II

PRINCIPI FISICI DEI DISPOSITIVI A SEMICONDUTTORE

I semiconduttori presentano conduttività intermedie fra quelle dei buoni conduttori, come ad esempio il rame e quelle degli isolanti, come ad esempio il vetro, il polistirolo, la steatite. I semiconduttori sono stati studiati approfonditamente solo in questi ultimi anni e le ricerche condotte in questo campo hanno portato all'invenzione del *transistore*, un dispositivo a semiconduttore che ha proprietà amplificatrici, e di una numerosa famiglia di altri dispositivi che si basano sulla possibilità di controllare la conduzione nei materiali allo *stato solido*.

Questi dispositivi rettificano, controllano, o generano energia elettrica in dipendenza delle loro caratteristiche di conduzione e del numero e tipo di portatori di carica nel cristallo di semiconduttore. I materiali impiegati sono il germanio, il silicio, il selenio e i loro composti con alcuni metalli, nonchè alcuni ossidi e solfuri.

In questo capitolo saranno illustrati i fondamenti della teoria dei solidi ed i principii di funzionamento dei più importanti componenti allo stato solido usati per la rettificazione, la amplificazione ed il controllo dell'energia.

2-1. L'energia degli elettroni nei conduttori.

In un metallo i cosiddetti elettroni liberi, citati nel paragrafo 1-5, sono dotati di velocità dirette in tutte le direzioni e dovute alla energia termica Per creare un moto di cariche in una certa direzione, cioè la conduzione elettrica, occorre somministrare a questi elettroni un'ulteriore energia, applicando una tensione o un campo elettrico al conduttore. In questo modo si aggiunge, al moto di origine termica, che è disordinato, una componente di trasporto nella direzione voluta. Per determinare l'energia occorrente per ottenere un certo trasporto di cariche, bisogna prima conoscere qualcosa sull'energia termica degli elettroni.

Il modo in cui si distribuisce questa energia fra gli elettroni di un metallo è stato studiato approfonditamente e si pensa che una funzione, nota come *distribuzione di Fermi Dirac*, sia in grado di indicare con precisione il numero dN di elettroni aventi un'energia compresa fra E ed E + dE ad una data temperatura T. La distribuzione di Fermi-Dirac è espressa dalla formula:

$$dN = \frac{c\sqrt{E}dE}{\varepsilon^{(E-E_M)e/kT} + 1} = F\,dE \qquad (2\text{-}1)$$

in cui E(ev) = energia
T(^{0}K) = temperatura
E_M = energia caratteristica di Fermi.

La costante di proporzionalità c è data dalla relazione

$$c = \frac{4\pi(2me)^{3/2}}{h^3}$$

ed ha il valore di $6{,}82.10^{27}$ elettroni per metro e per elettrone volt elevato a 3/2. Alla temperatura di 0^0K, la funzione (2-1) ha la forma di una parabola come è mostrato in fig. 2-1.

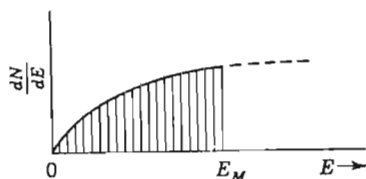



FIG. 2-1. — Distribuzione energetica di Fermi-Dirac per un metallo a 0^0K.

Con più esattezza, la distribuzione di Fermi-Dirac indica la *probabilità* che un elettrone occupi un certo livello di energia, ma questo è un particolare poco importante per i nostri scopi. Nel paragrafo 1-5 si è visto che gli elettroni associati agli atomi di un reticolo cristallino possono trovarsi solo in un numero discreto di livelli di energia o di orbite, cioè possono assumere solo certi determinati valori di energia. Nel reticolo cristallino di un metallo esiste un grande numero di questi livelli possibili ed allo zero assoluto tutti i possibili livelli inferiori ad E_M sono pieni cioè occupati da elettroni. Questo è indicato nella figura dalla parte di area tratteggiata.

La quantità E_M è detta *livello di Fermi* del materiale e si definisce come la più alta energia posseduta da un elettrone allo zero assoluto. Si osservi che, per E = E_M, il denominatore della (2-1) è uguale a 2; allora il livello E_M può anche essere definito come quel valore che ha la probabilità 1/2 di venire occupato; questa è una definizione più precisa di E_M. La quantità

E_M serve anche a misurare il valore relativo delle energie degli elettroni o la distribuzione degli elettroni in un materiale; il suo valore è dato da:

$$E_M = \left(\frac{3N}{2c}\right)^{2/3} = 3{,}64 \times 10^{-19} N^{2/3} \qquad (2\text{-}2)$$

In cui N è il numero di elettroni di valenza presenti in un metro cubo della sostanza in esame; poichè N varia da una sostanza all'altra così è anche per E_M.

Per un metallo a 0^0K, E_M si trova sempre alla sommità di un gruppo o *banda* di livelli completamente occupati. Quando un livello è sempre pieno, la probabilità che esso sia occupato è 1; quando invece è sempre vuoto, questa probabilità è zero. La posizione per cui la probabilità è 1/2 deve essere proprio sulla linea che divide i livelli pieni da quelli vuoti, cioè alla sommità della banda completamente occupata.

Quando la temperatura del metallo aumenta, una parte dell'energia termica viene ceduta agli elettroni più esterni che hanno energia più elevata, sono cioè quelli liberi, i quali, di conseguenza si portano al disopra del livello E_M. Ma la massima parte dell'energia somministrata al metallo viene assorbita come vibrazioni termiche dagli atomi, per cui la distribuzione delle energie degli elettroni varia solo di poco, assumendo l'andamento di fig. 2-2 se il metallo è portato ad esempio a 3000 ^{0}K.

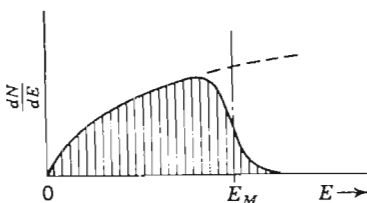



FIG. 2-2. — Distribuzione delle energie degli elettroni in un metallo a 3000 ^{0}K

Può anche accadere che gli elettroni di una banda acquistino energia per effetto di un campo elettrico; questi elettroni daranno allora luogo alla conduzione. La banda, nella quale esistono livelli di energia liberi e nella quale vanno gli elettroni ai quali è stata ceduta energia, è detta *banda di conduzione*.

Esempio — *Calcolare il valore di E_M per il rame, supponendo che esista un elettrone di valenza per ciascun atomo.*

Ricordiamo il numero di Avogadro $6{,}02 \times 10^{23}$ *molecole per mole, la*

densità del rame: 8,89 g/cm^3, *il suo peso atomico*: 63,57. *Allora il numero di elettroni per centimetro cubico sarà*:

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23} \times \frac{1 \text{ mole}}{63{,}57 \text{ g}} \times 8{,}89 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times \frac{1 \text{ elettrone}}{\text{atomo}} =$$

$$= 8{,}4 \times 10^{28} \text{ elettroni per cm}^3$$

Dalla (2-2) *si ha infine*:

$$E_M = \frac{(3 \times 8{,}4 \times 10^{28})^{2/3}}{2 \times 6{,}82 \times 10^{27}} = 6{,}99 \text{ ev}$$

2-2. I semiconduttori: la conduzione intrinseca.

C'è molta differenza tra la conduttività di un buon conduttore di elettricità, come il rame ed un isolante, come il quarzo o la steatite; tale differenza è dell'ordine di 10^{17}, 10^{19}. I semiconduttori presentano conduttività intermedie fra questi estremi; di essi fanno parte il germanio, il silicio e diversi ossidi e solfuri metallici; è interessante vedere quale è il meccanismo della conduzione per questi materiali.

Nei buoni conduttori esiste un grande numero di elettroni liberi che possono dar luogo ad una corrente elettrica; nel rame in genere si dispone di un elettrone per ogni atomo. In un isolante invece, tutte le cariche sono strettamente legate agli atomi e pertanto, alle temperature ordinarie, non sono disponibili per la conduzione. Un semiconduttore puro, allo zero assoluto, ha tutte le cariche legate strettamente agli atomi e si comporta quindi come un isolante; quando però la temperatura è più alta, un certo numero di cariche diventa libero e quindi disponibile per la conduzione. Poiché il numero di portatori di carica è molto piccolo e dipende dalla temperatura, questi materiali possono avere resistività con coefficiente di temperatura negativo, in un certo ambito di temperatura, e mostrare effetti di polarizzazione, oppure comportarsi in maniera non simmetrica in una giunzione con un elettrodo.

Sia i metalli che i semiconduttori possono trovarsi allo stato di policristalli; in tal caso le superfici limite dei singoli cristalli introducono delle disuniformità nella conduzione da un cristallo all'altro. Per avere una conduttività più uniforme si è visto che è opportuno crescere dei grandi monocristalli dai quali vengono tagliate delle piccole lastrine. Questi monocristalli vengono ottenuti per accrescimento, immergendo un piccolo cristallo, detto seme, nel materiale semiconduttore fuso e quindi estraendo il seme a velocità costante; il cristallo man mano che cresce solidifica. La struttura monocristallina può ottenersi anche per deposizione di atomi di semiconduttore su di un supporto, partendo dalla fase gassosa. Ne risulta una struttura cristallina regolarmente disposta cioè un allineamento di atomi detto *reticolo*.

Il silicio ed il germanio sono elementi del quarto gruppo del sistema periodico e cristallizzano nel sistema cubico come il diamante. Ciascun atomo di silicio, il cui numero atomico è 14, ha i suoi elettroni disposti in gruppi di livelli energetici, detti *gusci*, ciascuno dei quali contiene due, otto o quattro elettroni. I gusci più interni con due e con otto elettroni sono completi, cioè non dispongono di orbite o livelli di energia liberi; i quattro elettroni del guscio più esterno sono detti *elettroni di valenza* e determinano le proprietà chimiche dell'atomo. Il germanio, il numero atomico è 32, ha gli elettroni distribuiti in *gusci* contenenti rispettivamente 2, 8, 18 e 4 elettroni; esso ha proprietà fisiche e chimiche simili a quelle del silicio perchè ha 4 elettroni nel *guscio* più esterno che è incompleto. Ciascun atomo di germanio o di silicio è legato nel reticolo ai quattro atomi più vicini, mediante quattro legami covalenti ciascuno costituito da due elettroni di valenza, uno per atomo, come in fig. 2-3. Ogni atomo è così circondato da un *guscio* di otto elettroni e questa è una configurazione stabile, con gli elettroni ben trattenuti nei loro livelli. In questa condizione stabile il germanio ed il silicio si comportano come degli isolanti, dato che nessuna carica è libera di spostarsi.

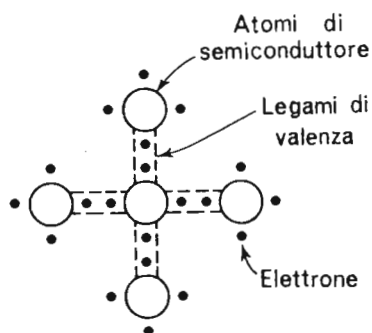



FIG. 2-3. — Struttura simbolica di un cristallo di germanio puro.

All'aumentare della temperatura gli elettroni acquistano energia cinetica, alcuni dei legami covalenti sono spezzati per effetto delle vibrazioni termiche e gli elettroni corrispondenti si liberano dal proprio nucleo. Contemporaneamente rimane nel legame covalente una mancanza di elettrone o *lacuna* sicchè in definitiva viene creata una *coppia elettrone-lacuna.* La lacuna si comporta come una carica positiva; sia l'elettrone che la lacuna si muovono dando luogo ad una corrente. Sotto la azione di un campo elettrico, un elettrone può rompere un legame vicino e riempire la lacuna; quest'elettrone a sua volta lascia dietro di sè una nuova lacuna, per cui apparentemente la lacuna si muove attraverso il cristallo e rappresenta una carica positiva che contribuisce alla conduzione.

C'è da osservare che, perchè un elettrone spezzi il suo legame covalente, occorre somministrare dell'energia; questa viene resa sotto forma di *quanto* di calore o di luce quando l'elettrone si combina con una lacuna per dar luogo ad un legame covalente. Questo *quanto* di energia può essere a sua volta assorbito da un altro elettrone, il quale riesce così a spezzare il suo legame covalente creando una nuova coppia elettrone-lacuna. In definitiva sembra che la lacuna si muova e la conduzione che così ha origine differisce da quella elettronica per il fatto che la libertà di movimento, o *mobilità*, delle lacune è circa la metà di quella degli elettroni. La mobilità μ è definita come la velocità che una particella acquista quando è sottoposta al campo elettrico unitario.

La conduzione dovuta a coppie elettrone-lacuna, generate termicamente, è detta *conduzione intrinseca.* A temperatura ambiente, il germanio può avere una conduttività intrinseca dell'ordine dei 1,67 mho per metro *, benché sia libero solo circa 1 elettrone per ogni 10^{10} atomi di germanio.

Bisogna mettere in evidenza che il materiale rimane elettricamente neutro, perché per ogni elettrone o lacuna esiste sempre una carica di segno opposto vincolata o libera.

2-3. I livelli di energia nei semiconduttori.

Si può spiegare la conduzione nei semiconduttori esaminando la distribuzione di energia degli elettroni come si è fatto nel paragrafo 2-1.

Il diagramma di fig. 2-4a mostra tale distribuzione in un buon conduttore a 0^0K ed alla temperatura T. Esistono anche altre bande di energia per gli elettroni a sinistra dell'asse verticale, esse sono relative agli elettroni dei gusci più interni i quali non partecipano alla conduzione nè influiscono sulle proprietà chimiche. Le bande rappresentano un numero enorme, ma finito, di livelli discreti di energia, creati dalla interazione fra i nuclei vicini. Poiché la differenza di energia fra i vari livelli è piccolissima, gli elettroni acquistano facilmente, da sorgenti termiche o elettriche, la piccola quantità di energia che consente loro di muoversi verso livelli più alti come è mostrato in figura per un salto di temperatura pari a T.

In un semiconduttore, gli elettroni di valenza si trovano ordinariamente

---

* Questa è la conduttività fra le due facce opposte di un cubo di un metro di lato. In molte pubblicazioni sui semiconduttori, la conduttività è espressa in mho per centimetro, cioè tra le facce di un cubo di un centimetro di lato. Il fattore di conversione è:

$$100 \text{ mho/cm} = 1 \text{ mho/m}$$

analogamente per le resistività si ha:

$$100 \text{ ohm} \cdot \text{cm} = 1 \text{ ohm} \cdot \text{m}$$

in una banda nella quale tutti i possibili livelli sono occupati. Questa è la situazione che si è vista nel paragrafo precedente per il germanio ed il silicio, per i quali esistono dei legami covalenti fra gli atomi ai quali partecipano otto elettroni esterni. Questa banda completamente piena, è separata dalla banda di conduzione, ordinariamente vuota e relativa ad ener-

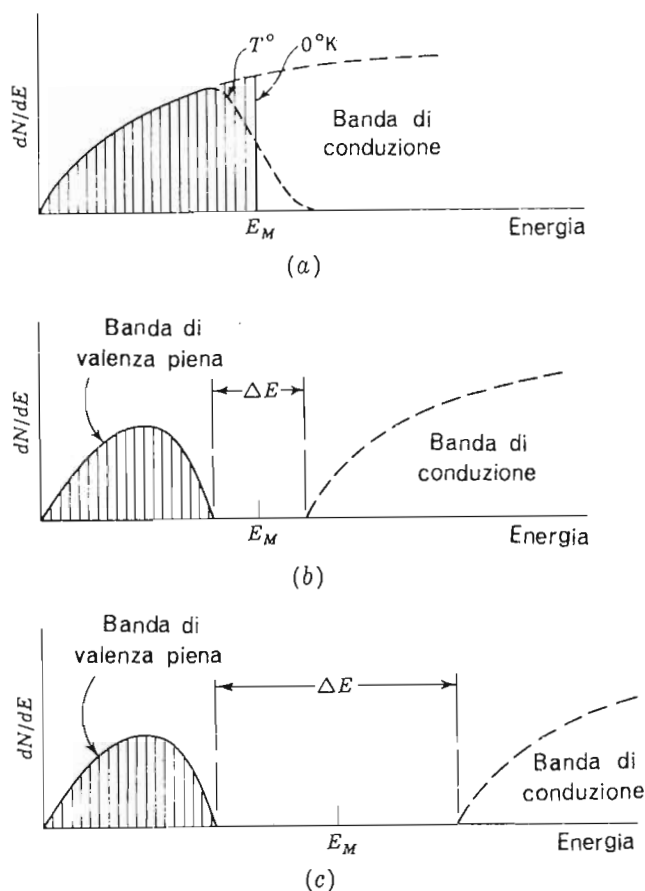



FIG. 2-4. — Densità degli stati energetici per gli elettroni a 0 °K in: (*a*) un conduttore, (*b*) un semiconduttore puro, (*c*) un isolante.

gie più alte, da una ulteriore banda di energia, che gli elettroni non possono occupare, e che prende il nome di *banda proibita* di ampiezza ΔE. Questo è mostrato in fig. 2-4b. In precedenza si era detto che occorre somministrare dell'energia perchè un elettrone spezzi un legame covalente; questa energia è appunto quella corrispondente alla ampiezza della banda proibita ossia ΔE. Si dimostra in meccanica quantistica che, quando una banda di energia

ha tutti i livelli occupati, gli elettroni che si trovano in essa non possono contribuire alla conduzione; infatti non esiste nessun livello energetico libero sul quale un elettrone può spostarsi dopo aver assorbito energia dal campo elettrico applicato: di conseguenza gli elettroni non assorbono energia e non diventano quindi elettroni di conduzione. Solo una banda parzialmente occupata può essere una banda di conduzione. Per questo la conduttività di un semiconduttore puro allo zero assoluto è nulla; infatti la banda inferiore è completamente piena e non esistono elettroni in quella superiore, come è mostrato in fig. 2-4b.

All'aumentare della temperatura, alcuni elettroni riescono ad acquistare una energia uguale o più alta di quella ΔE della banda proibita, per cui essi vanno ad occupare livelli appartenenti alla banda superiore e trovandosi in una banda parzialmente piena possono contribuire alla conduzione. Passando nella banda superiore gli elettroni lasciano delle lacune nella banda di valenza; si sono cioè formate delle *coppie elettrone-lacuna.* La conduttività intrinseca di un semiconduttore è dovuta a queste coppie elettrone-lacuna che si formano quando vengono spezzati i legami covalenti per effetto termico, o in genere quando gli elettroni acquistano energia sufficiente per saltare la banda proibita.

L'ampiezza di banda proibita ΔE si può ottenere dalla equazione

$$\rho = A\varepsilon^{\Delta E_0/kT} \times 10^{-2} \quad \text{ohm-m} \tag{2-3}$$

In cui A è un coefficiente variabile lentamente con la temperatura. Questa relazione mostra che la resistività è funzione della temperatura e dell'energia ΔE; riportando in diagramma $\ln\rho$ in funzione di $1/T$ si può calcolare ΔE; alcuni valori tipici sono riportati nella tabella 4.

TABELLA 4

Materiale	*Banda proibita, ev*
Diamante	7
Silicio	1,15
Germanio	0,72
Piombo	0

Un isolante differisce da un semiconduttore soprattutto per la ampiezza di ΔE, come è indicato in fig. 2-4c; alcuni isolanti hanno ampiezza di banda proibita di 12 ev.

L'ampiezza di banda proibita del silicio è maggiore di quella del ger-

manio; perciò nel silicio è necessaria una maggiore energia termica per formare le coppie elettrone-lacuna occorrenti per la conduzione intrinseca. Di solito si cerca di evitare questo tipo di conduzione; in ogni caso i dispositivi al silicio possono funzionare a temperature più alte di quelli al germanio senza che la conduzione intrinseca predomini su quella desiderata.

La teoria delle bande di energia spiega perchè non tutti gli elementi a quattro elettroni di valenza (cioè: carbonio, silicio, germanio, e piombo) si comportano allo stesso modo.

Per il piombo, l'ampiezza di banda proibita è zero per cui il piombo è un conduttore. Il germanio ed il silicio, che hanno bande proibite piuttosto piccole, sono semiconduttori, il cristallo di carbonio (diamante) è un isolante perchè ΔE è troppo grande. Questa teoria è confermata dal fatto che il diamante diventa un semiconduttore ad alta temperatura.

2-4. Semiconduttori N e P.

A temperatura ambiente la conduzione dovuta ad atomi di impurità presenti nel cristallo è più importante della conduzione intrinseca dovuta agli elettroni liberati per effetto termico. È possibile introdurre, in monocristalli di germanio e silicio estremamente puri, delle quantità piccolissime di un elemento con cinque elettroni di valenza quale fosforo, antimonio o arsenico, che fanno parte del quinto gruppo del sistema periodico: quattro dei cinque elettroni di valenza formeranno dei legami covalenti con gli atomi di germanio, mentre il quinto sarà libero di vagare nel cristallo e sarà quindi disponibile per la conduzione. Questo tipo di conduzione, dovuta a cariche negative, cioè elettroni, è detta *di tipo N*; gli atomi di impurità che forniscono gli elettroni, sono detti *donatori*. Questo è mostrato in fig. 2-5a.

Gli atomi di impurità con tre elettroni di valenza (ossia del terzo gruppo del sistema periodico), quali boro, alluminio, gallio o indio, non possono saturare tutti i legami covalenti del germanio e del silicio e lasceranno un posto vuoto cioè una lacuna in uno di essi. Come si è detto prima questa lacuna è libera di muoversi nel cristallo e fornisce una carica positiva per la conduzione. Il materiale è allora detto *di tipo P*. L'atomo di impurità è detto *accettore*, il fenomeno a cui dà luogo è mostrato in fig. 2-5b.

La conduzione dovuta agli elettroni ed alle lacune, rispettivamente nei materiali N e P, può essere spiegata anche in termini di bande di energia. Come è mostrato in fig. 2-6a, la assenza di alcuni elettroni nella banda di valenza di un materiale di tipo P, lascia vuoti alcuni livelli nella banda inferiore. Poiché la banda non è più completa essa può essere considerata una banda di conduzione essendo possibile il passaggio di un elettrone da

una lacuna all'altra, cioè in tale banda è consentito che una lacuna cambi posto. Analogamente nel materiale N, mostrato in fig. 2-6b, l'eccesso di elettroni liberi, derivanti dagli atomi donatori, possiede sufficiente energia per passare nella banda superiore, di conduzione, per cui è possibile una conduzione di tipo N dovuta agli elettroni.

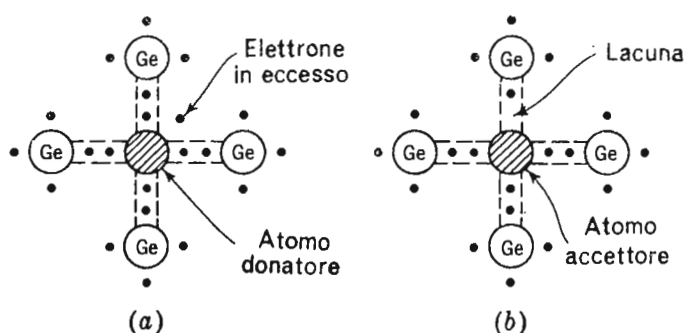



FIG. 2-5. — (*a*) Schema di reticolo cristallino con impurità N, (*b*) Schema di reticolo cristallino con impurità P.

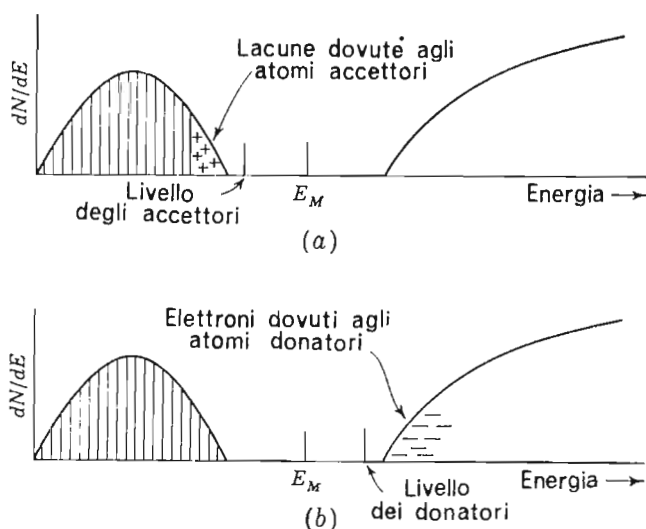



FIG. 2-6. — (*a*) Materiale P, (*b*) materiale N.

Il germanio puro presenta una resistività intrinseca di circa 0,65 ohm-cm a 25°C; questo valore è spesso usato come standard di purezza. Il germanio ed il silicio hanno rispettivamente 4,5 e $5{,}2 \cdot 10^{22}$ atomi per centimetro cubo; in fig. 2-7 è mostrata la variazione di resistività che si ha quando sono presenti piccolissime percentuali di impurità.

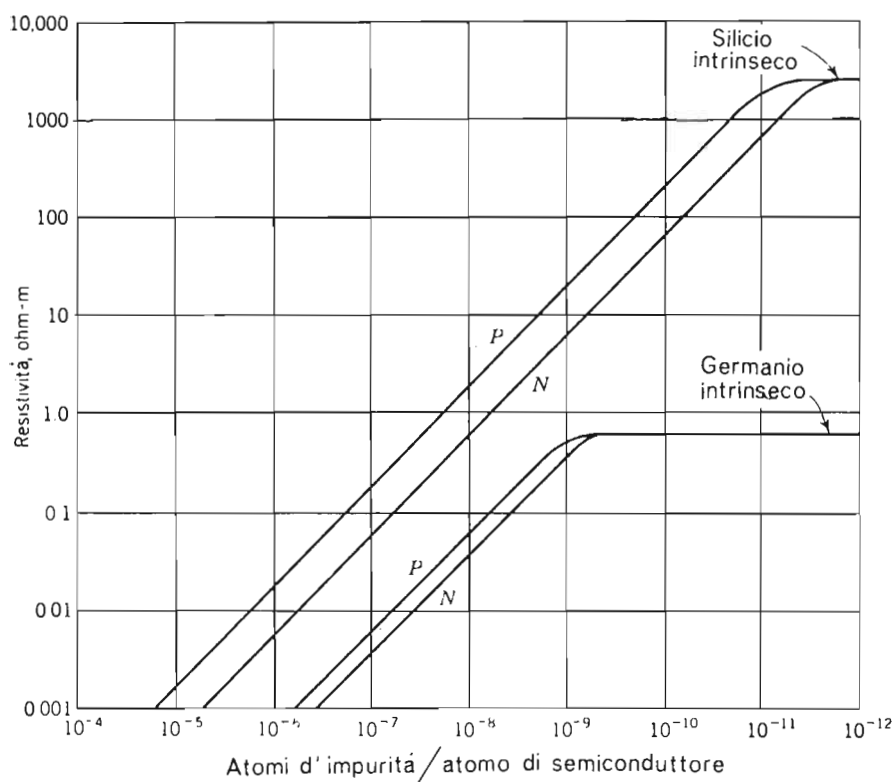



FIG. 2-7. — Effetto delle impurità.

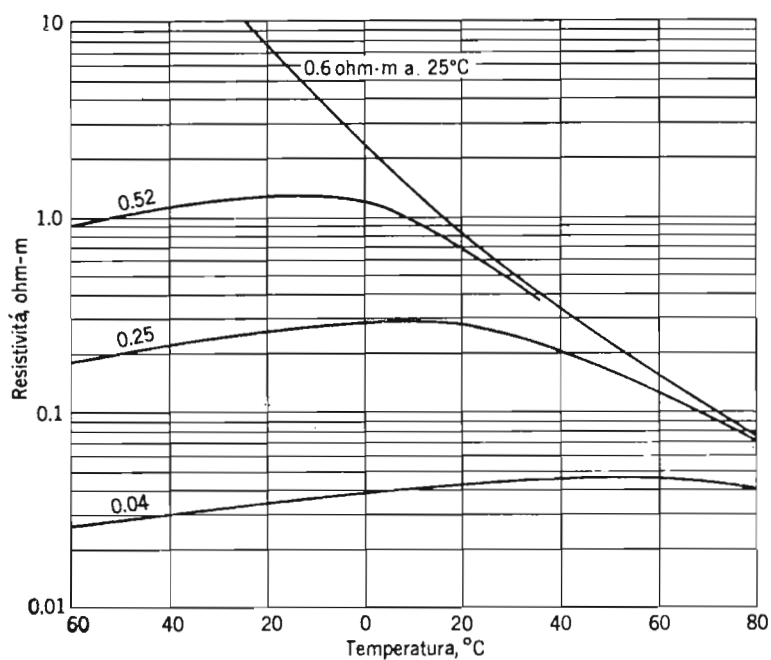



FIG. 2-8. — Variazione della resistività con la temperatura per il germanio tipo N.

Il transistore impiega fondamentalmente un solo tipo di portatore di carica, elettrone o lacuna, in un dato materiale; si cerca di evitare pertanto la conduzione intrinseca dovuta a coppie elettrone-lacuna. Si usano perciò germanio o silicio estremamente puri, drogati con impurità di tipo N o P per ottenere il tipo di conduzione voluta. Se però il semiconduttore funziona a temperature troppo alte la conduzione intrinseca aumenta e può oscurare quella dovuta alle impurità.

In fig. 2-8 si vede che nel germanio con resistività di circa 0,04 ohm · cm è predominante la conduzione dovuta alle impurità fino a circa 80°C; il silicio si può impiegare fino a circa 200°C.

2-5. La giunzione P-N.

Si può realizzare un unico cristallo unendo una regione P ed una N, come è mostrato in fig. 2-9a; queste due diverse regioni si possono ottenere in un cristallo ricavato per accrescimento, introducendo impurità di tipo N nel semiconduttore fuso dal quale si forma il cristallo e successivamente

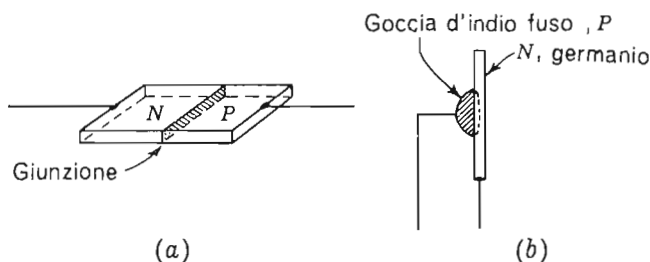



FIG. 2-9. — (a) Diodo a giunzione ottenuto per accrescimento, (b) diodo a giunzione ottenuto per fusione.

impurità di tipo P, in quantità tali da prevalere su quelle di tipo N e produrre una conduzione di tipo P. Le giunzioni P-N si possono formare anche fondendo delle impurità di tipo P su di una lastrina di tipo N, o per evaporazione di materiale P su di un supporto di tipo N. Controllando attentamente i processi tecnologici è possibile rendere molto brusco il passaggio dalla regione N a quella P.

Come è mostrato in fig. 2-10a, prima di realizzare la giunzione esistono nel materiale di tipo N molti elettroni liberi, ad alta energia, e poche lacune provenienti dai fenomeni intrinseci. Nel materiale di tipo P, vi saranno analogamente molte lacune e pochi elettroni di origine termica. Unendo intimamente le due parti, si avrà una *diffusione di cariche* attraverso la superficie di contatto x. Infatti, benchè il moto delle cariche sia disordinato, vi sono

più elettroni in N che possono diffondere da N a P di quanti elettroni vi siano in P che possano entrare nella regione N. Perciò in totale vi sarà una diffusione di cariche, attraverso la superficie di contatto, dovuta ai moti termici.

Questo dà origine ad un eccesso di elettroni, o cariche negative, dal lato di tipo P ed una mancanza di elettroni dal lato N. Ha origine allora una differenza di potenziale ai capi della regione in cui è avvenuta la variazione della densità di cariche, con il lato P negativo rispetto a quello N, come è indicato in fig. 2-10b. Tale regione, compresa fra x_1, ed x_2 è molto sottile; ordinariamente ha lo spessore di 10^{-4}, 10^{-6} cm.

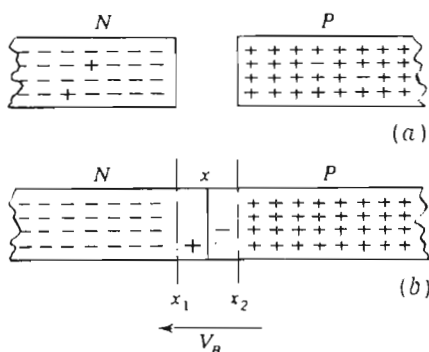



FIG. 2-10. — (*a*) I materiali N e P prima che si realizzi la giunzione. (*b*) La regione priva di cariche fra x_1 ed x_2 dopo aver effettuato la giunzione.

La presenza di una differenza di potenziale comporta immediatamente la presenza di una componente di trasporto della corrente e poichè la corrente complessiva deve essere nulla attraverso la giunzione isolata mostrata in figura, si deve concludere che la corrente di diffusione, che ha origine dalla ridistribuzione delle cariche, è uguale ed opposta alla corrente dovuta alla barriera di potenziale.

Bisogna ancora notare che non vi è stata in complesso variazione di carica ed il componente è ancora elettricamente neutro.

Si può mostrare che una giunzione P-N ha la proprietà di rettificare; se si applica alla giunzione una tensione esterna nella cosiddetta *direzione inversa* cioè con la regione P negativa, come in fig. 2-11a, i portatori maggioritari da ciascun lato della giunzione sono spinti lontano dalla giunzione, cioè la zona di barriera si allarga. Nella regione di barriera resteranno solo pochi portatori minoritari di origine termica, i quali producono una piccola corrente di dispersione i_0. Il diodo si comporta allora come una grande resistenza con in parallelo un condensatore dovuto alla presenza della barriera di potenziale.

Se invece si applica all'esterno una tensione *diretta*, come in fig. 2-11b, cioè con la regione P positiva, allora i portatori *maggioritari* di ciascun lato si spostano verso la regione priva di cariche ed attraversano la giunzione. Questa è la direzione in cui la resistenza è piccola, passerà pertanto una notevole corrente che dipenderà dalla densità dei portatori, dall'area della giunzione, dal potenziale applicato.

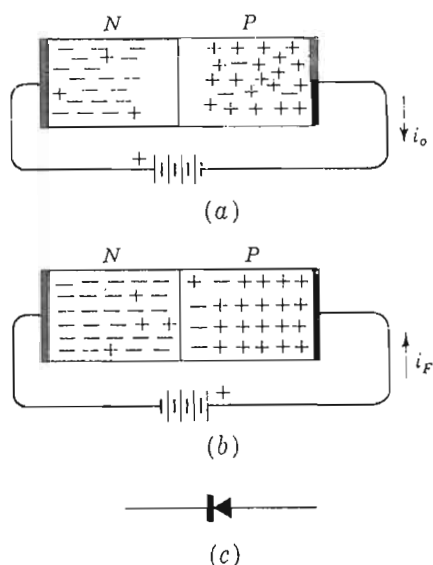



FIG. 2-11. — (*a*) Diodo P-N inversamente polarizzato; (*b*) diodo P-N direttamente polarizzato; (*c*) simbolo del diodo; la freccia è diretta nel senso della conduzione diretta.

2-6. La corrente di diffusione.

Si è visto che, nelle giunzioni P-N, la discontinuità delle cariche in corrispondenza della giunzione x (fig. 2-12a) provoca una ridistribuzione delle cariche stesse: cioè una corrente di diffusione attraverso la superficie limite dei cristalli senza che sia necessaria la presenza di una tensione. La diffusione degli elettroni è verso la parte destra della figura e dà luogo ad una corrente convenzionale che va dalla regione P alla N. La diffusione di cariche è proporzionale alla rapidità con cui varia la densità di carica, cioè alla pendenza della curva di densità di carica tracciata in fig. 2-12a. Si può allora scrivere la seguente espressione per la densità di corrente dovuta agli elettroni che attraversano x per diffusione:

$$J_n = eD_n \frac{dn}{dx} \qquad (2\text{-}4)$$

in cui n è la densità di elettroni, dn/dx è la variazione della densità di elettroni con la distanza. La carica e ha segno negativo uguale a quello della derivata, dato che la diffusione avviene nella direzione delle densità di carica decrescenti, da x_1 ad x.

Le lacune migrano da sinistra verso destra e la densità della corrente di diffusione dovuta alle lacune può essere scritta:

$$J_p = - eD_p \frac{dp}{dx} \tag{2-5}$$

analoga alla precedente. Il segno meno questa volta compare perchè il moto delle cariche avviene da x_2 ad x cioè ancora nella direzione in cui la densità di lacune diminuisce, ma questa volta la carica è positiva. Il rapporto dp/dx rappresenta la variazione della densità di lacune con la distanza.

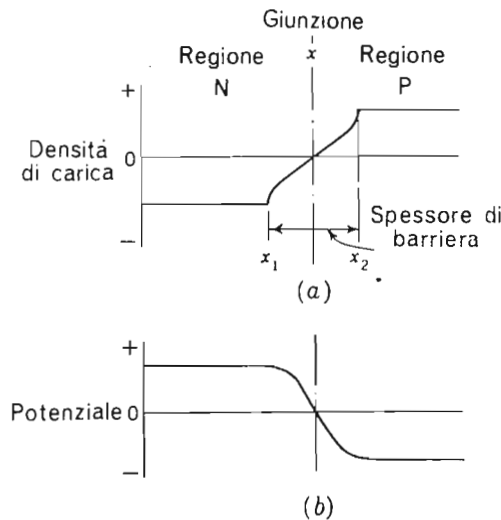



FIG. 2-12. — (*a*) La regione priva di cariche che si forma a causa della migrazione delle cariche libere; (*b*) la variazione di potenziale elettrico che ne consegue.

In entrambe le espressioni compare una costante di proporzionalità D che è detta *costante di diffusione* e che verrà meglio definita in seguito. C'è da notare che la corrente di diffusione dipende dalla non omogenea distribuzione di cariche, non dalla presenza di una tensione.

2-7. La componente di trasporto della corrente.

Quando si verifica la diffusione dei portatori attraverso la giunzione si stabilisce una differenza di potenziale, dovuta al grande numero ed al

diverso segno delle cariche che hanno diffuso; la parte N diventa positiva rispetto allla parte P. Sotto l'azione di questa piccola differenza di potenziale, in presenza di cariche libere, si avrà anche una corrente di conduzione cioè un trasporto di cariche. Questa corrente è già stata definita nella 1-13 come:

$$J = \rho v$$

La densità di corrente totale dovuta agli elettroni ed alle lacune si scrive:

$$J = e(nv_n + pv_p) \qquad (2\text{-}6)$$

in cui n e p sono le densità di cariche; n e v_n sono negative, poichè hanno segno opposto a quello di v_p e p.

La conduttività di un materiale, definita dalla (1-15) è la densità di corrente che circola sotto l'azione del campo unitario:

$$\sigma = \frac{J}{\mathcal{E}} = \frac{e(nv_n + pv_p)}{\mathcal{E}} \qquad (2\text{-}7)$$

Poichè un grande numero di cariche partecipa al fenomeno, si può considerare la media statistica delle velocità:

$$\text{velocità media} = \frac{\text{libero cammino medio}}{\text{libero tempo medio}} \qquad (2\text{-}8)$$

In cui il cammino libero ed il tempo medio sono misurati fra due collisioni delle cariche contro gli atomi eccitati termicamente.

Si può stabilire una relazione fra le velocità medie e le proprietà del materiale, e quindi scrivere la *mobilità* di una particella carica come:

$$\mu_n = \frac{v_n}{\mathcal{E}} \qquad \mu_p = \frac{v_p}{\mathcal{E}}$$

misurata in metro^2/volt secondo. Allora si ha:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \qquad (2\text{-}9)$$

Si può allora scrivere la seguente espressione per la densità di corrente di trasporto:

$$J = e\mathcal{E} = e\mathcal{E}(n\mu_n + p\mu_p) \qquad (2\text{-}10)$$

La direzione positiva di questa corrente sarà da N verso P.

Il fatto che la conduttività varia con la temperatura come è indicato per i semiconduttori in fig. 2-8, si spiega in base alla variazione del numero di cariche libere ed alla variazione della mobilità di queste cariche.

Nei semiconduttori, alle basse tensioni che si impiegano ordinariamente, saranno presenti contemporaneamente sia la corrente di diffusione che quella

di trasporto; la densità di corrente totale si ottiene sommando le eq. 2-4, 2-5 e 2-10:

$$J_n = en\mu_n\mathcal{E} + eD_n \frac{dn}{dx} \qquad (2\text{-}11)$$

$$J_p = ep\mu_p\mathcal{E} - eD_p \frac{dp}{dx} \qquad (2\text{-}12)$$

Nel seguito svilupperemo ulteriormente queste relazioni.

2-8. Le costanti di diffusione.

Le costanti di diffusione D_n e D_p possono essere legate alle caratteristiche fisiche del materiale. La relazione cercata si può ottenere per D_n studiando la distribuzione degli elettroni nei materiali N e P; una relazione analoga si può trovare per D_p studiando la distribuzione delle lacune.

Nella distribuzione di Fermi-Dirac, Eq. (2-1), il numeratore, per livelli appartenenti alla banda di conduzione di un semiconduttore, assume la forma $(E\text{-}E_M)^{1/2}dE$ ossia di una parabola come è mostrato in fig. 2-6b. In un semiconduttore di tipo N il livello di Fermi è più alto del livello degli atomi donatori o al più coincide con esso. Il punto più basso della banda di conduzione, E_{CN}, si troverà ad un valore alcune volte kT/e più in alto di E_M, per cui è lecito trascurare l'unità rispetto all'esponenziale al denominatore della (2-1) e scrivere:

$$dn = K_n \frac{(E - E_M)^{1/2}\, dE}{\varepsilon^{(E-E_M)e/kT}} \qquad (2\text{-}13)$$

Integrando questa equazione fra E_{CN} ed ∞, si ottiene il numero di elettroni, forniti da atomi donatori, che occupano dei livelli nella banda di conduzione di un semiconduttore N alla temperatura T. Indicando col simbolo E_{MN} il livello di Fermi nel materiale N, questo calcolo conduce all'espressione

$$n = K_n \int_{E_{CM}}^{\infty} \frac{(E - E_{MN})^{1/2}\, dE}{\varepsilon^{(E-E_{MN})e/kT}} = A\varepsilon^{-(E_{CN}-E_{MN})e/kT} \qquad (2\text{-}14)$$

Con una integrazione simile si può calcolare il numero di elettroni intrinseci che occupano dei livelli nella banda di conduzione di un materiale P alla temperatura T:

$$n_i = A\varepsilon^{-(E_{CP}-E_{MP})e/kT} \qquad (2\text{-}15)$$

La costante A è uguale a $1{,}76 \times 10^{22}\, T^{3/2}$ per il germanio e $4{,}74 \times 10^{22}\, T^{3/2}$ per il silicio.

Nei due materiali drogati, i livelli di Fermi si trovano nelle posizioni indicate nella fig. 2-13a prima che venga effettuata la giunzione; una volta fatta la giunzione, si verifica la diffusione delle cariche la quale porta alla

uguaglianza fra E_{MN} ed E_{MP} ai due lati della giunzione, come è indicato in fig. 2-13b. Dalle equazioni (2-14) e (2-15) si può allora scrivere:

$$\frac{n}{n_i} = \varepsilon^{(E_{CP}-E_{CN})e/kT} \tag{2-16}$$

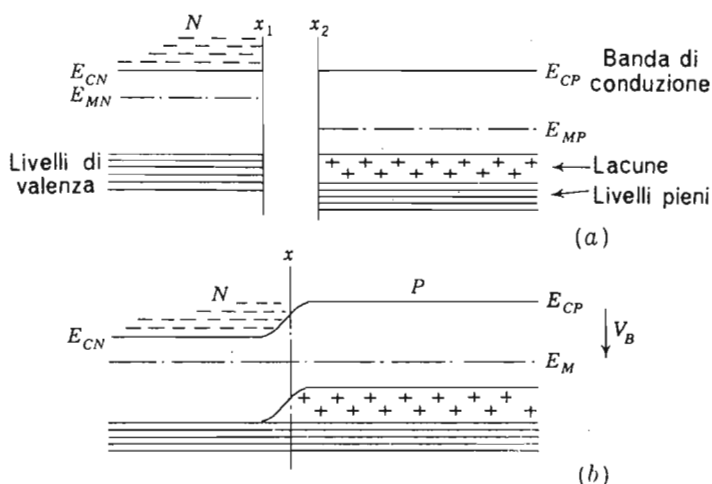



FIG. 2-13. — I livelli energetici nei materiali N e P: (*a*) prima di realizzare la giunzione; (*b*) in equilibrio termico dopo realizzata la giunzione.

Come si è già osservato il processo di diffusione crea una differenza di potenziale in corrispondenza della giunzione isolata, di ampiezza tale da produrre una corrente di trasporto uguale a quella di diffusione in modo che si giunge ad una condizione di equilibrio in cui la corrente risultante è nulla. Imponendo questa condizione, cioè uguagliando a zero la Eq. (2-11) si ottiene:

$$- eD_n \frac{dn}{dx} = e\mathcal{E}n\mu_n$$

Separando le variabili

$$- \mathcal{E} \frac{\mu_n}{D_n} dx = \frac{dn}{n} \tag{2-17}$$

Integrando $\mathcal{E}$ da x_1 ad x_2, si ottiene l'opposto del potenziale di barriera V_B, il quale è stato definito positivo verso N:

$$- \frac{\mu_n}{D_n} \int_{x1}^{x2} \mathcal{E}\, dx = \int_{n}^{n_i} \frac{dn}{n}$$

$$\frac{n}{n_i} = \varepsilon^{-(\mu_n/D_n)\, V_B} \tag{2-18}$$

TABELLA 5

Materiale	E, ev	μ_n, $m^2/volt\text{-}sec$	μ_p, $m^2/volt\text{-}sec$
Ge	0,72	0,39	0,19
Si	1,15	0,12	0,05
CdS	2,4	0,021	
PbTe	0,27	0,12	0,048
InAs	0,35	3,00	0,02
InSb	0,18	7,70	0,12
GaAs	1,35	0,50	0,04

Paragonando questo risultato con quello della Eq (2-16) che si ottiene dalla distribuzione di Fermi-Dirac, si vede che deve essere

$$\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{e}{kT}$$

Una relazione analoga si può ricavare per la lacune nel materiale P e per le lacune intrinseche nel materiale N, per cui si può scrivere in generale:

$$D = \frac{kT\mu}{e} \tag{2-19}$$

Cioè la costante di diffusione è funzione dell'energia termica delle cariche, kT/e, e della mobilità delle cariche nel materiale in questione. Questa ultima quantità può essere determinata sperimentalmente.

2-9. La relazione tensione-corrente in una giunzione P-N.

Si può ora ricavare una espressione analitica fra la corrente che attraversa una giunzione ed il potenziale esterno applicato ad essa. Si supporrà che la zona di transizione, o zona di barriera, sia estremamente sottile, dell'ordine di 0,001 cm in modo che si possa trascurare la ricombinazione nella zona di giunzione. Si osservi inoltre che verranno considerate delle piccole tensioni, dato che i fenomeni che avvengono nelle giunzioni sono legati all'energia termica delle particelle, kT/e, quantità che vale solo 0,026 volt a 300°K.

Se si applica un potenziale inverso, cioè una f.e.m. positiva verso N, come in fig. 2-11a, la corrente dipende solo dalle cariche intrinseche, che compaiono nella zona di transizione, generate termicamente. Dalle Eq. (2-18)

e (2-19), si ottiene la seguente espressione della densità di elettroni in N e P, in funzione della temperatura:

$$n = n_i \varepsilon^{-eV_B/kT} \tag{2-20}$$

Una equazione simile si può ricavare per le lacune intrinseche in N e P:

$$p = p_i \varepsilon^{-eV_B/kT} \tag{2-21}$$

La *corrente di saturazione inversa* i_0 si ottiene moltiplicando queste densità di carica per l'area della giunzione A, per la carica della particella *e*, presa col proprio segno, e per la velocità della particella *v*:

$$i_0 = A(n_i e v_n + p_i e v_p)\varepsilon^{-eV_B/kT} \quad \text{ampere} \tag{2-22}$$

si noti che $V_p = -V_n$ e che questa corrente è diretta da N verso P.

Se si applica alla giunzione una tensione diretta, cioè con P positivo come in fig. 2-14, una nuova componente compare nell'espressione della corrente. Trascurando la resistenza ohmica del semiconduttore, il potenziale applicato alla giunzione sarà $v - v_B$ positivo per P dato che si è definito v_B positivo per N. Dalle equazioni (2-11) e (2-12), ricordando la definizione di costante di diffusione, si ottiene:

$$-\mathcal{E}\,dx = \frac{-J_n\,dx}{en\mu_n} + \frac{kT}{e}\,\frac{dn}{n} \tag{2-23}$$

$$\mathcal{E}\,dx = \frac{J_p\,dx}{ep\mu_p} + \frac{kT}{e}\,\frac{dp}{p} \tag{2-24}$$

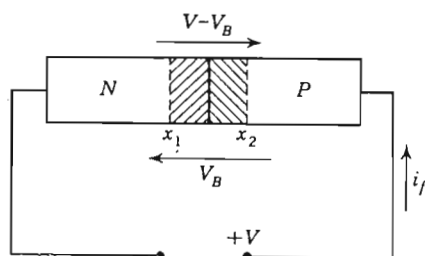



FIG. 2-14. — La giunzione P-N; $V - V_B$ è indicato come aumento di potenziale.

Integrando l'equazione (2-23) ed osservando che ε è stato definito positivo verso P, per cui l'integrale di $-\varepsilon$ fra x_1 ed x_2 rappresenta il potenziale di P rispetto ad N, cioè $V - V_B$, si ottiene:

$$V - V_B = -\int_{x1}^{x2} \mathcal{E}\,dx = -\frac{1}{en\mu_n}\int_{x1}^{x2} J_n\,dx + \frac{kT}{e}\int_{n}^{n_i} \frac{dn}{n} \tag{2-25}$$

Il primo termine a destra comprende la conduttività dovuta agli elettroni: $en\mu_n$ e quindi rappresenta una caduta ohmica; questa quantità si trascura perchè molto piccola rispetto all'altra. Il secondo termine, rappresenta la relazione fra la densità degli elettroni ed il potenziale esistente ai capi della zona di transizione in polarizzazione diretta. Si ha allora:

$$V - V_B = \frac{kT}{e} \ln \frac{n}{n_i} \tag{2-26}$$

$$n = n_i \varepsilon^{(V-V_B)e/kT} \tag{2-27}$$

Una integrazione analoga si può eseguire per la densità di corrente dovuta alle lacune (Eq. 2-24); si trova:

$$p = p_i \varepsilon^{(V-V_B)e/kT} \tag{2-28}$$

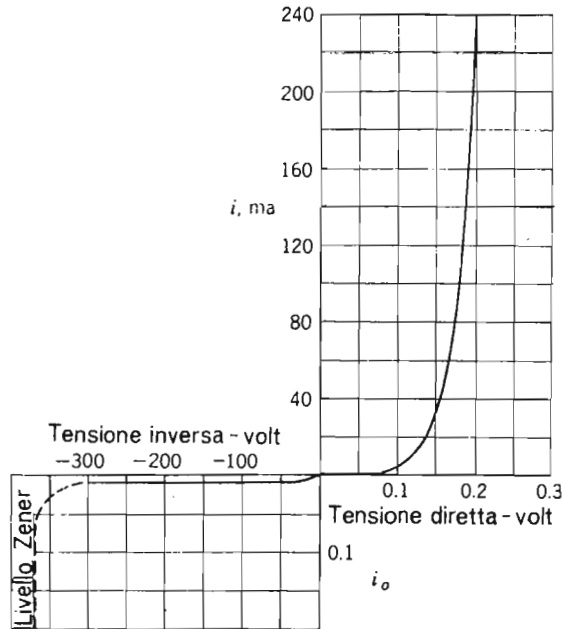



FIG. 2-15. — Caratteristica tensione corrente per un diodo P-N (osservare il cambiamento di scala).

Queste relazioni risultano più chiare se le si moltiplica per l'area della giunzione A e per ev_n ed ev_p rispettivamente:

$$i_n = Anev_n = An_i ev_n \varepsilon^{(V-V_B)e/kT} \tag{2-29}$$

$$i_p = Apev_p = Ap_i ev_p \varepsilon^{(V-V_B)e/kT} \tag{2-30}$$

La corrente totale che attraversa la giunzione è la somma di queste due componenti e della corrente intrinseca:

$$i = i_n + i_p - i_0$$
$$= A(n_i e v_n + p_i e v_p)\varepsilon^{-V_B e/kT}(\varepsilon^{Ve/kT} - 1)$$

Conviene definire i in funzione di i_0, corrente di saturazione inversa, che è facilmente misurabile. Dall.Eq. (2-22) si ha:

$$i = i_0(\varepsilon^{Ve/kT} - 1) \tag{2-31}$$

Questa è la relazione tensione-corrente per un diodo P-N.

In polarizzazione diretta (+ V) il termine esponenziale è grande rispetto all'unità e dà alla caratteristica tensione-corrente la forma di un'esponenziale, come è mostrato nel quadrante di destra di fig. 2-15. In polarizzazione inversa (—V), il termine esponenziale diventa rapidamente trascurabile e la corrente inversa diventa i_0. Poichè n_i e p_i dipendono dalle coppie generate termicamente, il valore di i_0 sarà funzione della temperatura della giunzione.

La figura 2-15 che è un diagramma della Eq. (2-31) mostra che la giunzione P-N è un elemento non lineare, avente la proprietà di rettificare, come si era già detto. La piccola caduta in polarizzazione diretta, o la bassa resistenza interna, rende questo dispositivo di grande importanza come un efficace rettificatore di correnti alternate.

2-10. Capacità della giunzione P-N.

Quando si applica una tensione inversa —V alla regione di transizione, le lacune degli atomi accettori della parte P verranno riempite da elettroni provenienti dal lato N; di conseguenza nel materiale N vi saranno atomi di impurità che hanno ceduto alla banda di conduzione elettroni i quali sono stati spazzati via dal potenziale applicato. In definitiva il lato N della regione di transizione assumerà una carica positiva e quello P una carica negativa; queste cariche sono legate agli atomi di impurità come in fig. 2-16. Si ha quindi una separazione di cariche e pertanto la regione di transizione, in polarizzazione inversa, equivale ad una capacità.

Quando la tensione inversa aumenta, vengono interessate al fenomeno cariche più lontane dalla giunzione e la ampiezza della regione W aumenta. La capacità effettiva che ne deriva è di tipo insolito poichè è funzione del potenziale applicato e inoltre non dipende da questo linearmente.

Se la giunzione è stata ottenuta per accrescimento a partire dal materiale fuso, e il drogante P è stato aggiunto gradualmente al materiale di tipo N fuso, si avrà una variazione uniforme della concentrazione di impurità; si ottiene così una *giunzione graduale* come in fig. 2-16b.

Si considera che la giunzione effettiva x si trovi nel punto in cui le concentrazioni dei donatori negativi e degli accettori positivi si eguagliano.

L'ampiezza effettiva W della zona di transizione dipende dal potenziale nel modo seguente:

$$W = W_0 \left(1 - \frac{V}{V_B}\right)^{1/3} \tag{2-32}$$

in cui V è negativo. Una tale legge di variazione di W dà luogo ad una variazione della capacità con la tensione data da

$$C_T = \frac{C_0}{(1 - V/V_B)^{1/3}} \tag{2-33}$$

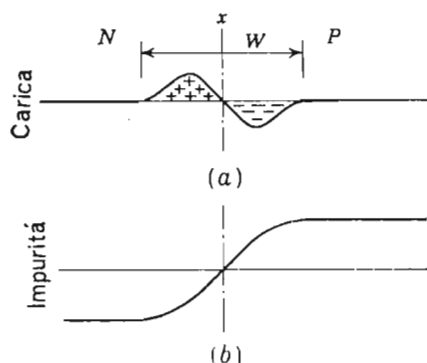



FIG. 2-16. — (*a*) Distribuzione di cariche in polarizzazione inversa; (*b*) variazione della densità di impurità in una giunzione graduale.

Mediante la tecnica di diffusione o di lega, è possibile realizzare giunzioni in cui la concentrazione delle impurità di tipo N è relativamente costante fino alla giunzione ove l'impurità di tipo P aumenta molto rapidamente. La distribuzione di cariche che ne risulta è mostrata in fig. 2-17a. Come era da aspettarsi, la zona di transizione W in questa *giunzione a gradino* si trova quasi interamente nel materiale N e varia con il potenziale con legge diversa da quella della *giunzione graduale.* Si può dimostrare che l'ampiezza della zona di transizione varia nel modo seguente:

$$W = W_0 \left(1 - \frac{V}{V_B}\right)^{1/2} \tag{2-34}$$

e quindi esiste una capacità data da:

$$C_T = \frac{C_0}{(1 - V/V_B)^{1/2}} \tag{2-35}$$

Per il germanio ed il silicio, V_B è uguale a 0,5 e 0,7 volt rispettivamente e C_T oscilla fra 5 e 20 pf.

Alla capacità di transizione in polarizzazione inversa, fa riscontro la *capacità di immagazzinamento* o di *diffusione* C in polarizzazione diretta. Quando si applica un potenziale diretto le lacune e gli elettroni diffondono ai due lati opposti della giunzione come è già stato descritto. Questa carica

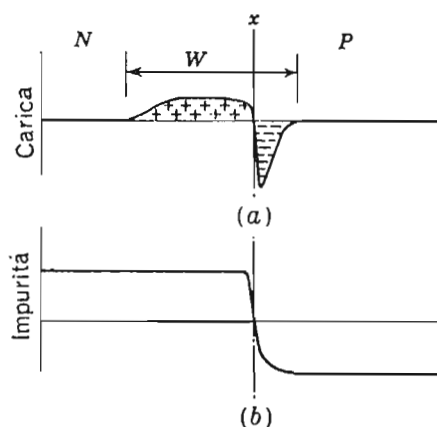



FIG. 2-17. — Una giunzione a gradino.

immagazzinata e che viene restituita solo quando il potenziale si inverte, è proporzionale al potenziale applicato e dà origine ad una ordinaria corrente capacitativa:

$$C_D = \frac{dQ}{dV}$$

Possono aversi valori di varie centinaia di picofarad che limitano notevolmente le possibilità di funzionamento delle giunzioni alle alte frequenze. L'effetto della capacità di immagazzinamento può anche essere quello di un ritorno ritardato delle cariche nel circuito esterno dopo un'inversione del potenziale, il che provoca un allungamento nella coda delle forme d'onda impulsive che si usano quando un diodo viene impiegato in commutazione. Per ridurre questo effetto si sono studiati particolari tipi di diodi.

2-11. Il diodo a punta di contatto.

A causa delle capacità interne il diodo a giunzione è di poca utilità a frequenze dei gigahertz, sicchè spesso si utilizza il *diodo a punta di contatto*, mostrato in fig. 2-18.

Una sottile piastrina di semiconduttore, ordinariamente di tipo N, è messa a contatto con un sottile filo di bronzo o di oro appuntito. Durante la fabbricazione si fa passare, per un breve istante, una forte corrente fra il contatto ed il semiconduttore; si suppone che si crei una zona di tipo P intorno alla zona di contatto del filo. La teoria del funzionamento è la stessa già esposta per le giunzioni P-N. La relazione tensione corrente è simile a quella di un diodo a giunzione, ma il tipo di costruzione, a punta di contatto, costituisce un limite per la corrente ammissibile. A causa delle sue piccole dimensioni e della bassa capacità dovuta all'elettrodo di contatto, questi componenti sono adatti a rettificare fino a parecchi gigaertz.

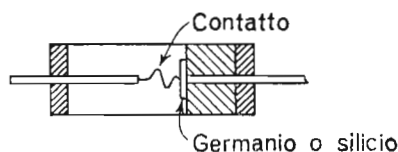



Fig. 2-18. — Il diodo a punta di contatto

2-12. Il diodo Zener.

Se il potenziale inverso su di una giunzione P-N aumenta oltre un certo valore (circa 370 volt per il diodo di fig. 2-15), la corrente aumenterà rapidamente. Alla forte intensità di campo che ne risulta, dell'ordine di 10^7 volt per centimetro, nei diodi che hanno uno strato di transizione molto sottile alcuni elettroni scavalcano la banda proibita, passando dai livelli di valenza della zona P ai livelli di conduzione della zona N. In effetti avviene un fenomeno di *tunnel* per l'elettrone il quale attraversa la barriera come onda pur senza acquistare un'energia sufficiente a scavalcarla come particella. Questo fenomeno è noto come *effetto Zener.*

In giunzioni più spesse, ad alte intensità di campo, si verifica anche un altro fenomeno detto *effetto valanga*; gli elettroni che formano la corrente di saturazione inversa acquistano una energia tale da spezzare i legami covalenti quando urtano con gli atomi. Ciascun elettrone liberato può a sua volta bombardare altri atomi per cui il numero di elettroni, che si libera, aumenta istantaneamente e si ha una corrente che cresce molto rapidamente. Questo modo di liberare elettroni non differisce fisicamente da quello dovuto alla temperatura, per cui esso non è dannoso per il cristallo, se si ha cura di evitare un'eccessiva corrente o una temperatura troppo alta.

Al di là del valore critico del campo, che si chiama *livello di Zener*, benchè sia in relazione con l'effetto valanga, la tensione sulla giunzione rimane praticamente costante ed indipendente dalla corrente. Poichè è possibile controllare le caratteristiche del materiale in modo che il valore critico del campo si verifichi in corrispondenza di un prefissato valore della tensione applicata, fra qualche volt e parecchie centinaia di volt, è diventato comune l'impiego del diodo Zener come elemento a tensione costante.

I regolatori a diodo Zener presentano una resistenza dinamica piuttosto bassa: frazione di ohm per le unità a bassa tensione, qualche centinaio di ohm per quelle ad alta tensione; di conseguenza la corrente può variare di molto, con una piccola variazione della caduta di tensione ai capi del diodo. Si impiegano comunemente circuiti del tipo mostrato in fig. 2-19; la corrente che attraversa il diodo I_z si fissa a circa 2/10 della corrente di carico. Il resistore R si calcola con la formula:

$$R = \frac{E - E_z}{I_L + 0{,}2 I_L} \quad \text{ohm}$$

in cui E_z è il valore della tensione regolata dal diodo, E è la minima tensione di alimentazione che si prevede.

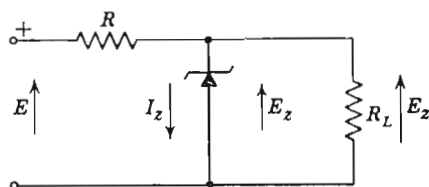



FIG. 2-19. — Impiego del diodo zener per stabilizzare la tensione in un circuito.

All'aumentare della tensione di alimentazione il diodo verrà attraversato da una corrente più elevata, ma la tensione ai suoi capi aumenterà solo di poco; intanto aumenta la caduta RI e la tensione di uscita rimane quasi costante al valore E_z.

Dopo aver calcolato R, occorre calcolare la potenza dissipata nel diodo, data dall'espressione:

$$P = \left(\frac{E - E_z}{R} - I_L\right) E_z \quad \text{watt} \qquad (2\text{-}36)$$

e scegliere un diodo capace di dissipare una potenza più alta in modo da rimanere nei limiti di temperatura previsti.

2-13. Il diodo tunnel.

Nelle giunzioni in cui la barriera, o zona di transizione, è molto sottile, ed in materiali con un' alta concentrazione di impurità, la caratteristica tensione-corrente assume la forma mostrata in fig. 2-20. Di particolare interesse si presenta la regione a pendenza negativa, cioè a resistenza differenziale negativa; materiali nei quali può verificarsi questo fenomeno sono il germanio, il silicio, l'arseniuro di gallio.

Lo spessore della barriera può scendere fino a 100 micron, per cui diventa possibile, per gli elettroni ad alta energia, il fenomeno del tunnellaggio, cioè il passaggio nella parte P di elettroni che posseggono energia inferiore al valore necessario per scavalcare la barriera di potenziale. In questo caso l'elettrone si comporta come un'onda piuttosto che come una particella.

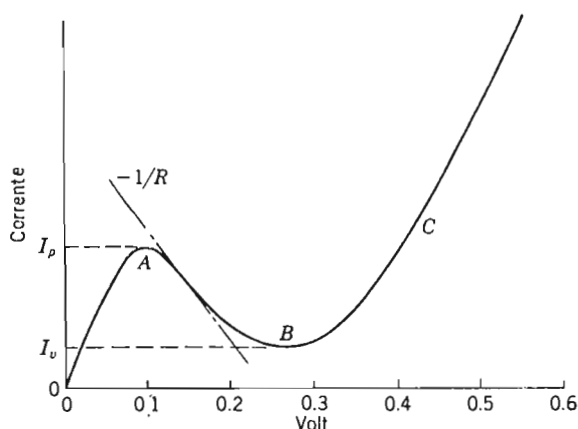



FIG. 2-20. — Caratteristica tensione corrente di un diodo tunnel.

A causa del forte drogaggio dei materiali, nella regione N i livelli più bassi della banda di conduzione saranno completamente occupati da atomi donatori; il livello di Fermi E_M (in corrispondena del quale la probabilità di occupazione è 1/2) si sposterà verso l'alto nella banda di conduzione come in fig. 2-21. Analogamente si comportano gli accettori i quali vuotano i livelli più alti nella banda di valenza del materiale P. Nella giunzione isolata gli elettroni nella banda di conduzione della regione N si trovano affacciati a livelli occupati nella regione P al di là della barriera, per cui non c'è passaggio di cariche. Quando si applica una piccola tensione diretta, la situazione diventa quella mostrata in fig. 2-21b, e gli elettroni della parte N che si trovano di fronte a livelli liberi di P, attraversano per effetto tunnel il sot-

tilissimo strato di transizione ed aumentano la corrente fino al punto A di fig. 2-20. A tensioni più alte, gli elettroni della banda di conduzione si trovano di fronte la banda proibita della regione P; il fenomeno del tunnellaggio cessa e la corrente diminuisce fino a B. Al di sopra del potenziale per cui si ha I_v, cominciano a valere le ordinarie leggi che reggono il comportamento dei diodi e la corrente cresce secondo la solita curva rappresentata da C.

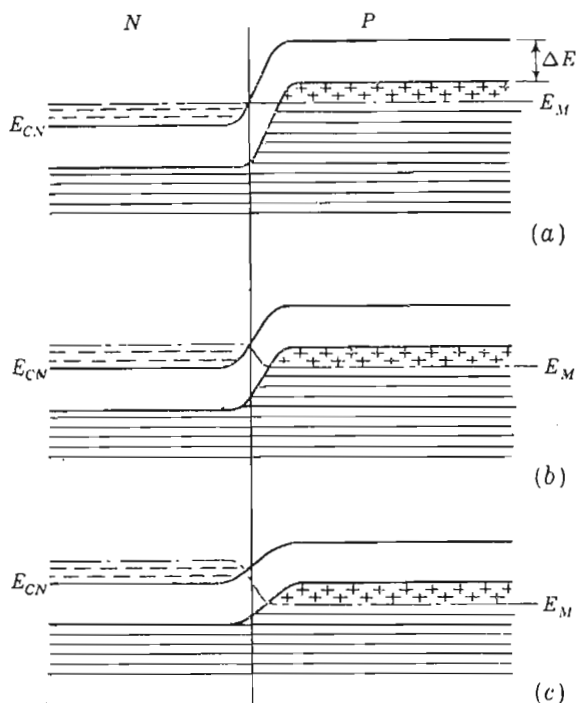



FIG. 2-21. — (*a*) Una giunzione con potenziale applicato nullo; (*b*) giunzione con una piccola polarizzazione diretta; (*c*) giunzione con una elevata polarizzazione diretta.

Il diodo tunnel presenta due proprietà particolarmente importanti: il passaggio della corrente dal valore di *picco* I_p al valore minimo o di *valle* I_v, è estremamente rapido e rende il diodo tunnel adatto come interruttore nel campo delle frazioni di microsecondo o dei nanosecondi (10^{-9} sec). L'altra proprietà è legata alla pendenza negativa della caratteristica nel tratto AB in cui si ha una *resistenza differenziale negativa*; questo componente può allora funzionare da oscillatore o da amplificatore se è posto in un adatto circuito insieme ad elementi convenzionali R, L e C.

Il rapporto fra I_p ed I_v può essere 20 : 1 ed è funzione della temperatura.

Nel germanio, V_p e V_v corrispondono ad una tensione applicata di 55 e 350 mV rispettivamente.

2-14. I termistori.

Nei *termistori* si sfrutta l'alto coefficiente di temperatura della resistività di alcuni semiconduttori per realizzare dei resistori sensibili alla temperatura, da impiegare per compensare le variazioni termiche di altri componenti o per misure di temperatura. Si impiegano miscele di diversi ossidi metallici per ottenere componenti a resistenza variabile nel campo voluto.

Si è trovato che buona parte di questi componenti sono retti da una legge esponenziale del tipo

$$\rho = \rho_0 \varepsilon^{(B/T - B/T_0)} \tag{2-37}$$

In cui T è la temperatura misurata in ^{0}C

$\rho_0 = \rho$ (ohm cm) per $T = T_0 = 0^0$C
B = costante avente le dimensioni di una temperatura.

I termistori vengono costruiti a forma di grani o di bastoncini di diametro fino a 0,015 cm. Possono essere montati negli ordinari circuiti a ponte, e poichè presentano variazioni di resistenza anche di 10^3 in 300^{0}C risultano molto più sensibili dei termometri a resistenza metallica. Impiegando unità ad alta resistenza ed alimentazione in corrente alternata, si può amplificare la tensione di uscita ed eliminare i galvanometri e gli altri strumenti ad alta sensibilità che di solito si impiegano in misure di questo tipo.

2-15. Il transistore a giunzione.

Se un cristallo di germanio o di silicio viene accresciuto in modo da avere due regioni N separate da una regione P molto sottile (0,002 cm), oppure se due regioni P vengono ottenute per fusione su di una piastrina molto sottile di tipo N si ottiene il *transistore* N-P-N o P-N-P mostrato in figura 2-22. Per ragioni di carattere storico, i tre elettrodi che così si ottengono si chiamano *emettitore*, *base* e *collettore*.

In un transistore N-P-N, la giunzione N-P è la giunzione di emettitore ed è ordinariamente polarizzata direttamente, cioè con l'elettrodo N (emettitore) negativo rispetto a quello P. Si abbassa così la barriera di potenziale fra emettitore e base come si vede confrontando la fig. 2-23b con la fig. 2-23a in cui è mostrata la giunzione non polarizzata. Gli elettroni entrano nella regione N dal circuito esterno e quelli a più alta energia oltrepassano la barriera verso la regione P. L'altezza della barriera e quindi il numero di elet-

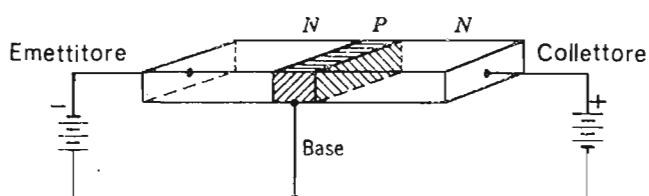
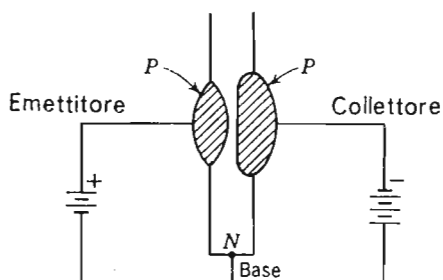
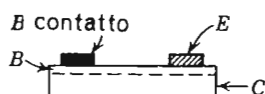
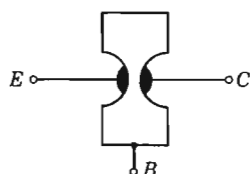



FIG. 2-22. — (*a*) Giunzione P-N-P ottenuta per accrescimento; (*b*) giunzione P-N-P ottenuta per lega; (*c*) costruzione tipo mesa; (*d*) costruzione a barriera superficiale.

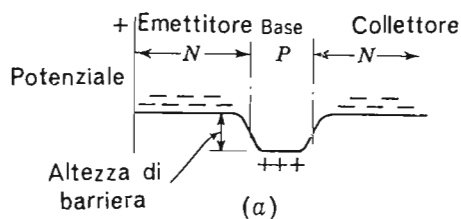
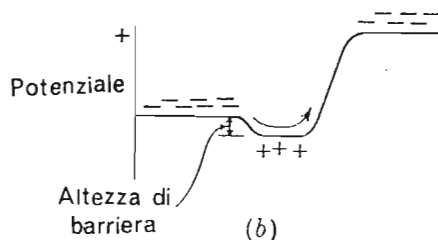



FIG. 2-23. — (*a*) Livelli di potenziale in un transistore N-P-N non polarizzato; (*b*) livelli di potenziale in una unità N-P-N sottoposta ai potenziali di normale funzionamento.

troni che raggiunge la regione P, cioè la base, dipende dal potenziale fra emettitore e base. Nel normale funzionamento, la barriera fra emettitore e base agisce come un filtro di energia per gli elettroni, proprio come la griglia del triodo a vuoto.

Alcuni elettroni si ricombinano con i portatori di carica positiva nella base che è ricca di lacune; tuttavia, se la base è abbastanza sottile, la maggior parte degli elettroni riesce a passare nella regione N di collettore, attirati dal campo favorevole che polarizza inversamente la seconda giunzione: questi elettroni formano la corrente del circuito di collettore. Esiste anche una piccola componente della corrente, costituita da lacune, che fluisce dalla base, di tipo P, verso l'emettitore, come in fig. 2-24a.

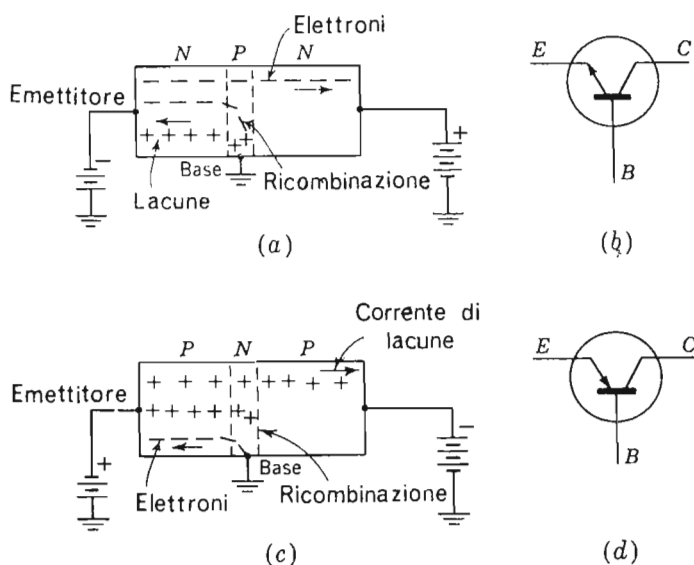



FIG. 2-24. — (a) Funzionamento del transistore NPN; (b) simbolo del transistore NPN; (c) funzionamento del transistore PNP; (d) simbolo del transistore PNP

Se si applica fra emettitore e base un segnale cioè una tensione variabile col tempo, questa modula l'ampiezza della barriera. Varia di conseguenza il numero di elettroni iniettati dall'emettitore ed il numero di lacune provenienti dalla base; di conseguenza varia la corrente di collettore. Il transistore è quindi un dispositivo nel quale una corrente di ingresso controlla una corrente di uscita.

Il rapporto fra la variazione della corrente di collettore Δi_c, corrispondente ad una dàta variazione della corrente di emettitore Δi_e (a tensione emettitore-collettore costante), preso con il segno meno, è detto *fattore di*

amplificazione di corrente emettitore-collettore con uscita in corto circuito; questa quantità che viene indicata comunemente con il simbolo α, è espressa quindi da:

$$\alpha = \left. \frac{-\partial i_c}{\partial i_e} \right]_{v_{cb}=\text{costante}} \tag{2-38}$$

A causa della ricombinazione di alcuni elettroni con le lacune nell'attraversare la base, la variazione di corrente di collettore è circa 0,95-0,99 della variazione di corrente di emettitore; questi sono i valori che normalmente assume α.

Benchè il fattore di amplificazione emettitore-collettore, α, sia minore dell'unità, si ha ugualmente un guadagno di potenza, poichè gli elettroni sono iniettati attraverso l'emettitore in un circuito direttamente polarizzato ed a bassa impedenza, mentre vengono raccolti sul collettore, che è inversamente polarizzato, e quindi su un'impedenza molto più alta.

Altro parametro che indica l'amplificazione di corrente, è il rapporto fra la variazione di corrente di collettore Δi_c e la corrispondente variazione della corrente di base Δi_b, a tensione base-collettore costante. Questa quantità, indicata dal simbolo h_{fe}, è chiamata *fattore di amplificazione di corrente base-collettore ad uscita cortocircuitata* ed è definita come:

$$h_{fe} = \left. \frac{\partial i_c}{\partial i_b} \right]_{v_{ec}=\text{costante}} \tag{2-39}$$

talora si indica questo parametro col simbolo β.

h_{fe} può assumere valori di qualche centinaio. Poichè per definizione è:

$$-\Delta i_c = \alpha \, \Delta i_e$$

e per la corrente di base i_b si ha:

$$\Delta i_b = -\Delta i_e - \Delta i_c = -(1-\alpha)\,\Delta i_e \tag{2-40}$$

Si ricava che:

$$h_{fe} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \beta \tag{2-41}$$

La figura 2-25 illustra il controllo che sulla corrente di collettore esercita la corrente i_B iniettata nella base. La resistenza di ingresso emettitore-base di un transistore assume ordinariamente valori compresi fra 200 e 1000 ohm essendo la giunzione direttamente polarizzata; la resistenza di uscita di collettore avrà invece valori che sono intorno ad 1 Megaohm, poichè la giunzione è inversamente polarizzata.

Si costruiscono anche transistori P-N-P che funzionano con le tensioni di alimentazione invertite di segno e nei quali la conduzione è dovuta preva-

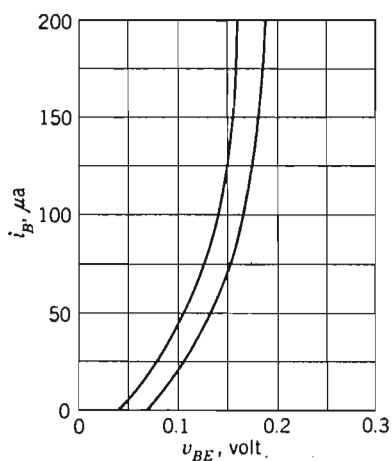
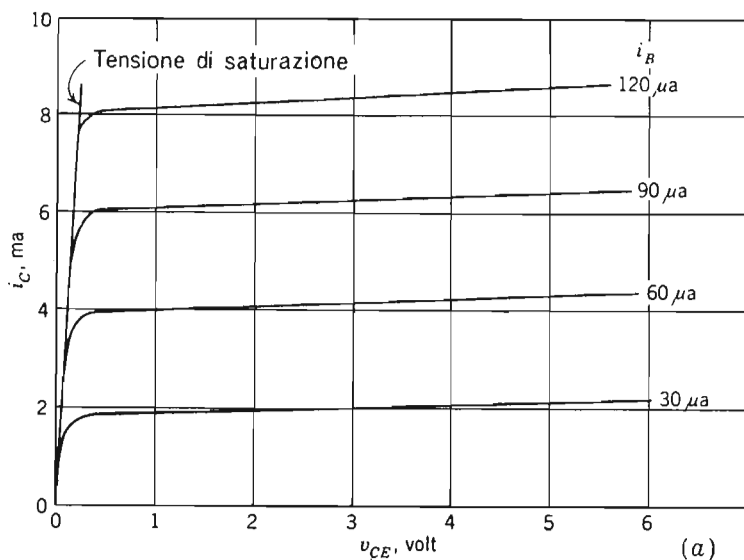



FIG. 2-25. — (*a*) Tipiche caratteristiche di collettore di un transistore; (*b*) caratteristiche di base.

lentemente alle lacune. Per il resto il funzionamento è simile a quello visto per gli N-P-N.

2-16. Simbologia usata per le correnti e le tensioni dei transistori.

In seguito, nell'analisi dei circuiti a transistori, si farà uso della notazione standard facendo solo qualche ulteriore convenzione necessaria per identificare alcuni parametri caratteristici dei transistori.

In fig. 2-26 sono indicate, con lettere minuscole, i valori istantanei, mentre il valore totale di una certa componente ha il pedice maiuscolo, come i_C per il valore istantaneo della corrente totale di collettore. Il valore istantaneo di una componente variabile con il tempo sarà identificato da un pedice minuscolo, per esempio i_c per il valore istantaneo della componente alternativa della corrente di collettore.

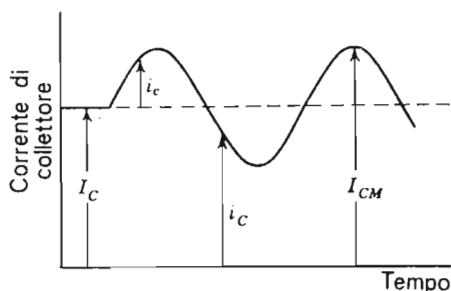



FIG. 2-26. — Simboli usati per le correnti di un transistore.

Quantità costanti o grandezze continue sono indicate da lettere maiuscole con pedice maiuscolo, come I_C; i valori efficaci delle grandezze alternative sono indicate ancora con lettere maiuscole ma con pedice minuscolo. Quindi:

$$i_C = I_C + i_c$$

I valori massimi vengoni indicati dal pedice $_m$ oppure $_M$.

I pedici $_e$ oppure $_E$, $_b$ oppure $_B$, $_c$ oppure $_C$, si riferiscono a grandezze relative all'emettitore, base o collettore rispettivamente. Per indicare un elettrodo o un circuito di riferimento, si aggiungerà un secondo pedice letterale. I valori dei generatori di tensione o di corrente sono indicati dalla ripetizione di un certo pedice; ad esempio V_{EE}, V_{BB}, V_{CC}.

Per le impedenze o resistenze interne, si farà uso di lettere minuscole: r, z, y ed h; per le impedenze esterne si impiegheranno le lettere maiuscole, ad esempio R_E per la resistenza del circuito di emettitore.

I parametri generici dei circuiti saranno indicati da pedici numerici: $_{11}$, $_{12}$, $_{21}$ e $_{22}$ che derivano dalla simbologia in uso nella teoria delle matrici; quando ci si riferisce ai parametri interni del transistore, si preferisce però

usare le lettere minuscole $_i$, $_r$, $_f$, ed $_o$ come primo pedice, le quali sono ancora legate ad una determinata posizione nella matrice e cioè:

$$\begin{vmatrix} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{vmatrix}$$

Si può aggiungere una seconda lettera minuscola $_e$, $_b$, $_c$, per indicare il tipo di circuito o l'elettrodo di riferimento. In tal modo i parametri del circuito sono designati da simboli del tipo r_{ic}, z_{ob}, h_{fe}.

Con l'uso, questi simboli diventeranno familiari.

2-17. Le curve caratteristiche del transistore.

In fig. 2-25a, è mostrata una tipica famiglia di caratteristiche che legano la corrente di collettore alla tensione emettitore-collettore per vari valori della corrente di base. Queste curve rappresentano le relazioni corrente-tensione nella regione di contropolarizzazione in cui si verifica l'effetto transistore. In fig. 2-25b è mostrata invece la relazione fra la corrente di base e la tensione base-emettitore; essa è importante per lo studio del circuito di ingresso.

La pendenza delle curve di fig. 2-25a rappresenta l'inverso della resistenza di uscita del transistore, $1/r_{oe}$; la pendenza è piccolissima il che indica che r_{oe} è molto grande.

In un transistore, la regione lineare va fino a livelli molto bassi della tensione applicata; nel caso di fig. 2-25a, fino a circa 0,2 volt. Questo valore è detto *tensione di saturazione*.

Nello studio del funzionamento del transistore con grandi segnali di ingresso, si fa uso di entrambe queste famiglie di curve e si impiegano gli stessi metodi grafici già visti per il triodo a vuoto; tuttavia, a causa della ampia regione in cui il transistore è lineare, per studiare il funzionamento si preferisce di solito ricorrere a circuiti equivalenti lineari. Nei prossimi capitoli, verranno sviluppati i circuiti equivalenti ordinari e ci si servirà di essi per l'analisi dei principali circuiti a transistori.

2-18. Il transistore ad effetto di campo.

In fig. 2-27 è mostrato lo schema di un ulteriore tipo di dispositivo a semiconduttore noto come *transistore ad effetto di campo* o FET (iniziali del nome inglese del dispositivo: Field Effect Transistor).

Si tratta di due diodi P-N ottenuti per lega di impurità di tipo P ai lati opposti di una sottile barretta di silicio di tipo N. Questi diodi, essendo inversamente polarizzati, danno origine a regioni prive di cariche libere, indi-

cate tratteggiate in figura, che risultano non conduttrici, salvo che per i pochi portatori intrinseci, si ha così una diminuzione della conduttanza del *canale* che unisce l'elettrodo *sorgente* all'elcttrdo detto *pozzo.* All'aumentare della polarizzazione inversa aumenta l'ampiezza della zona non conduttrice e diminuisce in conseguenza la corrente. Quando la tensione inversa è così grande, che le due zone prive di cariche libere si uniscono, il canale viene *strozzato* come è indicato in fig. 2-27c dalle curve appiattite.

In fig. 2-27b è mostrato un FET del tipo semiconduttore-ossido-metallo (MOS); in esso, l'elettrodo di controllo è isolato dal canale da un sottile strato di biossido di silicio depositato direttamente sul silicio. L'elettrodo di controllo genera nel canale una regione priva di cariche, riducendone così la parte conduttrice e quindi la conduttanza.

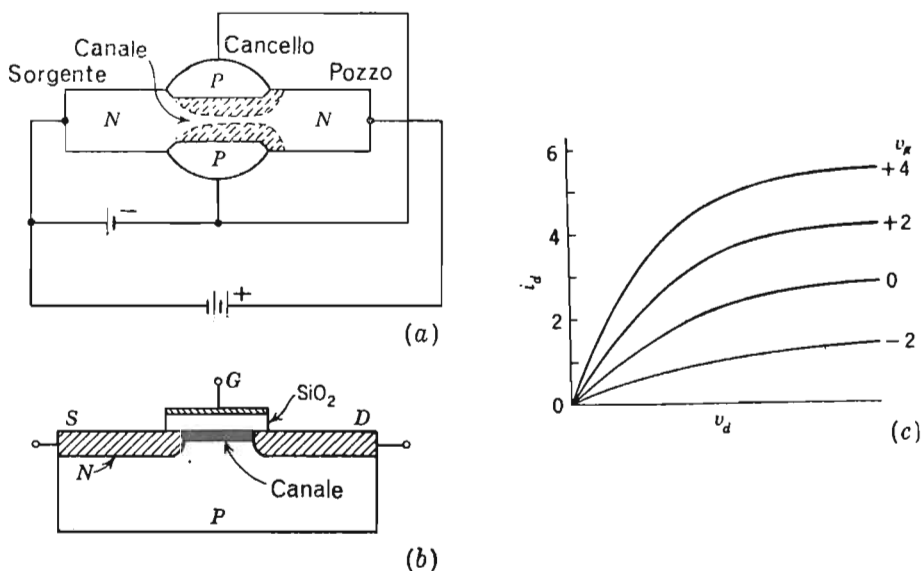



Fig. 2-27. — (*a*) Un transistore FET di vecchio tipo; (*b*) un FET costruito con ossido-metallo semiconduttore (M.O.S.); (*c*) caratteristiche del transistore (*b*).

Il transistore ad effetto di campo, se del tipo MOS, ha una impedenza di ingresso dell'ordine dei 100 megaohm. Le sue caratteristiche sono molto simili a quelle di un pentodo ed in effetti è adatto a sostituirlo in alcune applicazioni. È particolarmente importante il basso rumore di questo dispositivo cioè il basso livello della corrente casualmente variabile. Il rumore di un transistore a giunzione è dovuto alla irregolare ricombinazione che avviene nella base; nel FET, il controllo avviene attraverso un campo elettrico non attraverso un flusso di particelle cariche e la corrente si muove come in un ordinario conduttore.

2-19. Costruzione dei transistori.

Il metodo di fabbricazione per accrescimento consiste nell'accrescere un cristallo, a partire da germanio o silicio fusi, aggiungendo delle quantità controllate di impurità N o P. Per formare la giunzione di un diodo, occorre cambiare rapidamente le caratteristiche della base fusa da N a P aggiungendo delle quantità di impurità tali che prevalgano su quelle presenti in precedenza.

Per realizzare un transistore basta poi aggiungere altre impurità per invertire di nuovo le caratteristiche del semiconduttore fuso.

Le giunzioni P-N-P a lega sono formate fondendo delle piccole sferette di indio o di gallio da ciascun lato di una sottile piastrina di germanio o silicio di tipo N. La giunzione si forma, da ciascun lato, nella zona fusa fra la sferetta di impurità e la base; la parte restante di indio o di gallio serve da contatto ohmico per l'emettitore ed il collettore. In figura 2-22 sono illustrati alcuni esempi.

I transistori diffusi (planari o mesa) si costruiscono diffondendo ad alta temperatura delle impurità in lastrine di germanio o silicio di tipo N o P. La diffusione si può eseguire depositando uno strato di impurità N o P sulla lastrina, prima di riscaldarla, oppure si può fare avvenire direttamente ad alta temperatura.

Negli ordinari componenti ottenuti per diffusione, le zone attive del transistore sono comprese in uno strato spesso solo qualche decimillesimo di centimetro; le dimensioni del collettore sono naturalmente molto più elevate per avere la necessaria consistenza meccanica.

Il rimanente materiale ha caratteristiche identiche a quelle dello strato utile ed entra in gioco nel funzionamento immagazzinando cariche durante la conduzione. Queste cariche vengono poi restituite al circuito esterno e formano delle code agli impulsi ed alle altre forme d'onda al momento della interdizione della corrente. Questo eccesso di materiale può essere ad alta resistività, in tal caso si aggiunge una apprezzabile resistenza serie a quella di saturazione del transistore.

Un recente processo, con il quale si cerca di ovviare a queste difficoltà, si fonda sull'impiego di un sottile strato di semiconduttore ottenuto per deposizione dalla fase vapore su di una lastrina dello stesso materiale iniziale ma con differente contenuto di impurità (fig. 2-28). Lo strato depositato è dunque di diversa resistività ed è quello che determina le caratteristiche del transistore; il substrato ha solo la funzione di elettrodo e di supporto meccanico. Questo è il processo *epitassiale*; in esso il cristallo viene accresciuto utilizzando idrogeno che trasporta un composto del semiconduttore in fase vapore; gli atomi del cristallo epitassiale sono orientati

secondo il reticolo del substrato, ma le sue proprietà elettriche sono determinate dal suo contenuto di impurità.

Nei dispositivi epitassiali il materiale eccedente, che serve da supporto meccanico, può essere pesantemente drogato in modo da avere una bassa resistività, mentre lo strato epitassiale, che viene formato indipendentemente da questo, può essere molto meno drogato in modo che la zona di collettore sia ad alta resistività; il che riduce la possibilità che si verifichi il fenomeno di valanga. Sullo strato epitassiale di collettore, si diffonde poi la base attraverso una maschera, a cui segue la diffusione dell'emettitore nella base attraverso una seconda maschera, come è mostrato in fig. 2-28.

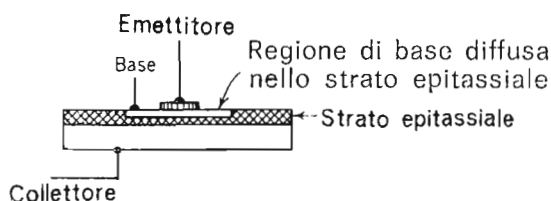



FIG. 2-28. — Costruzione epitassiale.

La tecnica della mascheratura, insieme al processo epitassiale ed all'attacco con acidi per eliminare il materiale in eccesso da alcune zone, consente la fabbricazione di diodi e transistori molto piccoli, le cui aree attive possono essere pochi centesimi di centimetro quadrato. Inoltre è possibile creare, ove occorre, delle zone isolanti depositando una pellicola di biossido di silicio direttamente sulla superficie del silicio.

2-20. Circuiti integrati.

Quando è sorta la necessità di circuiti elettronici sempre più piccoli e complessi si è visto che si potevano applicare queste tecniche di deposizione e di incisione a interi circuiti comprendenti resistori e condensatori oltre che gli elementi attivi.

Il silicio, o una sua lega, depositato sotto forma di strato molto sottile e stretto funge da resistore; una giunzione P-N inversamente polarizzata, da condensatore. È anche possibile depositare del biossido di silicio su di un supporto di silicio per formare un dielettrico; un ulteriore elettrodo metallico viene poi depositato al disopra del dielettrico in modo da formare un dispositivo di grande capacità per unità di superficie ed il cui valore non dipende dalla tensione applicata. Materiali a più bassa resistività, depositati

anche essi attraverso delle maschere, fanno da conduttori di collegamento eliminando le connessioni saldate.

Ove occorre si può realizzare l'isolamento mediante strati di biossido di silicio. La separazione delle varie parti si può realizzare anche con la tecnica della giunzione isolata come, ad esempio, fra gli strati N ed il supporto di tipo P in fig. 2-29. Il biossido di silicio viene anche usato come strato protettivo inerte per sigillare gli strati superficiali i quali altrimenti darebbero luogo ad effetti anormali dovuti alle cariche superficiali.

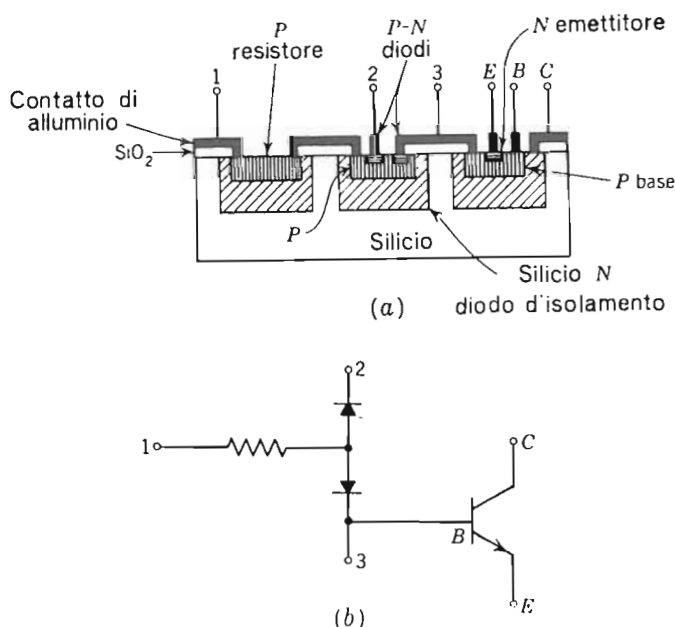



FIG. 2-29. — (a) Un circuito integrato; (b) il suo schema elettrico.

Con questi metodi è possibile costruire interi circuiti risultanti dalla integrazione di tanti elementi di circuito come diodi, transistori, resistori e condensatori tutti riuniti in un solo blocco. Si riescono a realizzare dimensioni ridottissime; un circuito completo può occupare solo 0,1 cm². Nessuna connessione interna viene eseguita da operatori umani, il che aumenta sensibilmente la affidabilità del circuito; ciò si ottiene diffondendo, attraverso maschere, materiali a bassa resistività con funzioni di terminali.

Un tipico esempio di rete contenente diodi e transistori è mostrata in fig. 2-29.

TABELLA 6

Materiale	ΔE, *ev*	μ_n, *m²/volt-sec*	μ_p, *m²/volt-sec*
GaAs	1,4	1,00	0,04
GaSb	0,68	0,40	0,14
AlSb	1,6	$>0,04$	$>0,04$
AlAs	2,16	0,12	0,02
InAs	0,33	3,3	0,046
InSb	0,18	8,0	0,10
InP	1,25	053	0,015
CdS	2,4	0,02	
$ZnGeAs_2$	$0,6 < \Delta E < 1,1$		
$CdSnAs_2$		$>0,56$	

2-21. Futuri sviluppi.

Nel silicio e nel germanio, ogni atomo ha quattro elettroni di valenza ed è circondato da altri quattro atomi disposti ai vertici di un tetraedro. Ogni elettrone è in comune a due atomi e forma un legame covalente. Le proprietà elettriche dei semiconduttori sono dovute soprattutto a questo tipo di legame fra gli atomi del cristallo tetraedrico.

Il rapporto di 4 : 1 fra elettroni di valenza ed atomi e la disposizione tetraedrica, costituiscono una guida per la ricerca di altri materiali semiconduttori. Per esempio, gli atomi del III gruppo del sistema periodico con tre elettroni di valenza si possono combinare con atomi del V gruppo, con 5 elettroni di valenza, formando dei semiconduttori composti con rapporto fra atomi ed elettroni di 8 : 2 cioè 4 : 1. Alcuni di questi composti, con proprietà interessanti, sono l'arseniuro di gallio e l'antimoniuro di indio; il primo è importante per diodi tunnel e Laser nell'infrarosso, il secondo presenta una mobilità degli elettroni straordinariamente alta come è mostrato nella tabella 6.

Ugualmente è possibile combinare elementi dei gruppi II e VI formando composti quali CdSe ed il CdTe. Una ultima estensione della regola del 4 : 1 è data dai composti ternari come $ZnGeAs_2$ e $CdSnAs_2$, quest'ultimo dotato di alta mobilità per gli elettroni.

Molti di questi composti presentano mobilità e bande proibite di ampiezza adatta, oppure sono impiegabili a temperature molto discoste da buella ambiente. Le future ricerche porteranno a nuove applicazioni nella fotoelettricità, termoelettricità ed in altri campi.

PROBLEMI

2-1. Usando la relazione di Fermi-Dirac, calcolare e disegnare la distribuzione statistica delle energie fra gli elettroni del silicio intrinseco, in cui $N = 5{,}2 \times 10^{22}$, a 0°K ed a 300°K.

2-2. Calcolare il numero di coppie elettrone-lacuna generate in un centimetro cubico di germanio, supponendo che la mobilità degli elettroni sia 0,39 m^2/volt · sec, che la mobilità delle lacune sia 0,19 m^2/volt · sec, e che a 75°C il campione intrinseco abbia una resistività di 0,15 ohm · m.

2-3. Ripetere il problema 2-2 per silicio di resistività intrinseca 0,1 ohm · m a 100°C usando i valori di mobilità della tabella 5.

2-4. Un campione di germanio è drogato con antimonio. Calcolare la conduttività del materiale a 25°C sapendo che c'è 1 atomo di antimonio per 10^7 atomi di germanio, si suppongano tutti i donatori ionizzati e le mobilità, per gli elettroni e le lacune, uguali a quelle del problema 2-2.

2-5. Si è aggiunto del gallio al germanio in modo da creare un campione di resistività 0,015 ohm. · m. Trascurando la conduzione intrinseca, calcolare il numero di atomi di gallio presenti per ogni atomo di germanio sapendo che $N = 4{,}5 \cdot 10^{22}$ atomi per m^3 per il germanio. Supporre che tutti gli accettori siano ionizzati.

2-6. Ripetere il problema 2-5 per il silicio; la resistività sia 1,5 ohm · m, $N = 5{,}2 \cdot 10^{22}$ e le mobilità quelle della tabella 5.

2-7. Calcolare le curve tensione corrente, diretta ed inversa, per una giunzione P-N nel germanio che abbia una corrente di saturazione inversa di 100μA, a 25°C.

2-8. Il rapporto di rettificazione si definisce come rapporto fra corrente diretta ed inversa ad una data tensione. Calcolare questo rapporto per il diodo del problema 2-7 ad una tensione di 0,2 volt.

BIBLIOGRAFIA

1. Seitz F.: "The Modern Theory of Solids", McGraw-Hill Book Company, New York, 1940.
2. Shockley W.: The theory of P-N Junctions in Semiconductors and P-N Junction Transistors, *Bell System Tech. J.*, **29:** 435 (1949).
3. Cornelius E C.: Germanium Crystal Diodes, *Electronics*, **19:** 118 (February, 1946).
4. Torrey H. C., e Whitmer C. A.: "Crystal Rectifiers", McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
5. Hall R. N.: Germanium Rectifier Characteristics, *Phys. Rev.*, **83:** 228 (July, 1951).
6. Bardeen J., e Brattain W. H.: The Transistor, a Semiconductor Triode, *Phys. Rev.*, **74:** 230 (1948).
7. Bardeen J., e Brattain W. H.: Conductivity of Germanium, *Phys. Rev.*, **75:** 1216 (1949).
8. *Proc. IRE*, Special Issues on Transistors, **40:** 1283-1632 (1952); **46:** 947-1346 (1958).
9. *Proc. IRE*, Special Issue on Solid-state Materials, **43:** 1701-2000 (1955).

10. LATROP J. W., LEE R. E., e PHIPPS C. H.: Multivibrator Functional Electronic Blocks, *Electronics*, **33:** 69 (1960).
11. SELVIN G. J.: The Sylvania Microminiature Module, *Proc. Electron. Components Conf.*, **46** (1960).
12. KECK P. H., e GOLAY M. J. E.: Crystallization of Silicon from a Floating Liquid Zone, *Phys. Rev.*, **89:** 1297 (1953).
13. PHILLIPS A. B.: Monolithic Integrated Circuits, *IEEE Spectrum*, **1:** 83 (June, 1964).
14. ESAKI L.: New Phenomenon in Narrow Ge PN Junctions, *Phys. Rev.*, **109:** 603 (1958).
15. EIMBINDER J.: The Field-effect Transistor: A Curiosity Comes of Age, *Electronics*, **38:** 46 (Nov. 30, 1964).

CAPITOLO III

TIPI FONDAMENTALI DI AMPLIFICATORE

Il principale impiego dei componenti attivi si ha nella amplificazione dei segnali elettrici; le prestazioni del componente attivo dipendono dal tipo di circuito scelto e dai componenti circuitali ad esso associati. In questo capitolo gli elementi attivi verranno considerati lineari e si mostrerà che è possibile applicare ad essi gli ordinari metodi di analisi dei circuiti lineari.

3-1. L'amplificatore ideale.

L'amplificatore è una *sorgente di energia controllata*, con uscita proporzionale o controllata dal segnale di ingresso variabile, come è indicato in fig. 3-1. L'esistenza di una proporzionalità fra l'uscita e l'ingresso variabile, implica un accoppiamento fra i due circuiti ed un'amplificazione o *guadagno* del segnale di uscita rispetto a quello di ingresso.

Un amplificatore ideale dovrebbe avere una relazione lineare fra ingresso ed uscita ed il suo guadagno dovrebbe essere indipendente dall'ampiezza del segnale. Il transistore ed il tubo a vuoto, che sono le ordinarie sorgenti controllate usate in elettronica, si avvicinano molto a queste caratteristiche ideali quando funzionano in circuiti ben progettati.

La proporzionalità fra ingresso ed uscita dipende da parecchi parametri che vanno opportunamente scelti. In condizione di regime e con segnale di ingresso sinusoidale, la relazione fra le ampiezze dei segnali di ingresso e di uscita è data dal *guadagno A* che è definito come rapporto fra l'ampiezza dell'uscita e quella dell'ingresso.

Nel caso delle tensioni si ha:

$$A(\omega) = \frac{|E_o|}{|E_i|} \tag{3-1}$$

Accanto a questa esiste una relazione fra le fasi

$$\varphi = \text{angolo di } \frac{E_o}{E_i} \tag{3-2}$$

I vari tipi di guadagno come quello di tensione, di corrente o di potenza, vengono indicati da pedici; per esempio A_v, A_i, A_p.

Quando il guadagno è espresso come rapporto fra le ampiezze dei segnali di uscita e di ingresso ed in ingresso è applicata una frequenza complessa s del tipo Ke^{st}, allora si ha:

$$G(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} \tag{3-3}$$

ove G(s) è detta *funzione di trasferimento* ed è utile per descrivere il funzionamento del circuito durante il transitorio.

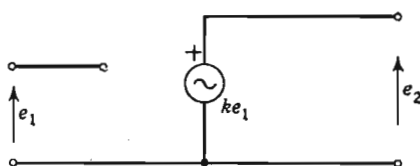



FIG. 3-1. — Una sorgente di energia controllata.

L'impiego pratico di una sorgente controllata in condizioni di risposta lineare è ordinariamente indicato come *funzionamento in classe A*. Per definizione il funzionamento in classe A si ha quando il dispositivo lavora nella zona lineare della caratteristica dinamica, oppure quando il segnale è abbastanza piccolo da interessare solo zone a pendenza costante della curva; inoltre, nel dispositivo funzionante in classe A passerà sempre corrente.

3-2. Il guadagno espresso in decibel.

Il ricevitore finale per molte apparecchiature elettroniche è l'orecchio, il quale sente le intensità sonore in scala logaritmica; per questo è opportuno impiegare delle unità logaritmiche per misurare il guadagno di un amplificatore e la sua potenza in uscita.

È stata definita un'unità per la misura logaritmica di *rapporti fra potenze* ed è stata chiamata *bel* da Alexander Graham Bell. Si è poi visto che conveniva una unità uguale alla decima parte della precedente, che è stata denominata *decibel*:

$$\text{Numero di decibel} = \text{db} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \tag{3-4}$$

Il decibel misura rapporti fra potenze, non potenze assolute; tuttavia, se si adotta una certa potenza come riferimento cioè un *livello di zero* per P_1, allora si ha una misura assoluta delle potenze cioè una indicazione di

quanti decibel si è al disopra o al disotto del livello di riferimento. Sono stati proposti un gran numero di livelli di riferimento; il più comune è quello di 1mw = 0,001 watt.

Se l'ingresso e l'uscita vengono misurati ai capi di resistenze eguali, dalla definizione di potenza si ha:

$$\text{Numero di decibel} = 10 \log \frac{E_2^2}{E_1^2} = 20 \log \frac{E_2}{E_1} \qquad (3\text{-}5)$$

Anche se non è corretto, è invalso l'uso di definire un guadagno di tensione in decibel, riferendosi al guadagno in tensione ed usando l'equazione 3-5:

$$\text{Guadagno di tensione in decibel} = 20 \log \frac{E_o}{E_i} = 20 \log A \qquad (3\text{-}6)$$

senza tener conto del fatto che l'ingresso e l'uscita potrebbero non essere misurate ai capi di resistenze uguali. Per distinguere fra il guadagno in potenza espresso in decibel ed il guadagno di tensione anch'esso espresso in decibel, quest'ultimo va indicato con il simbolo dbv.

Ovviamente il segno negativo indica una perdita di potenza.

Un sistema di amplificatori disposti in cascata, presenta un guadagno dato da:

$$A = A_1/\underline{\theta_1} \times A_2/\underline{\theta_2} \times A_3/\underline{\theta_3} \ldots = A_1A_2A_3 \ldots /\underline{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots}$$

Il logaritmo del guadagno è:

$$\log A = \log A_1 + \log A_2 + \log A_3 + \ldots$$

allora sarà:

$$\text{Guadagno totale in dbv} = \text{dbv}_1 + \text{dbv}_2 + \text{dbv}_3 + \ldots \qquad (3\text{-}7)$$

Uno dei vantaggi connessi dall'uso del decibel è appunto la facile valutazione del guadagno complessivo, ottenuta sommando i singoli guadagni espressi in decibel.

Esempio 1 — *L'uscita di un amplificatore è 3,5 watt e 7 watt in due diverse condizioni. Determinare, in ciascun caso, il livello dell'uscita in decibel riferito al valore di 0,001 w.*

Nella prima condizione di funzionamento si ha:

$$10 \log \frac{3,5}{0,001} = 10 \times 3,544 = 35,44 \text{ db}$$

nella seconda condizione:

$$10 \log \frac{7,0}{0,001} = 10 \times 3,845 = 38,45 \text{ db}$$

Cioè il raddoppiarsi della potenza ha aumentato di 3,01 *db il valore in decibel.*

Esempio 2 — *L'ingresso di un amplificatore è* 0,01 *volt ed in uscita si ottengono* 2,17 *volt. Determinare il guadagno, in decibel, di questo amplificatore:*

$$20 \log \frac{2,17}{0,01} = 20 \times 2,336 = 46,72 \text{ db}$$

3-3. Le equazioni quadripolari.

Nell'analisi dei circuiti elettrici in condizioni stazionarie, si usa spesso rappresentare i circuiti mediante una rete, con due coppie di terminali, detta *quadripolo.* In figura 3-2 è rappresentata una rete elettrica, non determinata, come una scatola con due coppie di terminali 1,1 e 2,2. Convenzionalmente si assegna a questi terminali una corrente diretta verso l'interno della scatola, cosicchè ciascuna coppia può funzionare sia da ingresso che da uscita senza che si modifichi l'analisi del quadripolo.

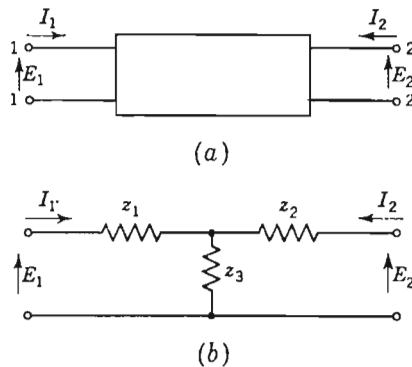



FIG. 3-2. — (*a*) Un quadripolo con le relative convenzioni per le tensioni e le correnti; (*b*) l'equivalente a T di (*a*).

Una volta determinate le ampiezze e le fasi di $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{E}_2$ ed $\mathbf{I}_2$ ad una data frequenza, il quadripolo è perfettamente individuato e può essere simulato con un circuito equivalente a **T** o a π come in fig. 3-2b. Il quadripolo interno può essere attivo o passivo, purché esso sia lineare e bilaterale.

Si possono scegliere, in maniera arbitraria, due variabili indipendenti, fra quelle relative ai quattro terminali del quadripolo e scrivere sei coppie di equazioni, tre sole delle quali sono frequentemente usate nello studio dei

componenti elettronici attivi. Per esempio si possono scegliere come grandezze indipendenti le correnti di fig. 3-2; allora si hanno le equazioni:

$$E_1 = f(I_1, I_2) \quad (3\text{-}8)$$
$$E_2 = f(I_1, I_2) \quad (3\text{-}9)$$

La rete bilaterale, che è nella scatola, può allora essere sostituita da una rete equivalente a **T** come in fig. 3-2b ed è possibile esplicitare nel modo seguente le equazioni precedenti:

$$E_1 = (z_1 + z_3)I_1 + z_3 I_2$$
$$E_2 = z_3 I_1 + (z_2 + z_3)I_2$$

Queste equazioni assumono maggiore generalità se vengono scritte nella forma * :

$$E_1 = z_i I_1 + z_r I_2 \quad (3\text{-}10)$$
$$E_2 = z_f I_1 + z_o I_2 \quad (3\text{-}11)$$

Questa relazione è fondamentale per ogni quadripolo. Nei quadripoli passivi si trova $\mathbf{z}_r = \mathbf{z}_f$; questa simmetria non è verificata per i circuiti contenenti componenti attivi.

Le equazioni (3-10) e 3-11) postulano l'esistenza di un gruppo di *parametri di impedenza* **z** adatti a descrivere il funzionamento del quadripolo generico. Questi parametri possono essere definiti e legati ai parametri effettivamente esistenti all'interno della scatola, eseguendo una serie di misure di ampiezza e fase in corrispondenza dei terminali del quadripolo. Sono preferibili le determinazioni eseguite a circuito aperto. Applicando la condizione $\mathbf{I}_2 = 0$ alle equazioni (3-10) e (3-11) si definiscono le impedenze $\mathbf{z}_i$ e $\mathbf{z}_f$. La condizione $\mathbf{I}_1 = 0$ consente la definizione di $\mathbf{z}_r$ e di $\mathbf{z}_o$. Queste definizioni sono:

$$\left.\begin{aligned}
z_i &= \frac{E_1}{I_1} = \text{impedenza di ingresso} && I_2 = 0\\
z_r &= \frac{E_1}{I_2} = \text{impedenza di trasferimento inversa} && I_1 = 0\\
z_f &= \frac{E_2}{I_1} = \text{impedenza di trasferimento diretta} && I_2 = 0\\
z_o &= \frac{E_2}{I_2} = \text{impedenza di uscita} && I_1 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}12)$$

---

* Spesso nella teoria delle reti ed in alcuni lavori sui transistori, i pedici dei parametri sono 11, 12, 21, 22. Nel « Dizionario dei termini e dei simboli elettronici » dell'IRE (1961) si preferisce la simbologia letterale che verrà adottata in questo libro. Questa simbologia consente di indicare l'elettrodo comune del circuito mediante un secondo pedice letterale.

Si possono anche scegliere, come variabili indipendenti, le tensioni ed allora si ha:

$$I_1 = f(E_1,E_2)$$
$$I_2 = f(E_1,E_2)$$

Con procedimento analogo al precedente, le equazioni che definiscono il quadripolo diventano:

$$I_1 = y_i E_1 + y_r E_2 \qquad (3\text{-}13)$$
$$I_2 = y_f E_1 + y_o E_2 \qquad (3\text{-}14)$$

La determinazione dei *parametri di ammettenza* **y** si può eseguire mediante misure in corto circuito, si ottengono così i seguenti *parametri di corto circuito*:

$$y_i = \frac{I_1}{E_1} = \text{ammettenza di ingresso} \qquad E_2 = 0$$
$$y_r = \frac{I_1}{E_2} = \text{ammettenza di trasferimento inversa} \qquad E_1 = 0$$
$$y_f = \frac{I_2}{E_1} = \text{ammettenza di trasferimento diretta} \qquad E_2 = 0 \qquad (3\text{-}15)$$
$$y_o = \frac{I_2}{E_2} = \text{ammettenza di uscita} \qquad E_1 = 0$$

La scelta di $\mathbf{I_1}$ ed $\mathbf{E_2}$ come parametri indipendenti, non è ovvia, ma presenta dei notevoli vantaggi pratici; si ha in tal caso:

$$E_1 = f(I_1,E_2)$$
$$I_2 = f(I_1,E_2)$$

da cui seguono le seguenti relazioni generali del quadripolo:

$$E_1 = h_i I_1 + h_r E_2 \qquad (3\text{-}16)$$
$$I_2 = h_f I_1 + h_o E_2 \qquad (3\text{-}17)$$

Per misurare questi parametri *h*, occorre eseguire misure sia a circuito aperto che in corto circuito; di qui il nome di *parametri ibridi*, definiti come segue:

$$h_i = \frac{E_1}{I_1} = \text{impedenza di ingresso} \qquad E_2 = 0$$
$$h_r = \frac{E_1}{E_2} = \text{amplificazione di tensione inversa} \qquad I_1 = 0$$
$$h_f = \frac{I_2}{I_1} = \text{amplificazione di corrente diretta} \qquad E_2 = 0 \qquad (3\text{-}18)$$
$$h_o = \frac{I_2}{E_2} = \text{ammettenza di uscita} \qquad I_1 = 0$$

C'è da osservare che h_i è un'impedenza, h_o un'ammettenza, h_r ed h_f sono adimensionali.

3-4. Le equazioni quadripolari per il transistore.

Il transistore è un dispositivo a tre elettrodi, per cui uno di essi deve essere comune all'ingresso ed all'uscita perchè esso funzioni come un quadripolo. La scelta dell'elettrodo comune porta a sei tipi possibili di circuiti, tre soli dei quali sono utilizzati, e precisamente quelli a base comune, ad emettitore comune ed a collettore comune. In figura 3-3 sono illustrati questi tre modi fondamentali di collegare un transistore. Il funzionamento di un transistore, visto come quadripolo, può dunque essere definito in termini delle ampiezze e delle fasi delle correnti e delle tensioni degli elettrodi rispetto a quello assunto come riferimento. In effetti, solo quattro di queste variabili sono indipendenti e quindi necessarie per risolvere il quadripolo.

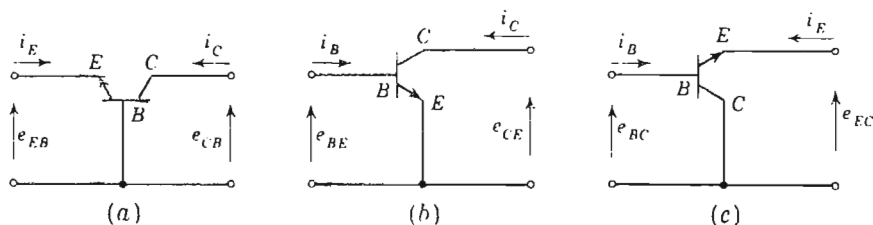



FIG. 3-3. — (*a*) Circuito a base comune; (*b*) ad emettitore comune; (*c*) a collettore comune.

Come esempio si può studiare il circuito a base comune di fig. 3-3 a. Scegliendo come variabili indipendenti i_E ed e_{CB}, allora, analogamente al paragrafo precedente si può scrivere:

$$e_{EB} = f(i_E, e_{CB})$$
$$i_C = f(i_E, e_{CB})$$

Spiegheremo ora in breve, le ragioni di questa scelta, la quale porta ad usare i parametri *h*.

Nel funzionamento dei transistori sono importanti le variazioni di corrente e tensione dovute a variazioni del segnale di ingresso, non le loro ampiezze in assoluto. Eseguendo la derivata delle relazioni generali ora scritte, per ottenere le variazioni dovute a variazioni del segnale di ingresso, si ottiene:

$$de_{EB} = \frac{\partial e_{EB}}{\partial i_E} di_E + \frac{\partial e_{EB}}{\partial e_{CB}} de_{CB} \qquad (3\text{-}19)$$

$$di_C = \frac{\partial i_C}{\partial i_E} di_E + \frac{\partial i_C}{\partial e_{CB}} de_{CB} \qquad (3\text{-}20)$$

Limitandosi al funzionamento in una regione lineare, o a pendenza costante, delle caratteristiche del transistore, oppure se si considerano segnali di ingresso sufficientemente piccoli, le derivate parziali diventano delle costanti. Supponendo inoltre che si abbiano segnali sinoidali, appare chiara la somiglianza fra le equazioni ora scritte e le (3-16) e (3-17).

È possibile dunque applicare al transistore le equazioni generali dei quadripoli scritte in precedenza e scrivere le (3-19) e (3-20) come segue:

$$E_{eb} = h_{ib} I_c + h_{rb} E_{cb} \qquad (3\text{-}21)$$

$$I_c = h_{fb} I_e + h_{ob} E_{cb} \qquad (3\text{-}22)$$

In cui **E** ed **I** sono valori efficaci, e h_{ib}, h_{rb}, h_{fb}, h_{ob}, sono definiti dalla (3-18) oppure dalle relazioni:

$$\begin{aligned} h_{ib} &= \left.\frac{E_{eb}}{I_e}\right]_{E_{cb}=0} & h_{rb} &= \left.\frac{E_{eb}}{E_{cb}}\right]_{I_e=0} \\ h_{fb} &= \left.\frac{I_c}{I_e}\right]_{E_{cb}=0} & h_{ob} &= \left.\frac{I_c}{E_{cb}}\right]_{I_e=0} \end{aligned} \qquad (3\text{-}23)$$

La regione di caratteristiche in cui è verificata l'ipotesi di linearità è notevole, come è dimostrato dalla tipica famiglia di fig. 3-4. La pendenza di queste curve è espressa da $\partial i_c/\partial e_{cB}$ ossia h_{oe}; ne segue che la conduttanza h_{oe} è molto piccola.

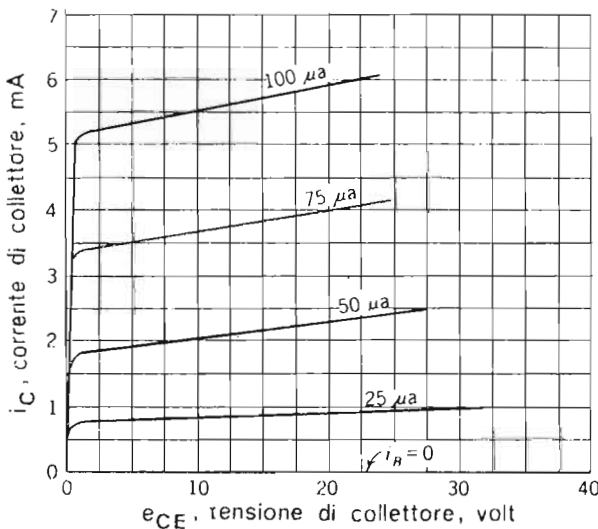



FIG. 3-4. — Una famiglia di caratteristiche di collettore, per il montaggio ad emettitore comune

I parametri h possono essere misurati nei tre tipi di montaggio di fig. 3-3 applicando al transistore dei piccoli segnali e tenendo conto delle limitazioni indicate nelle definizioni.

Il principale vantaggio dei parametri h è la facilità e la precisione con cui possono essere misurati. Le misure in ingresso h_i ed h_f vengono eseguite mettendo in corto circuito, per le alternate, il circuito di uscita che è ad alta impedenza; questo elimina l'errore dovuto a capacità parassite le quali rendono difficile la realizzazione di un circuito effettivamente aperto. Le misure in uscita h_r ed h_o vengono eseguite aprendo il circuito di ingresso; le capacità parassite hanno effetto trascurabile ai bassi livelli di impedenza che si hanno di solito ed è quindi facile ottenere un circuito effettivamente aperto per le componenti alternative.

3-5. L'amplificatore a transistori, circuiti equivalenti per le basse frequenze.

Nelle misure in corrente alternata il tempo di diffusione e di immagazzinamento delle cariche nella base introduce un ritardo paragonabile all'effetto di una capacità; contemporaneamente ai capi della giunzione collettore-base appare la capacità di barriera. Per semplificare il problema si esaminerà il comportamento del transistore a frequenze tanto basse che queste capacità non abbiano effetto apprezzabile; i circuiti così ottenuti, sono circuiti equivalenti a bassa frequenza.

L'equazione (3-21) è un'equazione alle maglie e suggerisce come circuito di ingresso per il transistore quello ai terminali 1,1 della fig. 3-5a. La equazione (3-22) è del tipo ai nodi e quindi descrive un circuito di uscita con un generatore di corrente come quello che si vede dai terminali 2,2 in figura. Poichè le equazioni (3-21) e (3-22) sono state ricavate con i metodi di analisi delle reti, per un transistore a base comune, si conclude che gli elementi presenti fra 1,1 e 2,2 della figura 3-5a, rappresentano un circuito equivalente per un transistore a base comune. Il circuito di uscita è del tipo a generatore di corrente, cioè di Norton, se visto dai terminali 2,2 e la corrente generata è proporzionale alla corrente di ingresso $\mathbf{I}_e$.

Il generatore di tensione, presente nel circuito di ingresso, indica una reazione di tensione dovuta alla tensione di uscita E_{cb}. Il circuito di ingresso è l'equivalente secondo Thevenin di una sorgente attiva, vista dai terminali 1,1. Inizialmente l'uso dei due generatori può creare confusione, ma essi in effetti sono indipendenti. Tra l'altro, la tensione di reazione riportata in ingresso è spesso di valore abbastanza piccolo da potersi trascurare nei calcoli, allora il circuito di ingresso diventa molto semplice. La connessione ad emettitore comune, di fig. 3-5b, comporta la scelta di e_{CE} ed i_B come variabili indipendenti del circuito. Con un metodo analogo al precedente si ottiene:

$$E_{be} = h_{ie} I_b + h_{re} E_{ce} \tag{3-24}$$

$$I_c = h_{fe} I_b + h_{oe} E_{ce} \tag{3-25}$$

Queste sono le equazioni quadripolari relative al funzionamento lineare di un transistore connesso ad emettitore comune come è indicato dal secondo pedice $_e$.

Le stesse equazioni si possono scrivere osservando il circuito di fig. 3-5b fra i terminali 1,1 e 2,2; questo circuito è dunque quello equivalente del montaggio ad emettitore comune. Gli elementi R_S, E_S ed R_L rappresentano la sorgente del segnale ed il carico e servono a completare il circuito dell'amplificatore.

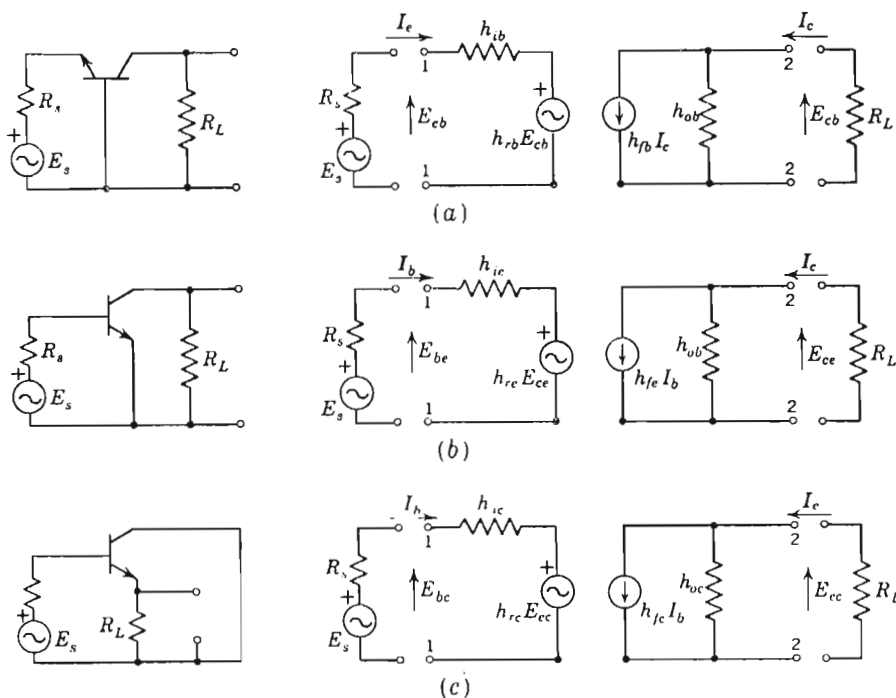



FIG. 3-5. — Circuiti equivalenti per (*a*) base comune, (*b*) emettitore comune, (*c*) collettore comune.

Impiegando di nuovo tale metodo e scegliendo i_E ed e_{BC} come variabili indipendenti, si ottengono le equazioni della rete corrispondente al montaggio del transistore a collettore comune.

$$E_{bc} = h_{ic}I_b + h_{rc}E_{ec} \qquad (3\text{-}26)$$

$$I_e = h_{fc}I_b + h_{oc}E_{ec} \qquad (3\text{-}27)$$

sempre nell'ipotesi di linearità. Queste equazioni descrivono il circuito di fig. 3-5c fra i terminali 1,1 e 2,2, il quale è perciò quello equivalente per la connessione a collettore comune, basato sull'impiego dei parametri *h*.

I tre circuiti equivalenti di fig. 3-5 sono formalmente identici ma differiscono nel valore dei parametri h e delle capacità che compaiono se si considerano frequenze più alte.

Non sempre si trovano pubblicati i dati di un transistore relativi ad un dato circuito; è perciò utile determinare le relazioni fra i parametri relativi al montaggio a base comune, che sono i più diffusi, e quelli relativi agli altri due tipi di montaggio. I risultati approssimati sono:

base comune	*emettitore comune*	*collettore comune*
h_{ib}	$h_{ie} = \dfrac{h_{ib}}{1 - \alpha}$	$h_{ic} = \dfrac{h_{ib}}{1 - \alpha}$
h_{rb}	$h_{re} = \dfrac{h_{ib}h_{ob}}{1 - \alpha} - h_{rb}$	$h_{rc} = 1$
$h_{fb} = - \alpha$	$h_{fe} = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha} = \beta$	$h_{fc} = \dfrac{-1}{1 - \alpha}$
h_{ob}	$h_{oe} = \dfrac{h_{ob}}{1 - \alpha}$	$h_{oc} = \dfrac{h_{ob}}{1 - \alpha}$

(3-28)

3-6. Amplificatori a transistori: funzionamento in bassa frequenza.

I circuiti equivalenti a bassa frequenza per i tre tipi fondamentali di montaggio di un transistore sono, come si è visto, formalmente identici se vengono usati i parametri h; vedremo che anche le equazioni che definiscono il funzionamento dei tre circuiti sono dello stesso tipo e differiscono solo nei valori dei parametri h.

Si ricaveranno alcune relazioni generali, omettendo il secondo pedice ai parametri. Queste relazioni potranno poi essere applicate aggiungendo il pedice relativo alla particolare connessione in questione.

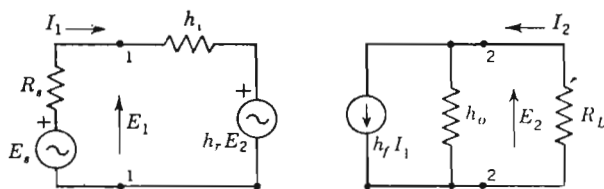



FIG. 3-6. — I parametri h a bassa frequenza.

Con riferimento al circuito di fig. 3-6 si possono scrivere le seguenti equazioni, che comprendono anche il generatore di segnali ed il carico:

$$E_s = (h_i + R_s)I_1 + h_r E_2 \qquad (3:29)$$

$$0 = h_f I_1 + \left(h_o + \frac{1}{R_L}\right) E_2 \qquad (3\text{-}30)$$

È utile definire il determinante del circuito, ricavato dalle equazioni (3-21) e (3-22)

$$\Delta_h = h_i h_o - h_r h_f \tag{3-31}$$

Notiamo che

$$E_1 = E_s - R_s I_1 \tag{3-32}$$

$$I_2 = \frac{-E_2}{R_L} \tag{3-33}$$

Risolvendo la (3-29) rispetto a $\mathbf{E}_2$ e servendosi dell'equazione (3-32) si trova che la *resistenza di ingresso*, vista dai terminali 1,1 è:

$$R_i = \frac{E_1}{I_1} = \frac{\Delta_h R_L + h_i}{1 + h_o R_L} \tag{3-34}$$

La *resistenza di uscita* vista dai terminali 2,2 con $\mathbf{E}_S = 0$ è data da:

$$R_c = \frac{E_2}{I_2} = \frac{h_i + R_s}{\Delta_h + h_o R_s} \tag{3-35}$$

Il *guadagno di corrente* $\mathbf{A}_i$ si ottiene dalle equazioni (3-33) e 3-30)

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h_f}{1 + h_o R_L} \tag{3-36}$$

Questa equazione mostra chiaramente che l'effetto della resistenza di carico è quello di ridurre il guadagno al disotto del valore teorico h_f

Il *guadagno di tensione* dipende anch'esso da R_L e per il circuito compreso fra 1,1 e 2,2 è dato da:

$$A_v = \frac{E_2}{E_1} = \frac{-h_f R_L}{h_i + \Delta_h R_L} \tag{3-37}$$

Per il guadagno di tensione, considerando anche la resistenza del generatore, è possibile scrivere:

$$A_v = \frac{E_2}{E_s} = \frac{-h_f R_L}{h_i + \Delta_h R_L + R_s(1 + h_o R_L)} \tag{3-38}$$

Si noti l'effetto della resistenza del circuito di ingresso nel ridurre il guadagno di tensione.

Il *guadagno di potenza* è dato da $A_p = |A_v \cdot A_i|$ cioè:

$$A_p = \frac{h_f^2 R_L}{(h_i + \Delta_h R_L)(1 + h_o R_L) + R_s(1 + h_o R_L)^2} \tag{3-39}$$

Così il funzionamento degli amplificatori elementari a transistori viene determinato da alcune relazioni generali che richiedono soltanto l'uso dei parametri *h*, misurati nel particolare montaggio impiegato. Quando si usano i parametri *h*, occorre impiegare dei gruppi diversi di valori per ciascun tipo di montaggio; in compenso si ha un solo tipo di relazione analitica e di circuito equivalente, il che giustifica ampiamente la diffusione di questi parametri.

Esempio — *Per un transistore 2N525, tipo P-N-P di piccola potenza, sono stati misurati i parametri h per la connessione a base comune. I parametri da usare nelle altre due connessioni sono*:

	base comune	*emettitore comune*	*collettore comune*
h_i	30 ohm	1360 ohm	1360 ohm
h_r	$5{,}0 \times 10^{-4}$	$3{,}2 \times 10^{-4}$	$\cong 1$
h_f	—0,978	44,5	—45,5
h_o	0,60 μmho	27,2 μmhos	27,2 μmhos
Δ_h	0,00051	0,0228	45,5

3-7. L'amplificatore a collettore comune.

Proprietà fondamentale dell'amplificatore a collettore comune, o ad uscita sull'emettitore, è la sua alta impedenza di ingresso. Poichè non sempre sono disponibili i parametri ibridi relativi a questa connessione, studieremo ora il funzionamento di questo circuito utilizzando le formule precedentemente ricavate ed esprimendo i parametri h_c in funzione di quelli h_e, ossia:

$$h_{fc} = -(1 + h_{fe}) \qquad h_{rc} = 1 - h_{re}$$
$$h_{ic} = h_{ie} \qquad h_{oc} = h_{oe}$$
$$\Delta_{hc} = \Delta_{he} + 1 + h_{fe} - h_{re}$$

Per il circuito di fig. 3-7 il guadagno di tensione è:

$$A_{vc} = \frac{-h_{fc} R_L}{h_{ic} + \Delta_{hc} R_L} \cong \frac{h_{fe} R_L}{h_{ie} + h_{fe} R_L} \tag{3-40}$$

supponendo che $h_{re} \ll 1$, che $1 + h_{oe} \cdot R_L \cong 1$, e che h_{fe} sia grande rispetto all'unità. Per i valori normali di R_L, h_{ie} al denominatore è trascurabile ed il guadagno di tensione è prossimo alla unità ma sempre inferiore a questo valore.

Il guadagno di corrente è:

$$A_{ic} = \frac{h_{fc}}{1 \quad h_{oc}R_L} \cong -(1 + h_{fe}) \cong -h_{fe} \tag{3-41}$$

che è approssimativamente uguale a quello del circuito ad emettitore comune.

L'equazione (3-34) permette di calcolare la resistenza di ingresso:

$$R_i = \frac{\Delta_{hc} R_L + h_{ic}}{1 + h_{oc}R_L} \cong h_{ie} + (1 + h_{fe})R_L \cong h_{fe}R_L \tag{3-42}$$

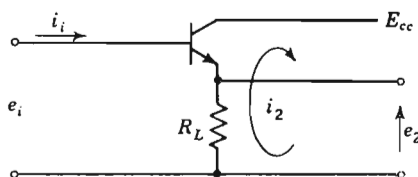



FIG. 3-7. — Il circuito a collettore comune.

Il circuito a collettore comune si comporta dunque come un trasformatore di impedenza che riporta il carico, moltiplicato per h_{fe}, nel circuito di ingresso.

L'impedenza di uscita si ottiene dalla Eq. (3-35):

$$R_o = \frac{h_{ic} + R_s}{\Delta_{hc} + h_{oc}R_s} \cong \frac{h_{ie} + R_s}{1 + h_{fe}} \tag{3-43}$$

cioè molto bassa per i valori normali di R_S.

Il circuito a collettore comune si comporta quindi come un trasformatore di impedenza e adatta un generatore ad alta impedenza ad un carico a bassa impedenza.

La tensione di uscita è quasi uguale a quella di ingresso cioè la tensione dell'emettitore segue quella di ingresso; di qui la denominazione inglese « emitter follower » cioè inseguitore di emettitore.

3-8. Confronto fra i vari tipi di amplificatore a transistore.

In fig. 3-8 è mostrato l'andamento di alcune grandezze relative al transistore, i cui parametri sono stati elencati nel paragrafo 3-6, al variare delle resistenze della sorgente e del carico.

La connessione ad emettitore comune è quella più frequentemente impiegata, poichè presenta un alto guadagno di corrente e di potenza ed una

buona stabilità delle resistenze di ingresso e di uscita al variare della resistenza del generatore in ingresso e del carico. Nel transistore in esame la resistenza di ingresso è di circa 2000 Ω mentre quella di uscita oscilla fra 30.000 e 90.000 Ω.

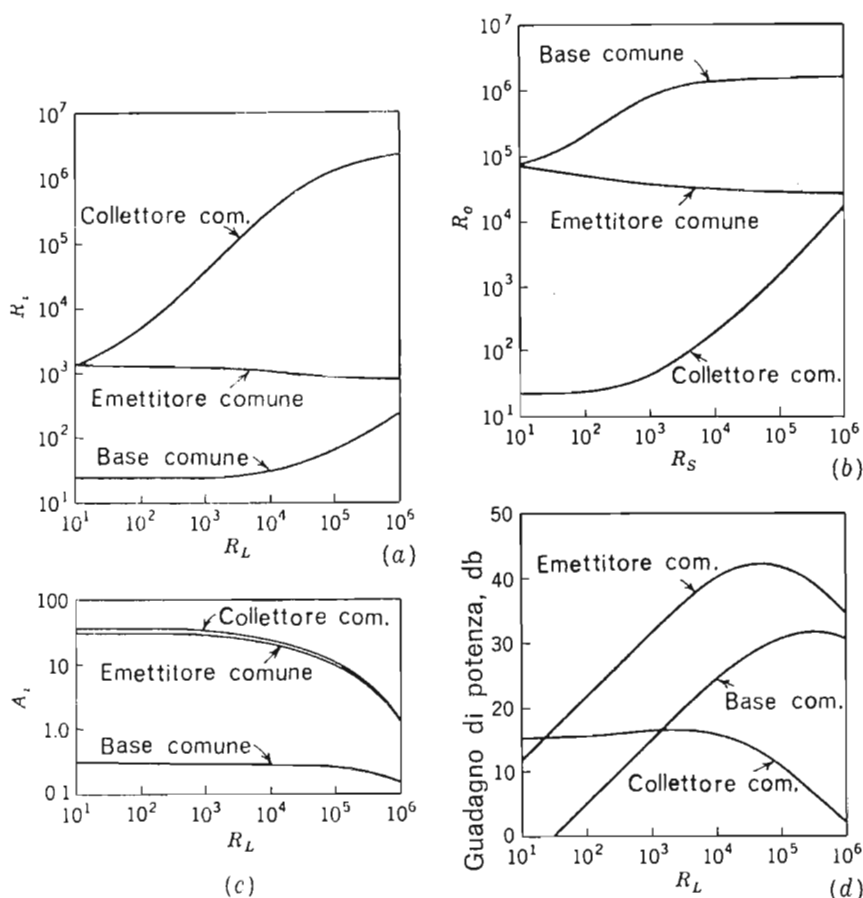



Fig. 3-8. — (*a*) Variazione della resistenza di ingresso; (*b*) variazione della resistenza di uscita; (*c*) variazione del guadagno di corrente; (*d*) il guadagno di potenza espresso in db.

Per gli stadi disposti in cascata, quando la resistenza di ingresso di ciascuno stadio rappresenta il carico di quello precedênte, la fig. 3-8*c* e *d* mostrano che il guadagno di corrente è approssimativamente eguale ad h_{fe} e che il guadagno di potenza oscillerà fra 20 e 40 db.

La controreazione tra uscita ed ingresso è bassa a causa del piccolo valore di h_{re}; questo è spesso importante nelle applicazioni.

Il circuito introduce una inversione di fase tra tensione di uscita e di ingresso.

Il circuito a base comune ha una resistenza di ingresso molto bassa mentre quella di uscita è molto alta; questi circuiti quindi non si prestano ad essere collegati in cascata a causa del disadattamento delle impedenze. Inoltre il guadagno di corrente è inferiore all'unità mentre quello in potenza è minore di quello relativo al circuito ad emettitore comune.

La controreazione fra uscita ed ingresso è piccola a causa dei bassi valori di h_{rb}; il circuito è spesso importante per disaccoppiare l'ingresso e la uscita e per adattare un generatore a bassa impedenza ad un carico ad alta impedenza.

Il circuito a collettore comune, a causa della sua alta resistenza di ingresso e della bassa resistenza di uscita, si comporta come un trasformatore di impedenza di caratteristiche opposte a quelle del circuito a base comune; il suo guadagno in corrente è alto ma questo fatto è spesso di importanza secondaria rispetto a quello della trasformazione delle impedenze.

Valori tipici per il transistore, i cui componenti sono stati calcolati nel paragrafo precedente, sono: $R_L = 10.000\ \Omega$ ed $R_S = 1.000\ \Omega$; con questi valori si possono ricavare le caratteristiche per i circuiti a base comune e ad emettitore comune. Per il circuito a collettore comune, naturalmente, si assumerà $R_S = 10.000\ \Omega$ ed $R_L = 1.000\ \Omega$.

Effettuati i calcoli si ottiene:

	base comune	*emettitore comune*	*collettore comune*
R_i	33,1 ohm	1250 ohm	46.000 ohm
R_o	926.000 ohm	47.200 ohm	248 ohm
A_i	—0,925	34,9	--44,5
A_v	8,9	155	0,8
A_p	9,16 db	37,3 db	15,5 db

3-9. Adattamento delle impedenze.

Se generatore e carico fossero adattati alle resistenze di ingresso e di uscita degli amplificatori a transistore, si otterrebbero i più elevati guadagni di potenza possibili. Le condizioni di adattamento sono però piuttosto complicate dato che R_i è funzione di R_L e R_o dipende da R_S.

In questa trattazione verranno impiegati i parametri *h* poichè le formule che così si ottengono sono applicabili a tutti e tre i circuiti fondamentali.

Quando l'ingresso è adattato, cioè $R_S = R_i$, il generatore di ingresso E_S fornisce una potenza data da:

$$P_{in} = I_1^2 R_i$$

dove I_1 è la corrente di ingresso. La potenza fornita al carico è:

$$P_u = I_2^2 R_L$$

ed in condizioni di adattamento è $R_L = R_o$.

Quando contemporaneamente è $R_S = R_i$ ed $R_L = R_o$ allora si ha il *massimo guadagno di potenza possibile* P_{max}.

$$P_{max} = \frac{I_2^2 R_L}{I_1^2 R_i} \tag{3-44}$$

Se l'ingresso è adattato, dalla eq. (3-34) si ricava:

$$R_s = R_i = \frac{\Delta_h R_L + h_i}{1 + h_o R_L} \tag{3-45}$$

Se l'uscita è adattata, dalla eq. (3-35) si ricava:

$$R_L = R_o = \frac{R_s + h_i}{\Delta_h + h_o R_s} \tag{3-46}$$

Queste relazioni saranno soddisfatte contemporaneamente in condizioni di massimo guadagno di potenza; risolvendo il sistema delle equazioni (3-45) e (3-46) si ottiene:

$$R_s = \sqrt{\frac{h_i \Delta_h}{h_o}} \tag{3-47}$$

$$R_L = \sqrt{\frac{h_i}{h_o \Delta_h}} \tag{3-48}$$

che sono i valori delle resistenze del generatore di ingresso e del carico, espresse in funzione dei parametri del transistore scelto dal progettista.

Sostituendo nella (3-44) queste espressioni e ricordando la (3-36), si ottiene, quando ingresso ed uscita sono entrambi adattati:

$$P_{max} = \frac{h_f^2}{(\sqrt{\Delta_h} + \sqrt{h_o h_i})^2} \tag{3-49}$$

Il disadattamento di un certo amplificatore può essere misurato confrontando l'effettivo guadagno di potenza con il massimo teorico ora trovato.

In molti amplificatori le condizioni ideali si potranno ottenere solo usando l'accoppiamento a trasformatore fra gli stadi. L'uso dei trasformatori è legato ad altri fattori quali l'ingombro ed il costo; un adattamento approssimativo, ma ottenuto senza trasformatori, può essere spesso la soluzione più economica. I circuiti ad emettitore comune si possono spesso collegare

in cascata, senza trasformatore, ottenendo ugualmente un buon adattamento ed un alto guadagno; nei casi in cui vi sarebbero forti disadattamenti, si può ricorrere a stadi a base comune o a collettore comune.

3-10. Il circuito equivalente a T attivo.

La scelta dei parametri **z.** del quadripolo generale porta ad un circuito equivalente a T largamente impiegato nei primi studi sui circuiti a transistore. Benchè i parametri *h* siano oggi comunemente usati, i parametri **z** (o *r*) sono ancora utili in alcune applicazioni. In questo paragrafo si farà uso di questi ultimi per studiare il comportamento dei transistori alle basse frequenze, quando cioè le capacità sono trascurabili.

Le eq. (3-10) e (3-11) del quadripolo generale:

$$E_1 = z_i I_1 + z_r I_2$$
$$E_2 = z_f I_1 + z_o I_2$$

sono rappresentate dal circuito equivalente di fig. 3-9a, fra i terminali 1,1 e 2,2.

Operando algebricamente su queste equazioni, si ottengono le equazioni del circuito a T ad un solo generatore. Sommando e sottraendo $\mathbf{z_r I_1}$ alla prima equazione e $\mathbf{z_r I_1}$ e $\mathbf{z_r I_2}$ alla seconda, si ottiene:

$$E_1 = (z_i - z_r)I_1 + z_r(I_1 + I_2) \qquad (3\text{-}50)$$
$$E_2 = (z_f - z_r)I_1 + z_r(I_1 + I_2) + (z_o - z_r)I_2 \qquad (3\text{-}51)$$

Queste equazioni descrivono il circuito di fig. 3-9b. La funzione di trasferimento diretta è ora data da un generatore di tensione, mentre quella inversa, o di reazione, è data dalla caduta di $\mathbf{I_2}$ su $\mathbf{z_r}$.

Un terzo tipo di circuito equivalente è dato dalla trasformazione del generatore di tensione e della sua impedenza $\mathbf{z_o - z_r}$ in un generatore di corrente, come in fig.3-9c.

Il generatore di corrente, posto ai capi $\mathbf{z_o - z_r}$, deve fornire una corrente del seguente valore:

$$I = \frac{z_f - z_r}{z_o - z_r} I_1 \qquad (3\text{-}52)$$

in modo da applicare al circuito la stessa tensione che si aveva nel circuito di fig. 3-9b.

Quando è connesso un carico $\mathbf{z_L}$ in uscita, dalle equazioni (3-50) e (3-51)

si ottiene l'impedenza di ingresso, per tutte e tre le connessioni, vista dai punti 1,1.

$$Z_i = z_i - \frac{z_r z_f}{z_o + Z_L} \tag{3-53}$$

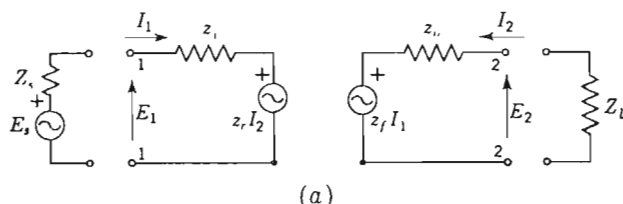
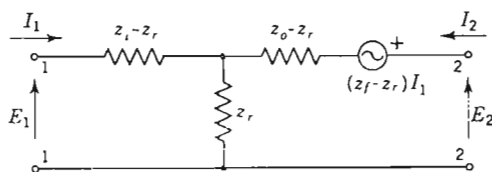
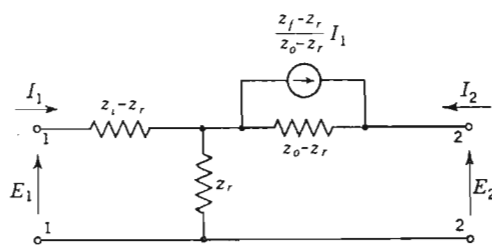



FIG. 3-9. — Circuiti equivalenti per quadripoli attivi.

L'impedenza di uscita vista da 2,2 quando è applicato in ingresso un generatore di impedenza $\mathbf{z}_S$, la cui tensione naturalmente non va considerata nel calcolo di $\mathbf{z}_o$, vale:

$$Z_o = z_o - \frac{z_r z_f}{z_i + Z_s} \tag{3-54}$$

Il guadagno di corrente che si ha con il carico $\mathbf{z}_L$ è:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_f}{z_o + Z_L} \tag{3-55}$$

ed il corrispondente guadagno in tensione:

$$A_v = \frac{E_2}{E_s} = \frac{z_f Z_L}{(z_i + Z_s)(z_o + Z_L) - z_r z_f} \tag{3-56}$$

In questo modo si sono determinate le relazioni fondamentali che interessano nello studio dei quadripoli attivi.

Nel paragrafo 3-4 si è descritto il transistore come un quadripolo, pertanto anche le equazioni (3-50) e (3-51) possono essere applicate al transistore, così come i circuiti di fig. 3-9. Questi circuiti possono essere semplificati, come è mostrato in fig. 3-10 per il circuito a base comune, considerando che, in bassa frequenza, i parametri del transistore siano solo resistivi: il che è generalmente valido. Si potranno quindi scrivere le seguenti equazioni per il circuito di fig. 3-10b:

$$E_{eb} = (r_e + r_b)I_e + r_b I_c \tag{3-57}$$

$$E_{cb} = (r_b + \alpha r_c)I_e + (r_b + r_c)I_c \tag{3-58}$$

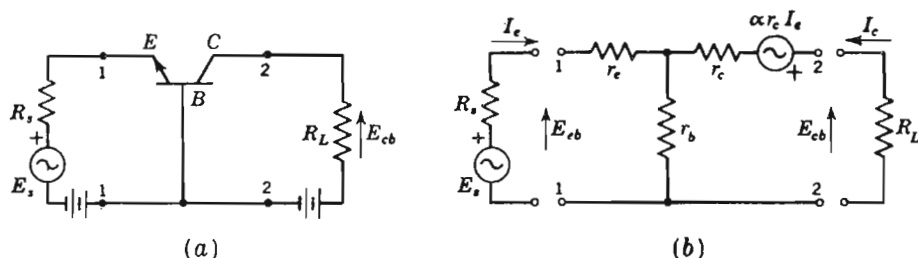



FIG. 3-10. — (*a*) Amplificatore a base comune con transistore N-P-N; (*b*) circuito equivalente a T.

Il confronto termine a termine con le equazioni (3-50) e (3-51) permette di stabilire le seguenti uguaglianze, valide in bassa frequenza:

$z_i - z_r = r_e =$ resistenza di emettitore
$z_r = r_b =$ resistenza di base
$z_o - z_r = r_c =$ resistenza di collettore
$z_f - z_r = \alpha r_c =$ resistenza di trasferimento

Si dimostra facilmente che la resistenza di trasferimento, indicata talora con r_m, è data da αr_c: in condizione di corto circuito, ossia $E_{cb} = 0$, dalla 3-51 si ottiene:

$$\left| \frac{I_c}{I_e} \right| = \frac{r_f - r_r}{r_o - r_r} = \alpha \tag{3-59}$$

in cui r_r è di solito piccola rispetto ad r_f e ad r_o, per cui:

$$\alpha \cong \frac{r_f}{r_o} \cong \frac{r_f}{r_c}$$

da cui si ottiene la resistenza di trasferimento

$$r_f \cong \alpha r_c \tag{3-60}$$

Le caratteristiche del circuito in esame si ottengono dalle relazioni generali (3-53) - (3-56) e dalle relazioni:

$$E_{eb} = E_s - R_s I_e$$
$$E_{cb} = - R_L I_c$$

con le seguenti definizioni:

$$r_{ib} = r_e + r_b \qquad r_{rb} = r_b$$
$$r_{fb} = \alpha r_c \qquad r_{ob} = r_c + r_b$$

Supponendo inoltre $r_c \gg r_b$ e $r_c \gg r_e$, per l'amplificatore a base comune si ha:

$$R_{ib} = \frac{E_{eb}}{I_e} = r_e + r_b \left(1 - \frac{\alpha}{1 + R_L/r_c}\right) \cong r_e + r_b(1 - \alpha) \tag{3-61}$$

$$R_{ob} = \frac{E_{cb}}{I_c} = r_c + r_b \left(1 - \frac{\alpha r_c}{r_e + r_b + R_s}\right) \tag{3-62}$$

$$A_{ib} = \frac{I_c}{I_e} = \frac{-\alpha}{1 + R_L/r_c} \cong -\alpha \tag{3-63}$$

$$A_{vb} = \frac{E_{cb}}{E_s} = \frac{\alpha R_L}{(r_e + r_b + R_s)(1 + R_L/r_c) - \alpha r_b} \tag{3-64}$$

Gli elementi del circuito equivalente, relativo al montaggio a base comune, possono essere opportunamente ridisposti per ricavare lo schema equivalente ad emettitore comune, come in fig. 3-11b. Conviene che il generatore di trasferimento sia funzione della corrente di ingresso I_b piuttosto che di I_e, come è riportato in figura. L'equazione del circuito di uscita per $E_{cc} = 0$, è:

$$0 = (\alpha r_c - r_e)\, I_e + r_c I_c$$

ricordando la relazione

$$I_e = -(I_b + I_c)$$

si ottiene:

$$0 = r_e I_b - \alpha r_c I_b + [r_e + r_c\,(1 - \alpha)]\, I_c \tag{3-65}$$

Il circuito di uscita di fig. 3-11c, che così si ottiene, ha il generatore di trasferimento controllato dalla corrente di ingresso I_b con polarità invertita; la resistenza di collettore ha il valore $r_c(1 - \alpha)$.

Ritornando ai parametri generali **z**, si vede che:

$$z_{ie} = r_b + r_e \qquad z_{re} = r_e$$
$$z_{fe} = -\alpha r_c \qquad z_{oe} = r_e + r_c(1 - \alpha)$$

Le caratteristiche dell'amplificatore ad emettitore comune si ricavano dalle equazioni (3-53) e (3-56) in base alle quali si può scrivere:

$$R_{ie} = r_b + r_e \left[1 + \frac{\alpha r_c}{r_e + r_c(1 - \alpha) + R_L}\right] \cong r_b + \frac{r_e(1 + R_L/r_c)}{1 - \alpha + R_L/r_c} \tag{3-66}$$

$$R_{oe} = r_e + r_c(1 - \alpha) + \frac{\alpha r_c r_e}{r_b + r_e + R_s} \cong r_c(1 - \alpha) + \frac{\alpha r_c r_e}{r_b + r_e + R_s} \tag{3-67}$$

$$A_{ie} = \frac{\alpha r_c}{r_e + r_c(1 - \alpha) + R_L} \cong \beta \frac{1}{1 + \dfrac{R_L/r_c}{1 - \alpha}} \tag{3-68}$$

$$A_{ve} = \frac{- \alpha r_c R_L}{(r_b + r_e + R_s)\,[r_e + r_c(1 - \alpha) + R_L] + \alpha r_c r_e}$$

$$\cong \frac{- \alpha R_L}{(r_b + r_e + R_s)\,(1 - \alpha + R_L/r_c) + \alpha r_e} \tag{3-69}$$

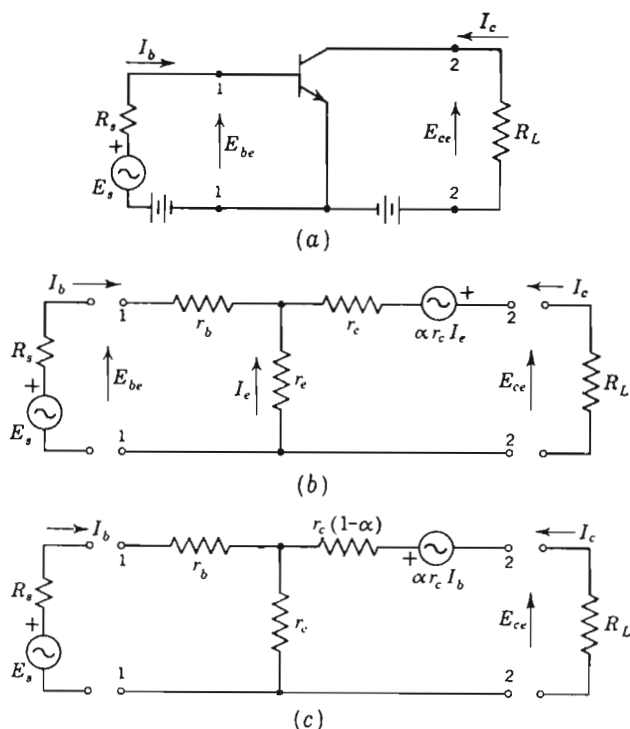



FIG 3-11. — L'amplificatore ad emettitore comune ed il suo circuito equivalente.

Cambiando ancora la disposizione degli elementi si otterrà il circuito equivalente a collettore comune di fig. 3-12b. Le equazioni del circuito si ricavano in modo analogo a quanto già fatto precedentemente.

In conclusione, i valori dei parametri r non dipendono dalla configurazione del circuito e possono essere misurati in bassa frequenza in base alle definizioni della Eq. (3-12). I parametri rimangono invariati mentre il circuito equivalente e le relative equazioni sono diverse per ciascuno dei tre tipi fondamentali di amplificatore. Questa è la differenza fra i parametri **z** e gli h; questi ultimi infatti variano mentre il circuito equivalente rimane sempre lo stesso ed è quindi retto dalle stesse equazioni.

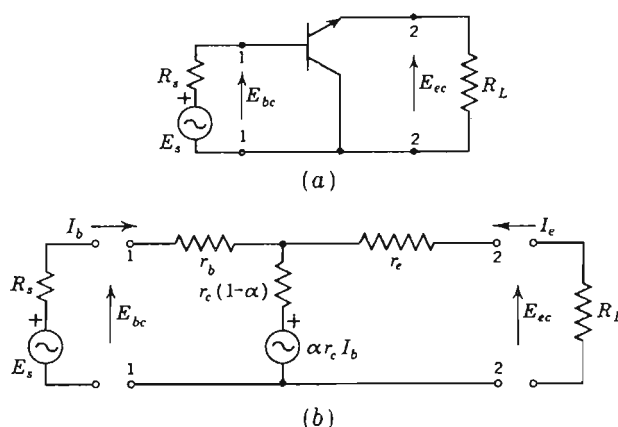



Fig. 3-12. — Circuito equivalente a T per la connessione collettore comune

Valori tipici dei parametri r sono:

$\alpha = 0{,}97$ $\qquad r_b = 100$ ohm

$r_e = 35$ ohm $\qquad r_c = 2 \times 10^6$ ohm

3-11. Conversione dei parametri h in r.

Non è facile misurare i parametri r di un transistore, sia a causa del circuito equivalente a T sia perchè è difficile realizzare delle effettive condizioni di circuito aperto in circuiti ad alta impedenza. Di conseguenza i parametri r vengono di solito calcolati a partire da quelli h che sono più facilmente misurabili. Applicando le definizioni dei parametri **z** Eq. (3-12) al

circuito equivalente a parametri *h*, si ricavano le relazioni che legano questi due gruppi di parametri:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} = -h_{fb} \\
r_e &= \frac{h_{re}}{h_{oe}} = h_{ib} - \frac{h_{rb}}{h_{ob}} (1 + h_{fb}) \\
r_b &= h_{ie} - \frac{h_{re}}{h_{oe}} (1 + h_{fe}) = \frac{h_{rb}}{h_{ob}} \\
r_c &= \frac{1 + h_{fe}}{h_{oe}} = \frac{1 - h_{rb}}{h_{ob}}
\end{aligned} \qquad (3\text{-}70)$$

3-12. Variazione dei parametri del transistore.

I parametri di un transistore dipendono dalla temperatura, dalla corrente di emettitore, dalla tensione di collettore e dalle tecniche impiegate nella loro fabbricazione.

Sono inoltre notevoli le differenze fra diversi esemplari aventi tutti la stessa sigla; per certi tipi di transistori, una variazione di α del 10% può produrre una variazione di β di alcune centinaia per cento.

Di solito i costruttori forniscono dati sulle possibili tolleranze dei valori dei parametri, oppure danno un valore medio.

Queste variazioni sono tuttavia così grandi che occorre ricorrere a misure dirette se si vuole conoscere con precisione un certo parametro.

Per il germanio ed il silicio, le temperature limiti di funzionamento sono, rispettivamente, 85°C e 200°C.

Alle alte temperature I_{co} aumenta a causa dell'aumento dei portatori intrinseci e maschera le variazioni dovute alla corrente di controllo. Nel germanio, la corrente di saturazione inversa si raddoppia ogni 11°C di aumento della temperatura di lavoro; nel silicio questo avviene ogni 18°C. È da notare inoltre che la corrente di saturazione inversa nel silicio può anche essere solo l'1% di quella del germanio; per questa ragione il silicio ha una temperatura limite di impiego più elevata.

La corrente inversa di collettore appare al circuito di base come un segnale e viene quindi amplificata secondo il coefficiente β; questo aumento di corrente riscalda la giunzione base-collettore il che provoca un ulteriore aumento di I_{co}, a cui segue un aumento della corrente ed un maggiore riscaldamento. Questo fenomeno è detto *instabilità termica* del transistore e provoca la sua autodistruzione.

La fig. 3-13 mostra le variazioni dei parametri *h* che si hanno in un transistore al silicio, al variare della temperatura. Si vede che α diventa più che doppio passando da +150 a —25°C; questo è molto importante dato che

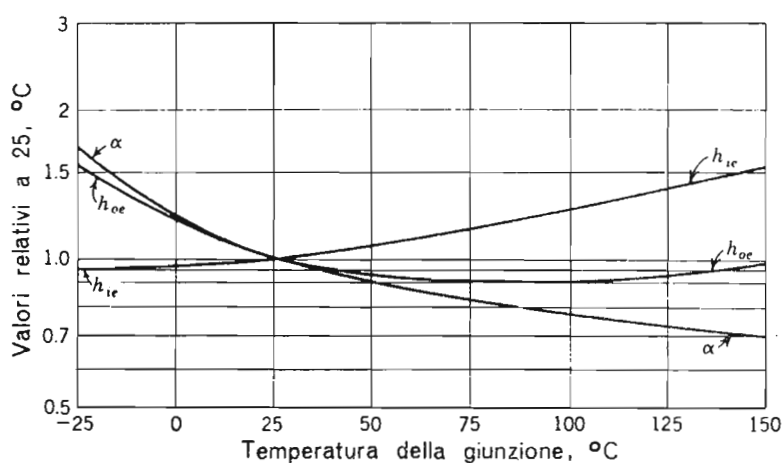



FIG. 3-13. — Variazione dei parametri con la temperatura (transistore al silicio, E_{CE} = 5 volt, I_E = 1 mA).

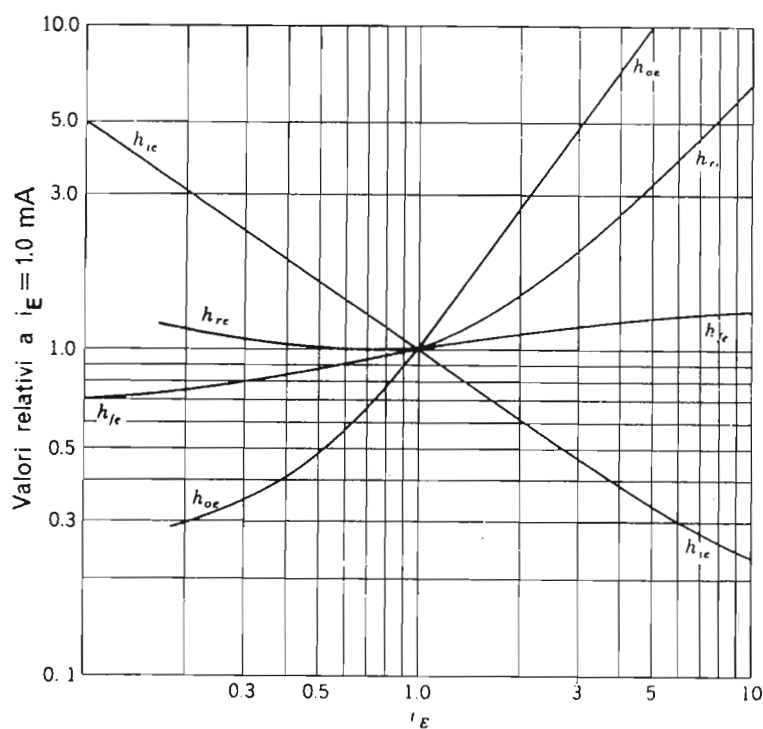



FIG. 3-14. — Variazione dei parametri con la corrente per un transistore al silicio.

nelle espressioni dei parametri h, precedentemente ricavate compaiono i termini $1-\alpha$ o $1/(1-\alpha)$. In figura 3-14 sono riportate le variazioni dei parametri h con la corrente di emettitore. Per evitare i fenomeni di instabilità termica occorre mantenere rigorosamente fisso il punto di lavoro Q.

Anche i parametri r sono funzione della temperatura e possono essere legati ad alcune delle grandezze fisiche del transistore. La giunzione emettitore-base di un transistore è direttamente polarizzata e segue la legge del diodo

$$i = i_0(\varepsilon^{Ve/kT} - 1)$$

La conduttanza differenziale della giunzione sarà:

$$g = \frac{di}{dv} = \frac{i_0}{kT/e}\varepsilon^{Ve/kT} = \frac{i - i_0}{kT/e} \qquad (3\text{-}71)$$

Per una polarizzazione diretta superiore a qualche decimo di volt, la corrente i è molto più grande di i_0; sostituendo i valori numerici di k ed e nella (3-71) e considerandone il reciproco si trova la resistenza di emettitore:

$$r_e = \frac{T}{11.600\, i_E}$$

che a 25°C è:

$$r_e = \frac{26}{i_E} \quad \text{ohm} \qquad (3\text{-}72)$$

in cui i_E è espresso in milliampère. Si noti che r_e è una piccola resistenza che dipende sia dalla temperatura che dalla corrente i_E, come è mostrato in fig. 3-15.

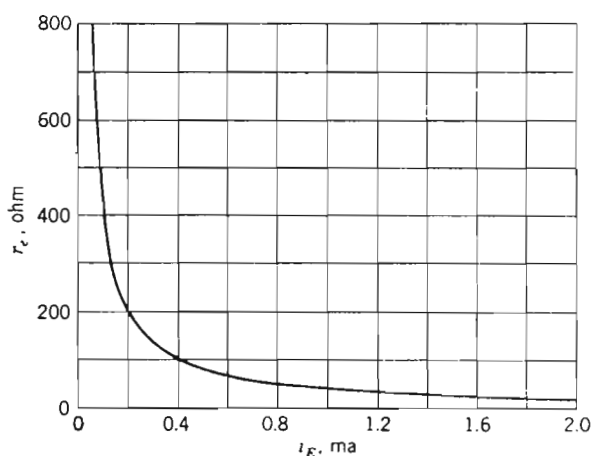



FIG. 3-15. — La relazione fra I_E ed r_e.

La resistenza di base r_b è funzione della tensione di collettore; generalmente r_b si considera somma di due resistenze in serie, come in fig. 3-16: di esse r_B è la resistenza ohmica dello strato di base misurata in un punto interno al transistore che sia all'effettivo potenziale della base; la resistenza r'_b dipende dal potenziale del collettore. Al variare della polarizzazione inversa sulla giunzione del collettore, varia anche lo spessore della regione priva di cariche. La resistenza r'_b dipende quindi dall'ampiezza del segnale; essa è però piccola (tranne che in qualche transistore di grande potenza) per cui l'effetto della sua variazione è trascurabile: si può allora considerare $r_b = r_B + r'_b$ una quantità costante.

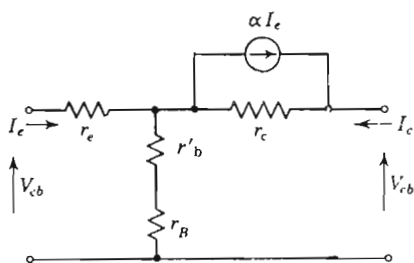



FIG. 3-16. — L'effetto della resistenza di base r'_b.

La resistenza di collettore r_c è dovuta alla giunzione inversamente polarizzata ed è quindi funzione inversa della corrente. A frequenze elevate, la capacità della giunzione inversamente polarizzata tende a shuntare r_c e si deve ricorrere allora a circuiti più complessi che tengano conto di questi effetti parassiti.

3-13. Polarizzazione del transistore.

Vi sono molti circuiti per la polarizzazione di un amplificatore a transistore; tali circuiti richiedono naturalmente un solo alimentatore per i circuiti di collettore e di polarizzazione.

La fig. 3-17a mostra una circuito adatto per la connessione a base comune; il transistore è tipo N-P-N: in esso la giunzione emettitore-base è direttamente polarizzata dalla caduta IR_E che rende la base positiva.

Il collettore viene polarizzato inversamente dalla tensione positiva E_{cc}. Il valore della polarizzazione dell'emettitore è determinato dal partitore di tensione R_2, R_E. Se la corrente I è molto maggiore di I_B, la tensione di base sarà stabile.

Il condensatore C_E ha una bassa reattanza e rappresenta un corto circuito per la corrente alternata del segnale, mentre la componente continua è costretta a passare attraverso R_E. La presenza di R_E ha dunque effetto sulla corrente continua di polarizzazione, senza però alterare il circuito per i segnali alternativi. Naturalmente occorre che sia $X_c \ll R_E$ alla più bassa frequenza in gioco.

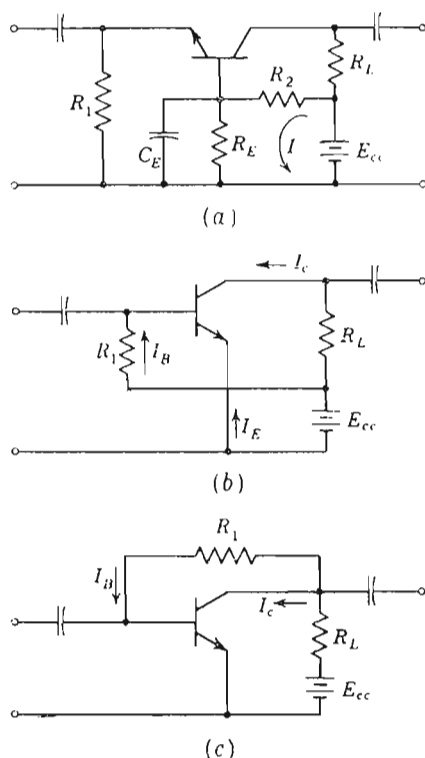



FIG. 3-17. — Circuiti di polarizzazione (*a*) a base comune, (*b*) polarizzazione fissa per circuito ad emettitore comune, (*c*) autopolarizzazione.

Il circuito ad emettitore comune di fig. 3-17b ha una polarizzazione fissa prodotta dalla caduta $I_B R_1$. Sia la base che il collettore sono positivi rispetto all'emettitore come occorre in questo transistore che è di tipo N-P-N.

La polarizzazione è determinata dalla corrente costante I_B ed è praticamente indipendente da variazioni di I_E dovute sia alle variazioni di temperatura, che alle differenze fra i transistori.

Il circuito emettitore base ha la seguente equazione alle maglie:

$$E_{CC} - E_{BE} - R_1 I_B = 0$$

La caduta sulla giunzione E_{BE} sarà circa 0,5 volt nel germanio e 0,7 volt nel silicio e sarà trascurabile rispetto ad E_{cc}. Poichè è nota la corrente di base occorrente per un certo punto di lavoro Q, è possibile determinare la resistenza R_1 come:

$$R_1 = \frac{E_{cc}}{I_B} \tag{3-73}$$

Nel prossimo paragrafo si vedrà che la polarizzazione fissa non è adatta per il circuito ad emettitore comune, a causa della instabilità del punto Q provocata dalla variazione di I_{co} con la temperatura.

In fig. 3-17c è mostrato un circuito detto «ad autopolarizzazione» applicato ad un amplificatore ad emettitore comune. Il resistore di base R_1 è collegato al collettore ed un aumento nella corrente di quest'ultimo riduce sia E_c che la polarizzazione diretta dell'emettitore. Questa riduzione di polarizzazione riduce la corrente di emettitore, per cui la corrente di collettore ritorna al suo valore normale. Anche in questo caso la resistenza R_1 viene calcolata scegliendo la I_B corrispondente al punto di lavoro Q voluto; questo permette di determinare E_c e la tensione ai capi di R_1, per cui $R_1 = E_c/I_B$.

Poichè una parte del segnale passa attraverso R_1, si ha una reazione la quale riduce il guadagno di questo circuito. Per evitare questa riduzione di guadagno, occorre $R_1 \gg R_L$ e questo richiede un transistore con piccola corrente di base.

3-14. Instabilità del punto di lavoro Q.

Nel paragrafo precedente abbiamo già detto che il circuito a polarizzazione fissa non è adatto per il circuito ad emettitore comune; sono possibili infatti fenomeni di instabilità termica dato che la polarizzazione non è funzione nè di I nè di I_{co}. Con riferimento al circuito di fig. 3-17a si può dimostrare che le variazioni di I_{co} danno luogo ad una instabilità del punto di lavoro Q. Per definizione, le componenti continue sono legate nel modo seguente:

$$I_E + I_B + I_C = 0 \tag{3-74}$$

inoltre:

$$I_C = -\alpha I_E + I_{CO} \tag{3-75}$$

per cui:

$$I_C = \frac{\alpha I_B}{1-\alpha} + \frac{I_{CO}}{1-\alpha} = \beta I_B + \frac{I_{CO}}{1-\alpha} \tag{3-76}$$

Queste espressioni mostrano che per un certo I_B ogni variazione di I_{co} dovuta alla temperatura si traduce in una variazione di I_c che è $1/(1-\alpha)$ volte più grande.

Transistori dello stesso tipo possono avere valori di β notevolmente diversi tra loro e l'equazione (3-76) dimostra che in tal caso vi sono notevoli differenze anche nei valori di I_c corrispondenti ad un certo punto di lavoro Q.

Si definisce un *fattore di stabilità* * S

$$S = \frac{dI_C}{dI_{CO}} \tag{3-77}$$

mediante il quale si confronta l'efficacia dei vari circuiti utilizzati per ridurre la variazione di corrente di collettore al variare di I_{co}.

Osserviamo che in base all'equazione (3-73) $I_B = E_{CC}/R_1$, è possibile scrivere l'eq. (3-76) come segue:

$$I_C = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{E_{CC}}{R_1} + \frac{I_{CO}}{1-\alpha} \tag{3-78}$$

il fattore di stabilità per il circuito a polarizzazione fissa è dunque:

$$S = \frac{dI_C}{dI_{CO}} = \frac{1}{1-\alpha} \tag{3-79}$$

Idealmente il valore di S dovrebbe essere pari all'unità, cioè le variazioni di I_C dovute a variazioni in I_{CO} non dovrebbero essere amplificate. In pratica, il circuito a polarizzazione fissa avrà valori di S oscillanti fra 30 e 100 e pertanto il punto Q non è sufficientemente stabile.

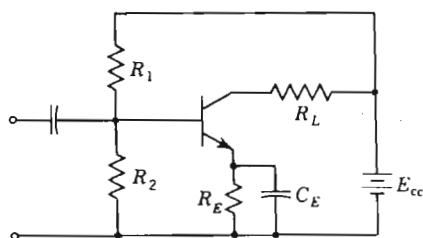



FIG. 3-18. — Polarizzazione ed alimentazione del transistore, ottenuta con un solo generatore.

Come è mostrato in fig. 3-18, si possono aggiungere i resistori R_2 ed R_E per aumentare la stabilità; il relativo circuito richiede un solo generatore sia per la polarizzazione che per il circuito di collettore.

---

* Il fattore di stabilità dovrebbe più correttemente essere chiamato *fattore di instabilità*, poiché un grande valore di S indica un circuito più instabile.

Il condensatore C_E cortocircuita le correnti di segnale mentre le componenti continue passano attraverso R_E.

Applicando il teorema di Thevenin si determinano il generatore e la resistenza equivalente come in fig. 3-19. Trascurando la caduta sulla giunzione emettitore-base, che è direttamente polarizzata, si ricava la seguente equazione per il circuito di ingresso:

$$R_A I_B - R_E I_E = E_1$$

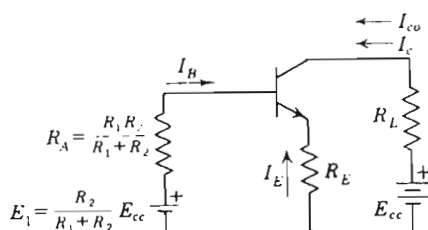



FIG. 3-19. — Circuito equivalente in corrente continua relativo alla fig. 3-18.

Questa relazione può essere modificata usando le equazioni (3-74) e (3-75) nel modo seguente:

$$I_C = \frac{\beta E_1}{R_A + R_E/(1-\alpha)} + \frac{R_A + R_E}{R_A(1-\alpha) + R_E} I_{CO} \tag{3-80}$$

derivando, si ottiene S:

$$S = \frac{dI_C}{dI_{CO}} = \frac{1}{1 - \alpha/(1 + R_E/R_A)} \tag{3-81}$$

Questo risultato, se paragonato con quello ottenuto per il circuito a polarizzazione fissa, Eq. (3-79), mostra un miglioramento di S dipendente dal rapporto R_E/R_A. Per rendere S piccolo, e quindi per migliorare la stabilità, R_E/R_A dovrebbe essere grande rispetto all'unità.

La scelta del valore adatto di S dipende dalla variazione ammissibile per la I_C in corrispondenza del punto Q.

Consideriamo il circuito a polarizzazione fissa di fig. 3-17b e poniamo $E_{CC} = 10$ volt ed $R_L = 5000\ \Omega$. A temperatura ambiente, I_C sia eguale a 1mA, con $I_{CO} = 20\mu A$; si ottiene allora $E_C = 5$ volt ed una caduta di 5 volt sul carico. La divisione della tensione in parti uguali viene spesso utilizzata per determinare la resistenza di carico e i valori delle correnti. È ovvio che il massimo aumento possibile Δi_C è di 1 mA, poichè a tale variazione corrisponde l'annullarsi della tensione sul transistore. Se la temperatura di funzio-

namento sale da 25 ad 80°C, in un transistore al germanio, I_{CO} aumenterà di circa otto volte cioè ΔI_{CO} diventerà 140 μA. Dall'equazione (3-77) si ricava che per mantenere ΔI_C entro il valore di 1mA occorrerebbe un fattore di stabilizzazione S = 7 o minore.

Teoricamente si potrebbe scegliere il rapporto R_E/R_A in modo da ottenere la S voluta; esistono però dei limiti pratici al di là dei quali tale rapporto non può andare. Ad esempio, dall'eq. (3-81) si ricava:

$$\frac{R_A}{R_E} = \frac{S - 1}{1 - S(1 - \alpha)}$$

La quale indica che occorre un rapporto R_A/R_E pari a circa 7 per ottenere con un transistore in cui $\alpha = 0{,}98$, il desiderato valore di S; se R_E è uguale a 2000 Ω allora R_A = 14.000 Ω e porterà una corrente quasi uguale a quella del transistore; R_E non può essere resa troppo grande senza aumentare E_{CC} il che aumenta ancora la potenza occorrente al circuito. In pratica si può scegliere R_E di circa 1000 Ω, R_L = 2000 Ω, R_1 = 20.000 Ω ed R_2 = 10.000 Ω. Se $\alpha = 0{,}98$, il fattore di stabilità sarà quindi 6,3 mentre per lo stesso transistore, con circuito a polarizzazione fissa, il valore di S è 50. Il circuito più complesso si dimostra quindi utile nello stabilizzare il punto Q evitando così la possibilità di instabilità termica.

Non sempre è giustificata, nel campo delle frequenze audio, la spesa per il condensatore C_E che in tal caso può assumere valori compresi fra 50 e 100μF. La sua omissione riduce il guadagno perchè si introduce una reazione negativa, ma in compenso aumenta la resistenza di ingresso del circuito. Il minore carico per il generatore di segnale spesso migliora l'adattamento delle impedenze e può rendere utile l'omissione di C_E.

3-15. Accoppiamento in cascata degli amplificatori.

Negli amplificatori elettronici, un piccolo segnale di ingresso è successivamente amplificato da una catena di amplificatori, *disposti in cascata*, finchè si raggiunge il livello desiderato di corrente, tensione, o potenza.

Nei circuiti diposti in cascata, l'uscita di uno stadio amplificatore diventa l'ingresso del successivo. Nei circuiti progettati per amplificare soltanto i segnali alternativi, si devono separare i segnali alternati da quelli continui ed introdurre solo i primi all'ingresso dello stadio successivo.

Per separare le correnti alternate dalle continue, possono usarsi trasformatori o condensatori; in fig. 3-20 sono mostrati gli *accoppiamenti a trasformatore* ed a *resistenza e capacità* (RC) per gli amplificatori a transistore.

L'accoppiamento a trasformatore permette anche di trasformare le impedenze così da adattare meglio la impedenza di ingresso a quella di uscita

dell'amplificatore precedente. I trasformatori con una buona risposta in un ampio campo di frequenze sono generalmente costosi e di grandi dimensioni se paragonati ad un resistore o ad un condensatore, per cui l'accoppiamento a trasformatore si usa solo se l'adattamento delle impedenze è una precisa esigenza di progetto.

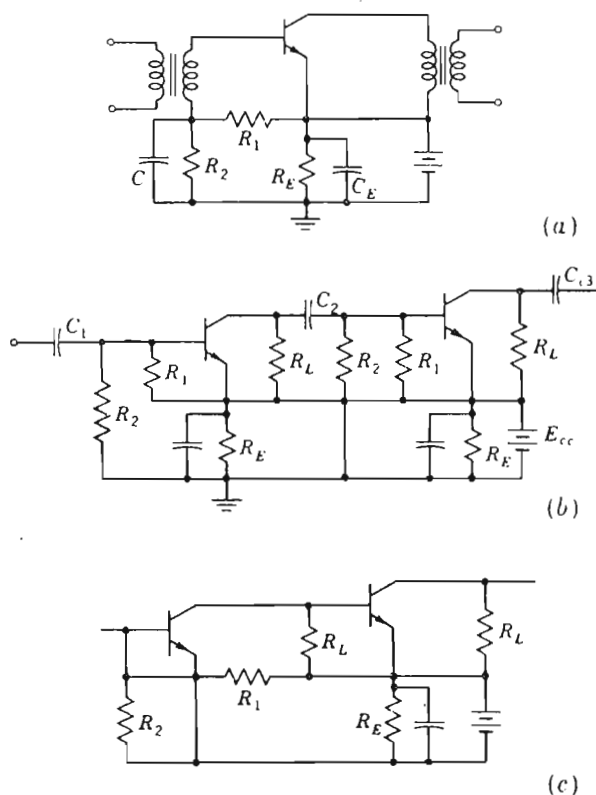



FIG. 3-20. — (*a*) accoppiamento a trasformatore; (*b*) accoppiamento e resistenza e capacità (RC); (*c*) accoppiamento diretto.

L'accoppiamento diretto, come in fig. 3-20c, presenta problemi di deriva della corrente, dovuta alla disposizione in cascata degli effetti di I_{CO} che è funzione della temperatura. L'accoppiamento diretto si usa solo quando è importante conservare il livello della corrente continua, come avviene in alcuni circuiti per calcolatrici analogiche. L'accoppiamento a resistenza e capacità è quello più comunemente impiegato.

A causa della presenza di elementi reattivi nei componenti di accoppia-

mento, la risposta di un amplificatore sarà funzione della frequenza; di questo problema discuteremo nel prossimo capitolo.

3-16. Capacità interne del transistore.

Quando un transistore lavora ad alta frequenza, il tempo occorrente per la diffusione delle cariche attraverso la regione di base diventa uguale ad una frazione apprezzabile di ciclo; l'effetto di ritardo che ne consegue può essere assimilato a quello derivante da una capacità disposta sulla giunzione, direttamente polarizzata, emettitore-base. Nel circuito ad emettitore comune, questa capacità apparirà collegata fra l'emettitore e l'effettivo terminale di base b'; perciò essa di solito viene indicata Con $C_{eb'}$. La capacità corrispondente alla zona priva di cariche della giunzione base-collettore, che è inversamente polarizzata, è anch'essa connessa al punto b' e produce una reazione nel circuito di ingresso; questa capacità è indicata con $C_{cb'}$ nello schema di fig. 3-21a.

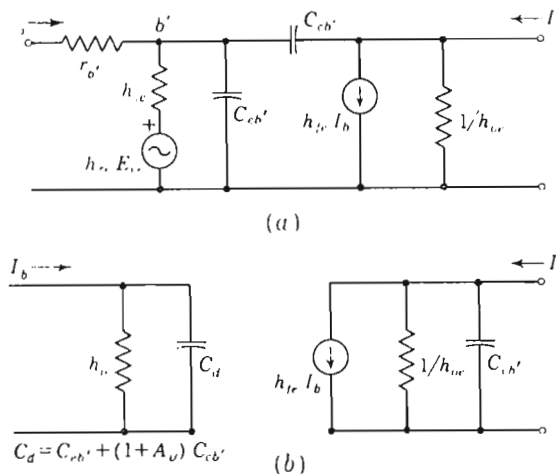



FIG. 3-21. — (*a*) Rappresentazione approssimata degli effetti delle capacità e dei fenomeni di diffusione alle alte frequenze; (*b*) circuito equivalente semplificato, ottenuto nell'ipotesi che sia $C_{cb'} \ll C_{eb'}$.

Ordinariamente, $C_{cb'} \ll C_{eb'}$ per cui il grado di reazione è piccolo. Allora si può considerare la capacità collettore-base connessa direttamente all'emettitore cioè ai capi di h_{oe}, come è indicato in fig. 3-21b. Questo è un circuito equivalente utile per le alte frequenze e verrà meglio approfondito nel capitolo 4. In questo circuito si omette generalmente $r_{b'}$ che si considera inclusa nella resistenza del generatore R_S.

Occorre ora definire la capacità di ingresso C_d. Dalla fig. 3-22 si trae:

$$\begin{aligned} I_x &= I_y + I_z \\ &= j\omega C_{eb'} E_{eb'} + j\omega C_{cb'}(E_{eb'} - E_0) \end{aligned} \qquad (3\text{-}82)$$

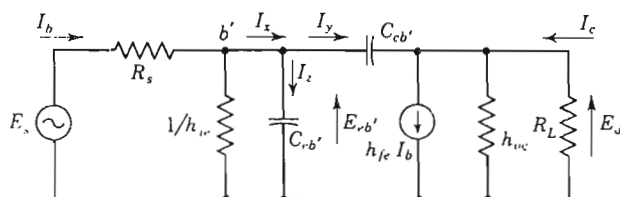



FIG. 3-22. — Determinazione della capacità C_D.

Si è già ricavato il guadagno di tensione:

$$A_{ve} = \frac{-h_{fe} R_L}{R_L \Delta_{he} + h_{ie}}$$

Spesso risulta $h_{ie} \gg R_L \Delta_{he}$. Ricordando le definizioni dei parametri h, si vede che $h_{fe}/h_{ie} = I_c/E_{be}$; questo rapporto può essere chiamato g_m, allora:

$$A_{ve} \cong \frac{-h_{fe} R_L}{h_{ie}} = -g_m R_L \qquad (3\text{-}83)$$

per il circuito ad emettitore comune.

La corrente I_y è piccola rispetto ad I_c, per cui la tensione di uscita E_o si può scrivere come

$$E_0 = -g_m R_L E_{eb'} \qquad (3\text{-}84)$$

L'equazione 3-82 mostra dunque l'esistenza di una suscettanza dovuta alle capacità interne:

$$Y = \frac{I_x}{E_{eb'}} = j\omega[C_{eb'} + C_{cb'}(1 + g_m R_L)]$$

cioè la capacità di reazione ed il circuito attivo hanno elevato la capacità di ingresso al valore C_d dato da:

$$C_d = C_{eb'} + C_{cb'}(1 + g_m R_L) \qquad (3\text{-}85)$$

Con i normali valori che assumono R_L e $C_{cb'}$, nei transistori per alta frequenza, l'aumento di $C_{eb'}$ è spesso importante. Quando il carico è indut-

tivo o capacitivo, suggeriamo di riferirsi al paragrafo 3-21 dove è descritto un fenomeno simile a proposito del triodo a vuoto. Sia nel transistore che nel triodo a vuoto, questo fenomeno è noto come *effetto Miller.*

Per effettuare uno studio più accurato del comportamento alle alte frequenze, ci si può servire del circuito a π ibrido di fig. 3-23; l'impiego di questo circuito è però complicato dal fatto che il generatore è funzione della tensione interna presente in b' invece che del segnale esterno applicato. Inoltre non è facile considerare separatamente i circuiti di ingresso e di uscita, come si è fatto in fig. 3-21b. Questo circuito è spesso usato per studiare gli amplificatori a transistori intorno al loro limite superiore di frequenza.

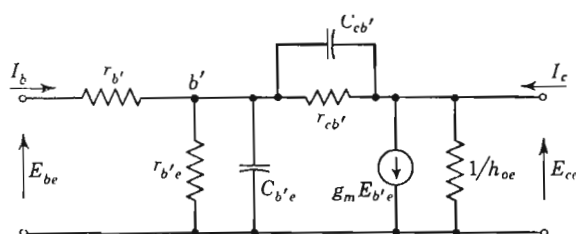



FIG. 3-23. — Circuito equivalente a π ibrido per alta frequenza.

A questo punto non è ancora possibile definire quale sia la regione ad alta frequenza per un dato amplificatore a transistori, dato che l'effetto della frequenza nel funzionamento di un transistore dipende dalle costanti di tempo dei circuiti di ingresso e di uscita. I valori delle capacità dipendono dalla tecnologia con cui è stato costruito il transistore; quelli a lega presentano di solito capacità più elevate; i transistori mesa ed epitassiali sono stati realizzati proprio per ridurre le capacità interne e quindi ampliare il campo di frequenze in cui i transistori possono essere impiegati.

Valori tipici per le capacità di un transistore al silicio costruito a lega sono $C_{eb'} = 800$ pf e $C_{cb'} = 15$pf, mentre uno del tipo mesa ha $C_{eb'} =$ $= 20$pf e $C_{cb'} = 2$pf.

Al diminuire dello spessore di base si riduce il tempo di transito e quindi il valore della capacità di diffusione; si riduce però anche la tensione di perforazione della giunzione base-collettore mentre può aumentare r'_b: entrambe queste variazioni sono indesiderate.

Inoltre si ha che, a causa del valore finito del tempo di transito, α risulta funzione della frequenza, ed il suo valore diminuisce al disopra di un determinato valore di frequenza f_α.

Nel capitolo seguente, si studierà in dettaglio l'effetto delle capacità e la dipendenza di α dalla frequenza.

3-17. Il triodo ed il pentodo nei circuiti elettronici.

Il triodo può essere considerato un elemento attivo lineare se i segnali di ingresso sono così piccoli da limitare il funzionamento alla parte lineare della caratteristica mutua dinamica; in tale caso lo si può studiare in maniera analoga al transistore.

Assumendo come variabili indipendenti e_c ed e_b si ha:

$$i_c = f(e_c, e_b)$$
$$i_b = f(e_c, e_b)$$

come nel caso precedente. Anche qui interessano le variazioni di corrente, e quindi si possono calcolare i differenziali totali:

$$di_c = \frac{\partial i_c}{\partial e_c} de_c + \frac{\partial i_c}{\partial e_b} de_b \qquad (3\text{-}86)$$

$$di_b = \frac{\partial i_b}{\partial e_c} de_c + \frac{\partial i_b}{\partial e_b} de_b \qquad (3\text{-}87)$$

Perchè queste relazioni siano utilizzabili, occorre che le variazioni siano finite; è lecito sostituire variazioni finite alle quantità infinitesime ora scritte, purchè le derivate parziali, cioè le pendenze delle caratteristiche, siano costanti nel campo di funzionamento che si considera.

Se scegliamo le tensioni come variabili indipendenti, si ottengono i parametri y per la rete equivalente; riferendosi alla equazione (3-14) si ha:

$$I_g = y_i E_g + y_r E_o \qquad (3\text{-}88)$$
$$I_p = y_f E_g + y_o E_o \qquad (3\text{-}89)$$

dove le variazioni si sono supposte sinoidali e sono state indicate con gli adatti pedici.

I parametri vengono definiti come:

$$y_i = \frac{1}{r_g} = \frac{I_g}{E_g} = \text{conduttanza di ingresso} \quad E_o = 0$$

$$y_r = g_r = \frac{I_g}{E_o} = \text{transconduttanza inversa} \quad E_g = 0$$

$$y_f = g_m = \frac{I_p}{E_g} = \text{transconduttanza} \quad E_o = 0$$

$$y_o = \frac{1}{r_p} = \frac{I_p}{E_o} = \text{conduttanza di placca} \quad E_g = 0$$

In molte applicazioni la griglia è negativa rispetto al catodo per cui sono trascurabili la corrente di griglia e le sue variazioni, sicchè y_I ed y_S sono

praticamente nulli finchè la frequenza non diventa tanto elevata da dover tener conto dell'effetto delle capacità interne. L'equazione (3-89) si può allora scrivere nel modo seguente:

$$g_m E_g = I_p - \frac{E_o}{r_p} \tag{3-90}$$

Questa equazione è valida per il circuito di fig. 3-24, in cui un generatore di corrente controllato, $g_m \mathbf{E}_g$, alimenta due rami con le correnti $\mathbf{I}_p$ e $-\mathbf{E}_o/r_p$; il segno negativo proviene dal fatto che si è definito $\mathbf{E}_o$ positivo rispetto al riferimento.

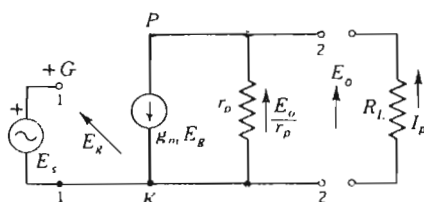



FIG. 3-24. — Circuito equivalente del triodo con generatore di corrente.

La rete compresa fra 1,1 e 2,2, è il *circuito equivalente di corrente* del triodo e descrive il funzionamento lineare del triodo stesso; la resistenza R_L è il carico.

È da notare che in seguito alla operazione di derivazione delle Eq. (3-86) e (3-87) sono state eliminate tutte le sorgenti continue di tensione e di corrente; il circuito equivalente è dunque valido solo per le grandezze alternative. Le tensioni continue di alimentazione servono a fornire energia ed a fissare il punto di lavoro Q, il quale, a sua volta, determina i valori di g_m ed r_p.

Moltiplicando l'equazione (3-90) per r_p si ottiene:

$$-\mu E_g + r_p I_p = E_o \tag{3-91}$$

che dà origine al circuito serie di fig. 3-25, noto come *circuito equivalente del triodo con generatore di tensione.* Il triodo viene qui indicato da un generatore controllato $\mu \mathbf{E}_g$ con una resistenza serie r_p, come si vede guardando tra i terminali 1,1 e 2,2. Anche qui $\mathbf{E}_g$ ed $\mathbf{E}_o$ sono definite positive rispetto al catodo che fa da riferimento. Questo circuito può essere usato al posto di quello di fig. 3-24 ed è adatto alle basse frequenze in corrispondenza delle quali le capacità interne non influenzano i valori dei parametri del dispositivo.

La famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 3-25 mostra che il pentodo si comporta come un generatore di corrente la cui uscita è controllata dalla tensione di griglia e la cui corrente è praticamente indipendente dalla tensione anodica; la fig. 3-25 indica inoltre la esistenza di una forte resistenza di placca, dell'ordine dei megaohm, il che suggerisce l'uso del circuito equivalente con generatore di corrente. In realtà il pentodo si comporta in maniera simile al triodo ma con lo schermo che fa da anodo, mentre l'anodo del pentodo serve solo a raccogliere la corrente.

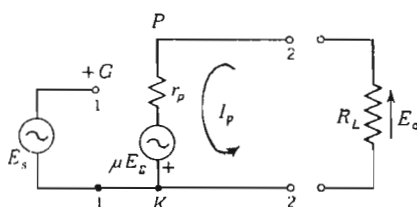



FIG. 3-25. — Circuito equivalente del triodo con generatore di tensione.

Per evitare valori di E_{bb} troppo alti, che potrebbero essere pericolosi, di solito di fa R_L piccola rispetto ad r_p; ciò nonostante, a causa del forte valore di g_m, si hanno ugualmente forti variazioni di corrente e quindi elevati guadagni di tensione. Se R_L è piccola, si può trascurare r_p nel circuito equivalente con generatore di corrente e disegnare un circuito del tipo di fig. 3-26. Anche questo circuito si fonda sulle ipotesi di linearità e di funzionamento in bassa frequenza.

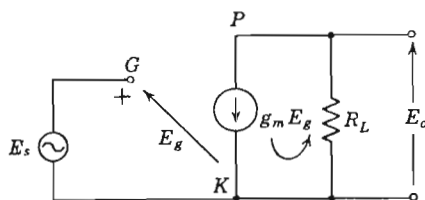



FIG. 3-26. — Circuito equivalente per un pentodo ad alto r_p.

3-18. Circuiti di polarizzazione e di accoppiamento.

La corrente anodica totale è:

$$i_b = I_b + i_p$$

Se questa corrente passa dal catodo alla massa attraverso un circuito parallelo RC come in fig. 3-27, la componente continua produrrà una tensione positiva verso il catodo uguale a:

$$E_k = R_k I_b \tag{3-92}$$

Questa tensione è positiva rispetto alla griglia e può essere impiegata per la polarizzazione negativa della griglia negli amplificatori a tubi. Il resistore R_k è scelto in modo da fornire la polarizzazione E_{cc} desiderata quando circola la corrente di riposo I_b.

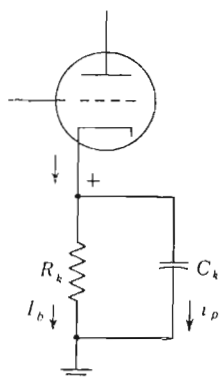



Fig. 3-27. — Analisi delle correnti nel circuito di polarizzazione catodica.

Se non si aggiunge C_k si ha una reazione negativa che riduce il guadagno. In tal caso infatti una variazione positiva della tensione di griglia produce un aumento di E_k cioè rende il catodo più positivo, il che compensa in parte l'aumento positivo della tensione di griglia. Se invece si sceglie C_k in modo che presenti una reattanza piccola rispetto ad R_k, esso provvederà a mantenere costante la tensione del catodo e le due componenti della corrente si dividono nel modo mostrato in fig. 3-27. Se $X_c \ll R_k$, alla più bassa frequenza che interessa, si può eliminare l'intero circuito di polarizzazione dal circuito equivalente; esso infatti determinerà il punto Q ma non avrà effetto sul funzionamento in alternata. Spesso è sufficiente fare $X_c = R_k/10$.

In fig. 3-28a è mostrato un amplificatore a triodo completo, del tipo con catodo comune.

Occorre fare qualche considerazione anche sul criterio di scelta del resistore R_S e del condensatore C_S dello schermo (fig. 3-28b). Si sceglierà il resistore di valore tale da ridurre E_{bb} alla tensione di schermo desiderata, quando circola la corrente di schermo I_{c2}. Il condensatore C_S deve mante-

nere lo schermo al potenziale catodico a tutte le frequenze del segnale di ingresso; C_S è in parallelo con il percorso interno degli elettroni dal catodo allo schermo, il quale avrà, nella maggior parte dei pentodi, una resistenza compresa fra 25.000 e 40.000 Ω. Allora C_S deve comportarsi come una reattanza trascurabile in parallelo con questa resistenza, alla più bassa frequenza che interessa.

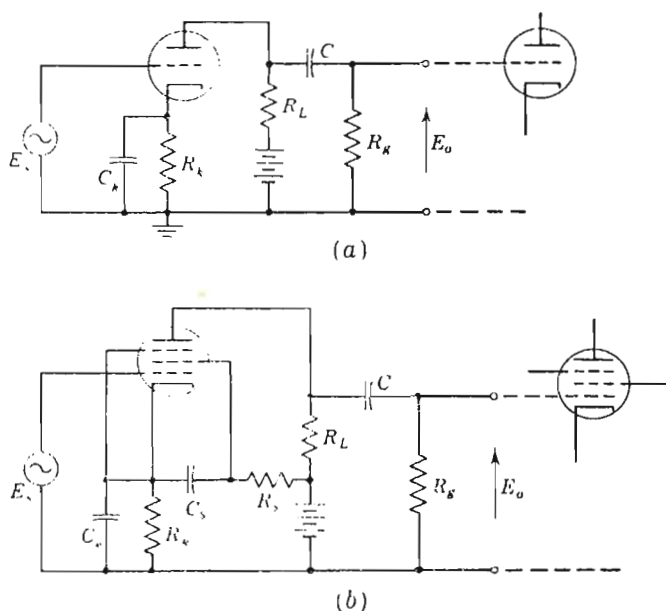



FIG. 3-28. (*a*) Impiego del triodo in un amplificatore con catodo a massa ad accoppiamento RC; (*b*) lo stesso che (*a*) per il pentodo.

Negli amplificatori per segnali alternati, occorre bloccare le tensioni continue tra gli stadi; i circuiti di fig. 3-28 che realizzano questa funzione mediante un condensatore C di blocco vengono detti amplificatori ad accoppiamento R-C; il resistore R_g detto di « fuga di griglia » disperde quei pochi elettroni, ad alta energia, che colpiscono la griglia negativa. Il resistore R_g dovrebbe essere grande rispetto ad R_L per non ridurre troppo la resistenza di carico del tubo. Il suo valore normale è compreso fra 0,5 e 2 megaohm.

I trasformatori vengono raramente usati per accoppiamenti fra gli stadi con tubi a vuoto poichè le alte impedenze di uscita richieste ne elevano il costo a valori proibitivi.

È da notare che il funzionamento di questi circuiti dipende dalla frequenza poichè in essi vi sono degli elementi reattivi; la loro risposta al variare della frequenza sarà studiata nel prossimo capitolo.

3-19. Tipi fondamentali di amplificatori a tubi.

I tipi fondamentali di amplificatori a tubi ripetono gli schemi già visti per i transistori; anche in questo caso occorre scegliere un elettrodo comune per trattare il tubo a vuoto, a tre elettrodi, come un quadripolo.

L'amplificatore a catodo comune ha il più alto guadagno in tensione ed è il più usato come amplificatore di tensione. Poichè di solito si mette a massa l'elettrodo comune (per le correnti alternate), questo circuito viene detto anche *amplificatore con catodo a massa* (fig. 3-29a).

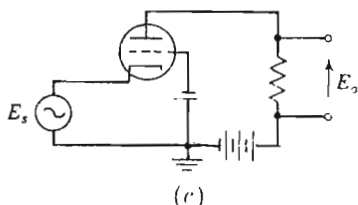
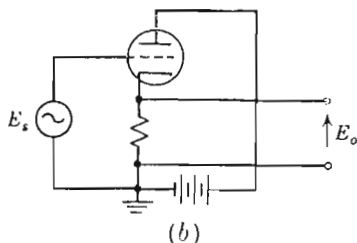
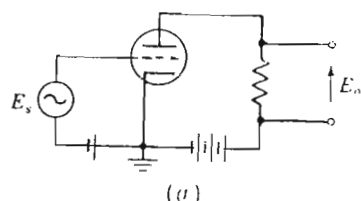



FIG. 3-29. — (a) Amplificatore a catodo comune; (b) amplificatore ad anodo comune; (c) amplificatore a griglia comune.

In fig. 3-29b invece, l'anodo è comune e l'uscita viene presa nel circuito catodico: la tensione del catodo è in fase con il segnale di ingresso ed oscilla quasi fra gli stessi limiti di tensione; questo circuito che è detto *inseguitore catodico*, presenta un guadagno di tensione minore dell'unità ed è molto utile come trasformatore da alta a bassa impedenza; esso ha dunque un impiego analogo all'amplificatore con uscita sull'emettitore.

Il terzo circuito, fig. 3-29c utilizza la griglia controllo come elettrodo comune; esso è detto *amplificatore con griglia comune* oppure *con griglia a massa*: presenta un discreto guadagno di tensione e serve da trasformatore di impedenza da un basso ad un alto valore. A causa dell'azione di schermo prodotta dalla griglia a massa fra catodo ed anodo, il circuito isola bene l'ingresso dall'uscita ed è pertanto utile per impiegare il triodo in alta frequenza. Il suo funzionamento è simile a quello del circuito a base comune.

In tutti e tre questi circuiti è possibile usare dei pentodi; in pratica però il pentodo viene utilizzato in circuiti con catodo a massa; questo è dovuto al fatto che, nei circuiti di fig. 3-29b e c il catodo non è a potenziale zero per le componenti alternate per cui si hanno delle difficoltà per il condensatore di griglia schermo che svolge la funzione di portare questo elettrodo al potenziale del catodo. Inoltre, la caratteristica fondamentale del pentodo è l'alta separazione che esso realizza fra l'ingresso e l'uscita e questa è una delle prestazioni fondamentali che vengono richieste agli amplificatori con catodo a massa.

In definitiva non esiste un circuito « più comune » poichè la scelta tra i vari tipi è determinata dalla condizione di ottenere le migliori prestazioni per ogni singola applicazione.

3-20. Analisi dell'amplificatore con catodo comune.

Per i triodi il carico viene scelto di solito fra 2 e 5 volte r_p mentre per i pentodi esso varia tra 0,05 e 0,25 M Ω. Il criterio con cui viene fissato il valore di R_L sarà chiarito tra breve.

Il punto Q viene fissato sulle caratteristiche con il criterio che le variazioni previste per il segnale siano comprese nella zona in cui le caratteristiche di collettore sono egualmente spaziate. I valori dei parametri del tubo sono allora quelli relativi al punto Q scelto e possono essere letti dalle tabelle dei dati relativi a questo punto di lavoro.

In fig. 3-30 è rappresentato un triodo in un circuito con catodo a massa.

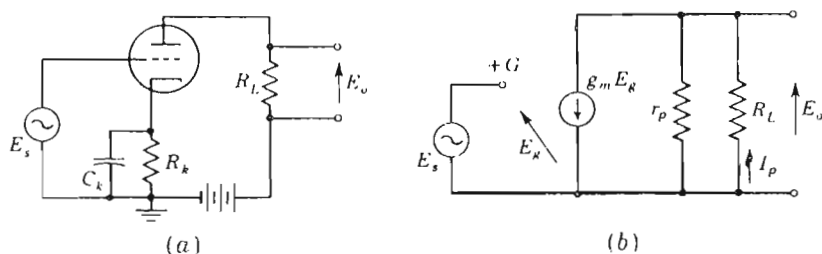



FIG. 3-30. — (*a*) Amplificatore a triodo con catodo a massa; (*b*) circuito equivalente di (*a*).

Dal circuito equivalente si vede che $I_p = - E_o/R_L$. Dall'equazione (3-90) si ottiene il guadagno di tensione:

$$A_v = \frac{E_o}{E_g} = \frac{-g_m R_L}{1 + R_L/r_p} = \frac{-\mu R_L}{r_p + R_L} \qquad (3\text{-}93)$$

Sembrerebbe che il guadagno aumenti all'aumentare di R_L; tuttavia quando si aumenta R_L si riduce la tensione anodica effettiva e ad un certo punto r_p comincia a crescere più rapidamente di R_L. Il guadagno che si può effettivamente raggiungere con valori ragionevoli di E_{bb} è circa $0{,}7 \div 0{,}8\ \mu$, come è mostrato in fig. 3-31. Poichè r_p è compreso fra 1 e 100KΩ i valori variabili della resistenza di carico sono compresi fra 5 e 200KΩ.

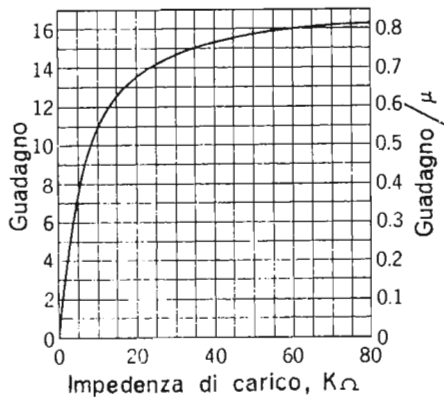



FIG. 3-31. — Variazione del guadagno con l'impedenza di carico per un triodo 6j5 con $E_{bb} = 250$ v, $\mu = 20$, $r_p = 7700\ \Omega$

Esempio — *Alla griglia di un triodo è applicato un segnale di* 1 *V efficace a* 1000 *Hz. L'impedenza di carico è* $Z_L = 10.000 + j16.000\ \Omega$ *e la frequenza è considerata bassa per il triodo. Calcolare il valore della corrente anodica* I_p *ed il guadagno del circuito se* $\mu = 20$ *ed* $r_p = 10.000\ \Omega$.

La tensione griglia-catodo è $E_g = 1$; $\mu E_g = 20$ *allora*:

$$I_p = \frac{\mu E_g}{r_p + Z_L} = \frac{20}{10.000 + 10.000 + j16.000}$$

$$\frac{20}{25.600/\underline{38{,}6^0}} = 0{,}000782/\underline{-38{,}6^0}\ \text{A}$$

E la tensione di uscita è allora:

$$E_0 = - I_p Z_L = - 7{,}82 \times 10^{-4}/\underline{-38{,}6^0} \times 18.900/\underline{58^0}$$
$$= - 14{,}8/\underline{19{,}4^0} = 14{,}8/\underline{199{,}4^0}\ \text{volt}$$

quindi il guadagno è

$$A = \frac{E_o}{E_p} = \frac{14{,}8/\underline{199{,}4^o}}{1/\underline{0^o}} = 14{,}8/\underline{199{,}4^o}$$

L'amplificatore ha dunque un guadagno di 14,8 *ed uno spostamento di fase di* 19,4°, *oltre i* 180° *propri di questo tipo di circuito.*

Per il circuito a pentodo di fig. 3-32, si può calcolare il guadagno mediante la formula

$$E_o = - g_m R_L E_g$$

$$A_V = \frac{E_o}{E_g} = - g_m R_L \qquad (3\text{-}94)$$

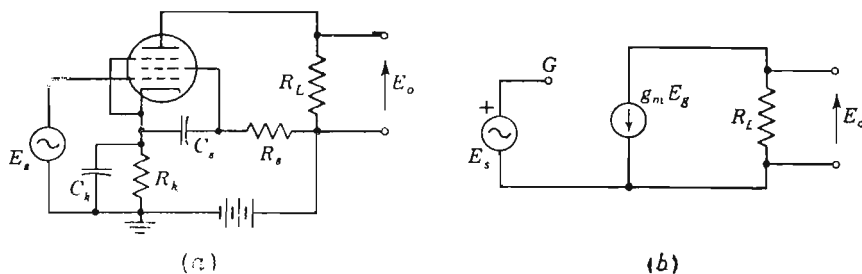



FIG. 3-32. — (*a*) Amplificatore a pentodo con catodo a massa; (*b*) circuito equivalente di (*a*).

da essi risulta che A_V è direttamente proporzionale ad R_L come c'era da attendersi per un generatore di corrente. I valori del carico per un pentodo, si scelgono fra 100.000 e 250.000 Ω per evitare di impiegare una tensione E_{bb} superiore a 300÷350 volt. Con questi valori di carico resistivo, gli effettivi valori di E_b saranno bassi, spesso compresi fra 50 e 100 volt. Il valore più adatto di R_s si sceglierà sperimentalmente in modo da ottenere il valore di guadagno voluto.

Il guadagno, come risulta dalla relativa formula, è proporzionale alla transconduttanza g_m; questo parametro è un elemento importante nella scelta del tubo per un determinato amplificatore.

3-21. Il circuito di ingresso.

In fig. 3-33 sono indicate le capacità interelettrodiche di un triodo. Il flusso di elettroni nel circuito di griglia degli amplificatori con emettitore comune polarizzati con griglia negativa è molto piccolo; a questa corrente bisogna però aggiungere quella capacitiva attraverso le capacità interelet-

trodiche del tubo. Queste capacità sono ordinariamente di pochi picofarad, ma hanno un considerevole effetto sul funzionamento del triodo già a frequenza di 30-50 kHz per il fatto che si trovano in un circuito attivo.

Considerando la capacità di uscita C_{pk} parte del carico Z_L, al quale essa si trova direttamente in parallelo, si ottiene il circuito equivalente di fig. 3-33 b. La corrente di griglia è:

$$I_g = I_1 + I_2 = j\omega C_{gk}E_s - j\omega C_{gp}(E_0 - E_s) \quad (3\text{-}95)$$

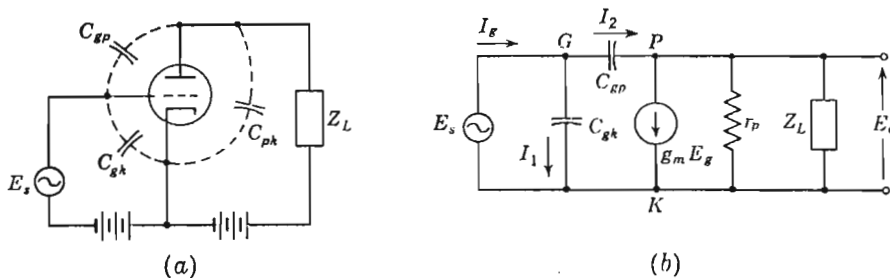



FIG. 3-33. — (*a*) Le capacità interne del triodo; (*b*) il circuito equivalente di (*a*) con C_{pK} incluso in Z_L.

Di solito $\mathbf{I}_2$ è molto piccola rispetto a $g_m\mathbf{E}_g$, ed è quindi trascurabile nel circuito di uscita. Quindi:

$$E_o = - g_m E_s \frac{r_p Z_L}{r_p + Z_L} \quad (3\text{-}96)$$

Sostituendo questa espressione nella eq. (3-95) si ha:

$$Y_g = \frac{I_g}{E_s} = j\omega \left[C_{gk} + C_{gp}\left(1 + g_m \frac{r_p Z_L}{r_p + Z_L}\right)\right]$$

Il carico anodico è

$$Z' = \frac{r_p Z_L}{r_p + Z_L} = R' \pm jX'$$

in cui il segno dipende dal tipo di reattanza presente nel carico. L'ammettenza $\mathbf{Y}_g$ è dunque

$$Y_g = - g_m\omega C_{gp}(\pm X') + j\omega[C_{gk} + C_{gp}(1 + g_m R')] \quad (3\text{-}97)$$

Il circuito di ingresso consiste dunque di una resistenza

$$R_{in} = - \frac{1}{g_m\omega C_{gp}(\pm X')} \quad (3\text{-}98)$$

in parallelo con una capacità

$$C_{in} = C_{gk} + C_{gp}(1 + g_m R') \tag{3-99}$$

come è mostrato in fig. 3-34. Questa capacità è più grande di C_{gk} a causa dell'effetto Miller.

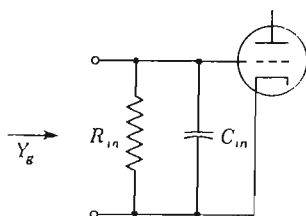



FIG. 3-34. — Il circuito di ingresso.

Dai segni dell'eq. (3-97) si ottengono tre possibilità per la capacità di ingresso C_{in} e la resistenza di shunt.

carico	*circuito di ingresso*	
Capacitivo	$R_{in} > 0$	C_{in}
Resistivo	∞	C_{in}
Induttivo	$R_{in} < 0$	C_{in}

Con carichi induttivi, esiste una capacità C_{in} ma questa è shuntata da una resistenza negativa il cui valore è inversamente proporzionale alla frequenza. Questa condizione indica una reazione dal circuito anodico a quello di griglia attraverso C_{gp}, la quale compensa parte delle perdite del circuito di ingresso; cioè la resistenza negativa compensa una parte delle resistenze positive presenti. Se la resistenza negativa è tale da compensare tutta la resistenza positiva, il circuito diventa instabile e può oscillare. Questa intrinseca instabilità ed i valori che assume C_{in}, generalmente limitano l'uso dei triodi a frequenze di 100 KHz o anche meno.

I pentodi, che sono costruiti in modo da avere C_{gp} molto piccola, non presentano una notevole reazione e quindi possono avere una amplificazione stabile a frequenze di parecchi Megahertz in circuiti con catodo a massa.

Esempio — *Un triodo in cui* $r_p = 7.700\ \Omega$, $g_m = 2.200\ \mu mho$, $C_{gp} = 1{,}5pF$, $C_{gk} = 1{,}6pF$ *e* $C_{pk} = 0{,}5\ pF$ *funziona con un carico resistivo di* 40.000 Ω.

Calcolare le grandezze equivalenti del circuito di ingresso ad una frequenza di 10MHz, nel circuito con catodo a massa.

Alla frequenza di 10 MHz si ha:

$$Y = 0{,}25 \times 10^{-4} + j2\pi \times 10^7 \times 0{,}5 \times 10^{-12}$$
$$= 0{,}402 \times 10^{-4}\ \underline{/51^0}$$
$$Z_L = 2{,}48 \times 10^4 \underline{/-51^0}$$

per cui:

$$\frac{r_p Z_L}{r_p + Z_L} = \frac{7700 \times 24.800\underline{/-51^0}}{7700 + (15{,}3 - j19{,}3) \times 10^3}$$
$$R' + jX' = 5{,}03 \times 10^3 \underline{/-11^0} = (4{,}9 - j0{,}91) \times 10^3$$

quindi:

$$R_{in} = -\frac{1}{g_m \omega C_{gp}(-X')} = \frac{1}{0{,}0022 \times 2\pi \times 10^7 \times 1{,}5 \times 10^{-12} \times 0{,}91 \times 10^3}$$
$$= 5300 \text{ ohm}$$
$$C_{in} = C_{gk} + C_{gp}(1 + g_m R')$$
$$= 1{,}6 + 1{,}5(1 + 0{,}0022 \times 4{,}9 \times 10^3) = 19{,}3 \text{ pF}$$

A 10 MHz, il circuito d'ingresso del triodo con carico anodico resistivo di 40.000 Ω *equivale ad un condensatore di* 19,3 *pF in parallelo con* 5.300 Ω. *Questa è una resistenza di ingresso troppo bassa che rende questo triodo non adatto per frequenze così elevate.*

3-22. L'inseguitore catodico: amplificatore con anodo comune.

Per realizzare un circuito con anodo comune, si pone il carico R_k nel circuito catodico come in fig. 3-35. Dal circuito equivalente si ricava la seguente condizione di equilibrio delle correnti:

$$g_m E_g - E_o \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_k}\right) = 0 \tag{3-100}$$

e

$$E_s - E_o = E_g \tag{3-101}$$

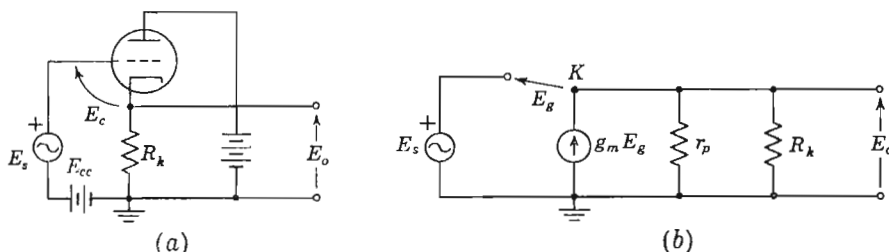



FIG. 3-35. — (*a*) L'inseguitore catodico; (*b*) il circuito equivalente di (*a*).

sostituendo si ottiene:

$$A_v = \frac{E_o}{E_s} = \frac{\mu}{\mu + 1 + r_p/R_k} = \frac{[\mu/(\mu + 1)]R_k}{r_p/(\mu + 1) + R_k} \tag{3-102}$$

la quale mostra che il guadagno è minore dell'unità e tende al valore di $\mu/(\mu+1)$ per $R_k \gg r_p$; inoltre non c'è inversione di fase. Per ricavare la impedenza di uscita dell'amplificatore, supponiamo di iniettare in uscita la corrente $\mathbf{I}_o$; il rapporto $\mathbf{E}_o/\mathbf{I}_o$, con E_s cortocircuitato, è la impedenza $\mathbf{Z}_u$. Scrivendo la relazione di equilibrio delle correnti si ha:

$$g_m E_g + I_o - E_o\left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_k}\right) = 0 \tag{3-103}$$

allora

$$Z_u = \frac{R_k r_p/(\mu + 1)}{R_k + r_p/(\mu + 1)} \tag{3-104}$$

Si vede allora che l'impedenza di uscita è data da una resistenza $r_p/(\mu+1) \cong 1/g_m$ in parallelo con il carico R_k. L'equazione (3-102) conferma che in questo tipo di amplificatore il valore della resistenza interna del tubo risulta piccola rispetto ad r_p.

Il circuito di fig. 3-36 presenta una bassa impedenza di uscita ed è perciò utile come trasformatore da alta a bassa impedenza.

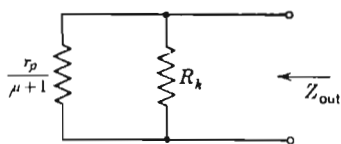



FIG. 3-36. — Il circuito di uscita dell'inseguitore catodico.

In parallelo con Z_u ci sarà C_{pk} e, quando si usa un circuito con riscaldatore a massa, ci sarà anche la capacità catodo-riscaldatore C_h.

Queste capacità sono piccole, ma limitano ugualmente la frequenza a cui è possibile usare tale circuito.

L'inseguitore catodico presenta una ammettenza di ingresso molto più piccola di quella del circuito con catodo a massa; se si considerano anche le capacità interne, il circuito equivalente diventa quello mostrato in fig. 3-37. Trascurando C_{pk} si ha:

$$I_g = I_1 + I_2 = j\omega C_{gp} E_s + j\omega C_{gk}(E_s - E_o)$$

ma $\mathbf{E_o/E_S = A}$ ed allora:

$$Y_g = \frac{I_g}{E_s} = j\omega[C_{gp} + C_{gk}(1 - A)] \tag{3-105}$$

Cioè l'ammettenza di ingresso è una capacità:

$$C_{in} = C_{gp} + C_{gk}(1 - A) \tag{3-106}$$

poichè $|\mathbf{A}|$ è minore ma prossimo all'unità, la capacità di ingresso è quasi quella di C_{gp} da sola, il che è molto vantaggioso alle alte frequenze.

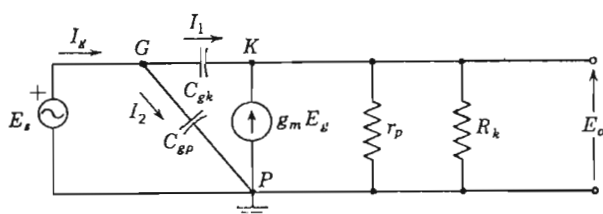



FIG. 3-37. — Il circuito equivalente dell'inseguitore catodico.

3-23. Progetto dell'inseguitore catodico.

Dopo avere scelto R_k in modo da ottenere la Z_u o il guadagno desiderato, si può scegliere il tubo in modo che:

$$Z_u = \frac{r_p}{\mu + 1} \simeq \frac{1}{g_m} \qquad \text{per } \mu > 10$$

Si trova che per qualunque valore di $R_k/r_p > 1$ e $\mu > 20$ si ottiene un guadagno maggiore di 0,9; perciò la scelta di R_k non è critica. Se però il circuito del riscaldatore del catodo viene alimentato con corrente alternata, con valori di R_k troppo grandi potrebbe aversi un ronzio nel circuito di uscita a causa della capacità C_h come è mostrato in fig. 3-38. Questo inconveniente può essere evitato se si sceglie R_k inferiore a 50 KΩ. A questo punto si traccia, sulle caratteristiche anodiche, la linea di carico relativa ad R_k e ad E_{bb}. Riferendosi alla figura 3-35, si può scrivere la seguente equazione del circuito di griglia relativa ai valori istantanei:

$$e_s = e_c + R_k i_b \tag{3-107}$$

Nell'ipotesi che sia $\mu = 20$, $r_p = 7.700\ \Omega$, $R_k = 30\text{k}\ \Omega$ ed $E_{bb} = 300\text{V}$, la retta di carico è quella di fig. 3-39. Scegliendo alcuni dei punti di inter-

sezione con le caratteristiche, ed applicando la eq. 3-107, si può compilare la seguente tabella:

e_c, *volt*	i_b, *mA*	$R_k i_b$, *volt*	e_s, *volt*
0	7,4	222	222
— 6	4,3	129	123
— 12	1,6	48	36
— 18	0,0	0	— 18

Il massimo segnale di ingresso sarà quello che provoca una escursione della tensione di griglia fra l'interdizione ed $e_c = 0$; la sua ampiezza è dunque: $222 - (-18) = 240V$ picco a picco;

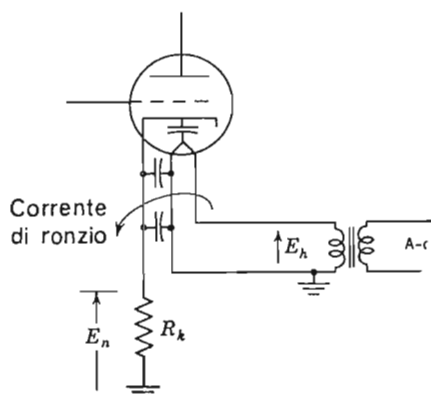



Fig. 3-38. — Meccanismo con cui si introduce il ronzio nella R_K

nel punto di mezzo di questo intervallo, $R_K i_b = e_o = 111V$, quindi:

$$i_b = I_b = {}^{111}/_{30.000} = 0{,}0037 \text{ A}$$

Ciò permette di fissare il punto Q come in fig. 3-39; il punto di riposo della griglia è approssimativamente — 7,5 V.

In corrispondenza del punto Q, la tensione catodo-massa è + 111V e quella griglia-massa + 103,5V quindi la griglia è a — 7,5V rispetto al catodo.

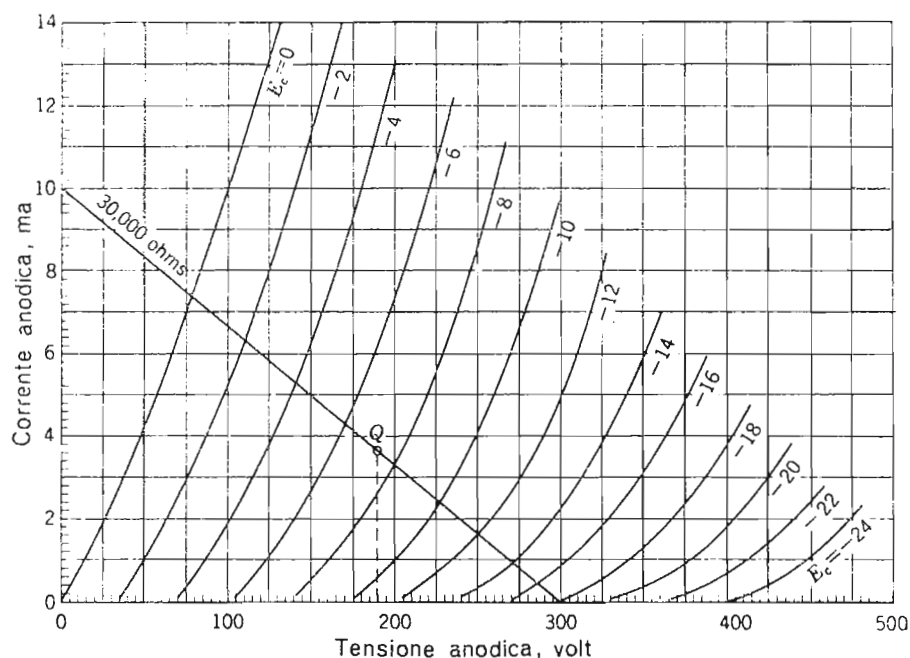



FIG. 3-39. — Linea di carico dell'inseguitore catodico per $R_K = 30$ KΩ.

Il guadagno sarà:

$$A_v = 222/220 = 0,925$$

Il che conferma quanto si è detto a proposito di R_K.

In fig. 3-40 è mostrato come si ottiene in pratica la polarizzazione necessaria. Il catodo deve trovarsi a + 111V mentre la griglia a + 103,5V; quindi:

$$\frac{R_K}{R_1 + R_K} = \frac{103,5}{111}$$

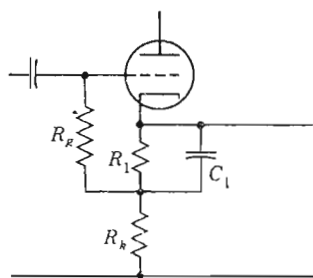



FIG. 3-40. — Un metodo di polarizzazione dell'inseguitore catodico.

poichè è anche $R_1 + R_k = 30K\ \Omega$, ne segue che è possibile ottenere la polarizzazione voluta se è $R_k = 28.000\ \Omega$ ed $R_1 = 2.000\ \Omega$.

3-24. Inseguitore catodico ad alta impedenza di ingresso.

A causa dell'accoppiamento fra i circuiti di uscita e di ingresso, il circuito di fig. 3-40 consente di realizzare un inseguitore catodico con un'impedenza di ingresso molto elevata.

Nel circuito equivalente di fig. 3-41, sono stati omessi il resistore R_1 ed il condensatore in parallelo ad esso. Supponendo che la resistenza di dispersione di griglia sia di qualche Megaohm e quindi grande rispetto ad R_k si ha:

$$g_m E_g + I_g - E_o\left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_k}\right) = 0 \qquad (3\text{-}108)$$

$$E_g = E_s - E_o = I_g R_g$$

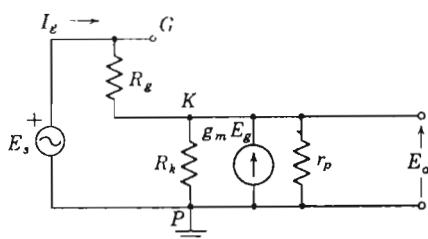



FIG. 3-41. — Circuito equivalente della (3-40).

Ed il guadagno è:

$$A_v = \frac{E_o}{E_s} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_g(1 + R_k/r_p)}{R_k(1 + g_m R_g)}} \qquad (3\text{-}109)$$

di solito $R_k/r_p \gg 1$ e $g_m R_g \gg 1$ per cui il guadagno è:

$$A_v \cong \frac{\mu}{\mu + 1} \qquad (3\text{-}110)$$

Eliminando $\mathbf{E}_o$ ed $\mathbf{E}_g$ si calcola la resistenza di ingresso:

$$R_{in} = \frac{E_s}{I_g} = R_g + \frac{R_k(1 + g_m R_g)}{1 + R_k/r_p} \qquad (3\text{-}111)$$

e con la stessa approssimazione fatta più sopra risulta:

$$R_{in} \cong R_g(\mu + 1) \qquad (3\text{-}112)$$

La resistenza di ingresso è dunque data dal prodotto di R_g per un numero molto grande. Con procedimento simile si può dimostrare che $C_{in} = C_{gk} /(\mu + 1)$. Questo circuito è importante in quei casi in cui occorre non caricare il generatore di segnale, oppure quando occorre una piccola costante di tempo $C_{in}R_{in}$.

3-25. Amplificatore con griglia comune o ad ingresso catodico.

In fig. 3-42. è mostrato un amplificatore con griglia comune. La corrente anodica è la stessa che attraversa il generatore di ingresso E_s la cui resistenza interna va considerata nel circuito equivalente. Le equazioni di questo circuito sono:

$$\mu E_g + E_s - I_p(r_p + R_s + R_L) = 0 \tag{3-113}$$

$$E_g = -E_s - R_s I_p \tag{3-114}$$

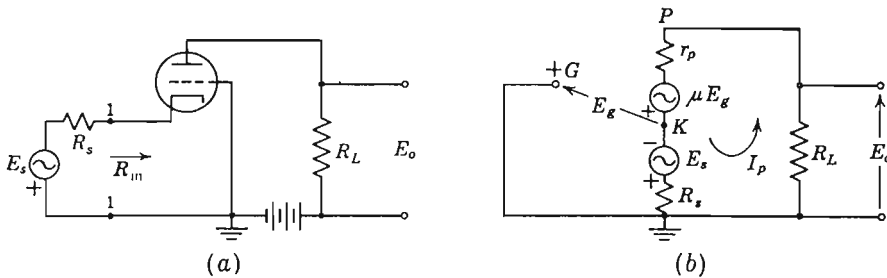



FIG. 3-42. — Amplificatore con griglia comune e suo circuito equivalente.

Poichè la caduta di tensione sul carico è $E_o = - R_L I_p$, il guadagno di tensione sarà:

$$A_v = \frac{E_o}{E_s} = \frac{(\mu + 1)R_L}{r_p + (\mu + 1)R_s + R_L} \tag{3-115}$$

e non vi è inversione di fase. Apparentemente il tubo ha un fattore di amplificazione di $\mu + 1$ dato che la tensione di ingresso è non solo moltiplicata per μ ma è anche sommata direttamente all'uscita.

Dall'eq. (3-115) si vede che il circuito presenta una resistenza interna, cioè una impedenza di uscita data da:

$$R_u = r_p + (\mu + 1)R_s \tag{3-116}$$

Mentre l'impedenza di ingresso vista dai punti 1,1 del generatore di ingresso risulta essere:

$$R_{in} = \frac{r_p + R_L}{\mu + 1} \tag{3-117}$$

Cioè il circuito trasforma la resistenza del circuito di uscita secondo il fattore $1/(\mu + 1)$ mentre l'inseguitore catodico aumenta la resistenza di ingresso secondo il fattore $(\mu + 1)$; la trasformazione di impedenza, che si ha in questo circuito, è una delle sue più importanti caratteristiche. Inoltre la griglia a massa crea un isolamento elettrostatico fra ingresso ed uscita il che riduce la capacità di ingresso al valore C_{gk} e quella di uscita a C_{gp}. In fig. 3-43 sono paragonati i circuiti equivalenti relativi ai tre montaggi fondamentali.

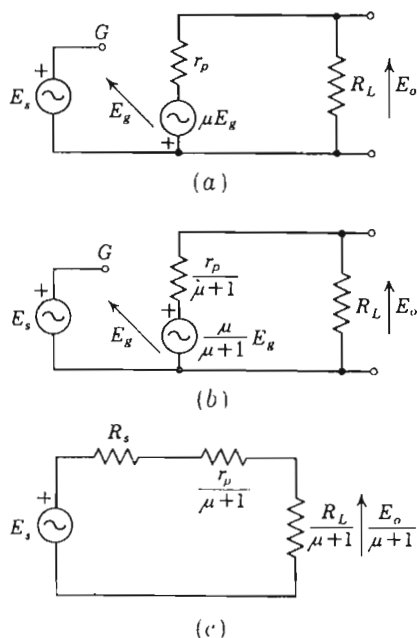



FIG. 3-43. — Confronto fra i circuiti equivalenti; (*a*) catodo a massa; (*b*) anodo a massa; (*c*) griglia a massa.

Poichè nell'amplificatore con griglia comune i circuiti di ingresso ed uscita sono in serie, esso risulta analogo ad una pompa che sposta acqua da un recipiente a bassa pressione ad uno ad alta pressione.

3-26. Amplificatori accoppiati.

La capacità di trasformare le impedenze proprie dei tre tipi fondamentali di amplificatore a transistori o a tubi, indica che si possono ottenere utili risultati adattando il generatore di ingresso ed il carico mediante diversi tipi di circuiti disposti in cascata.

Uno di questi circuiti è quello ad accoppiamento catodico di fig. 3-44. Il carico di T_1, che è un inseguitore catodico, è dato dal parallelo fra R_k e la resistenza R_{in} dell'amplificatore ad ingresso catodicoT_2. Di solito R_k »
» R_{in} per cui il guadagno è:

$$A_{v1} = \frac{[\mu_1/(\mu_1 + 1)]R_{in}}{r_{p1}/(\mu_1 + 1) + R_{in}} \tag{3-118}$$

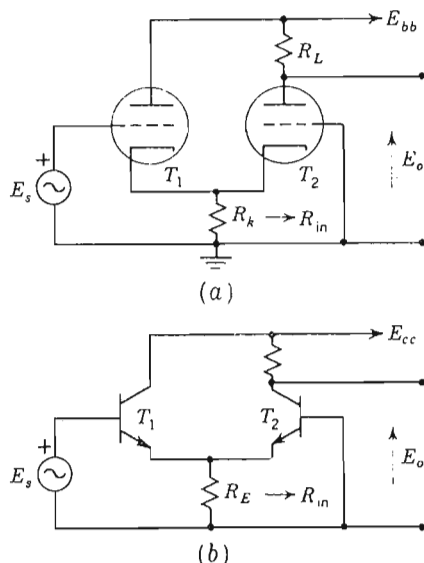



FIG. 3-44. — (*a*) Amplificatore ad accoppiamento catodico; (*b*) amplificatore ad accoppiamento di emettitore.

Lo stadio ad ingresso catodico T_2 ha un guadagno:

$$A_{v2} = \frac{(\mu_2 + 1) R_L}{r_{p2} + R_L} \tag{3-119}$$

Generalmente si usa un doppio triodo per cui $\mu_1 = \mu_2$ ed $r_{p1} = r_{p2}$, ed il guadagno dell'intero circuito è:

$$A_v = \frac{\mu R_L}{2r_p + R_L} \tag{3-120}$$

Il circuito presenta l'alta impedenza di ingresso, propria dell'inseguitore catodico, un guadagno quasi uguale a quello dell'amplificatore con catodo a massa ed una resistenza di uscita di $2r_p$; inoltre non c'è inversione di fase.

Altri circuiti, derivati da questo, vengono impiegati come amplificatori differenziali o amplificatori ad accoppiamento diretto (d.c.).

La versione a transistori, mostrata in fig. 3-44b, presenta proprietà simili ed è particolarmente adatta ad essere realizzata a circuiti integrati. Il guadagno di corrente dell'intero circuito è approssimativamente:

$$A_i \cong -(1+\beta_1)\frac{\beta_2}{1+\beta_2} = -\beta \tag{3-121}$$

se i transistori sono identici.

Un altro tipo di amplificatore accoppiato è il circuito di Darlington mostrato in fig. 3-45. Anche questo circuito è adattato ad essere realizzato a circuiti integrati.

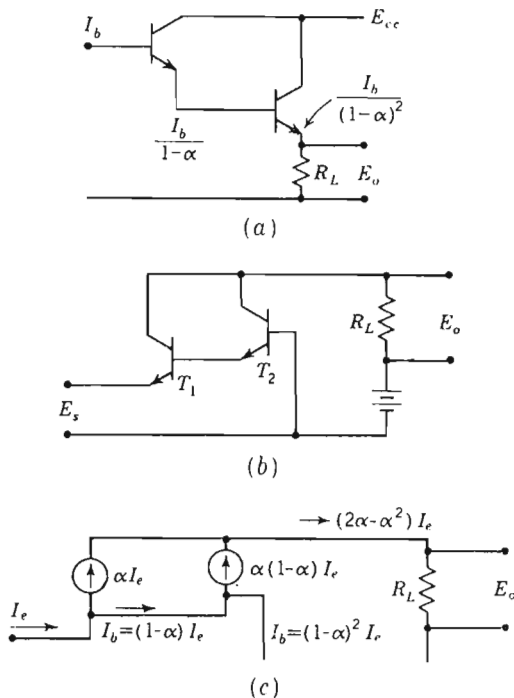



FIG. 3-45. — Alcuni tipi di amplificatore Darlington.

Il tipo mostrato in fig. 3-45a, unisce l'alta impedenza di ingresso propria dell'ordinario « emitter follower », moltiplicata per $1/(1-\alpha)$ all'elevato guadagno di corrente che è dato approssimativamente da $\beta_1\beta_2$.

Il tipo mostrato in fig. 3-45b e c, a base comune, ha un guadagno di corrente molto prossimo all'unità. La corrente di base del primo transistore è

moltiplicata per l'α del secondo mentre le due correnti di collettore si sommano nel carico. L'uscita E_0 è quindi:

$$E_0 = [\alpha + \alpha(1 - \alpha)]I_E R_L = [\alpha(2 - \alpha)]I_E R_L \qquad (3\text{-}122)$$

Se ad esempio in entrambi i transistori $\alpha = 0{,}98$, in questa connessione essi si comporteranno come un transistore unico il cui $\alpha = 0{,}9996$.

3-27. Criteri di progetto.

Ogni componente, attivo o passivo di un certo tipo, viene costruito con parametri e caratteristiche interne comprese entro una determinata tolleranza, a causa delle variazioni nei materiali di partenza e nei processi di fabbricazione. I componenti elettronici passivi vengono ordinariamente prodotti con una tolleranza del $\pm$ 10%; a prezzo più elevato si possono però avere componenti con tolleranze più ristrette. Invece i componenti attivi, soprattutto i transistori, possono avere tolleranze molto più ampie su alcuni parametri.

Può capitare che un amplificatore venga costruito con un resistore di carico che è al limite del — 10% e con un transistore il cui β è anche esso al limite inferiore.

Il guadagno misurato sarà allora parecchio inferiore e quello calcolato Esiste poi la possibilità che i componenti utilizzati si trovino tutti al valore limite superiore della tolleranza o, più probabilmente, abbiano un valore intermedio fra i limiti estremi. Di conseguenza i circuiti elettronici non sono sempre esatti, benchè il loro funzionamento possa essere reso più stabile e preciso mediante particolari tecniche e soprattutto mediante la controreazione. Il progettista di circuiti adotta il criterio della condizione più sfavorevole e controlla il suo progetto facendo l'ipotesi che si verifichi una combinazione di parametri dei componenti e delle tensioni di alimentazione tale da dar luogo alla peggiore condizione di funzionamento; se in questa condizione il circuito svolge la sua funzione nei limiti previsti, allora il progetto è soddisfacente. Gran parte del controllo dei progetti viene oggi effettuato con calcolatori elettronici.

PROBLEMI

3-1. Determinare i valori dei parametri h delle eq. (3-16) e (3-17) in termini dei parametri z dati dalle eq. (3-10) e (3-11).

3-2. Calcolare un circuito equivalente attivo ad un solo generatore, usando i parametri y e operando algebricamente sulle equazioni fondamentali.

3-3. Calcolare, impiegando i parametri h, la resistenza di ingresso, quella di uscita, A_I ed A_p espressi in decibel per un amplificatore ad emettitore comune con $R_s = 100\ \Omega$, $R_L = 25K\ \Omega$, $h_{fe} = 30$, $h_{ib} = 43\ \Omega$, $h_{rb} = 10 \cdot 10^{-4}$, ed $h_{ob} = 0{,}2\mu$mho.

3-4. Un triodo con potenza di uscita di 0,275 watt, alimenta un trasformatore il cui rendimento è del 64%. Quali sono le perdite del trasformatore ed il valore della potenza nel carico espresse in decibel e riferite a 0,001 watt?

3-5. Un microfono con uscita di — 56db ed una resistenza di 200 Ω alimenta un amplificatore la cui uscita è di + 31db su un carico di 16 Ω (riferito a 0,001 watt). (a) calcolare il guadagno che deve avere l'amplificatore, espresso in decibel; (b) calcolare la potenza di uscita dell'amplificatore espressa in watt.

3-6. Ricavare un'espressione del fattore di stabilità S per il circuito di fig. 3-17a.

3-7. Nel circuito di fig. 3-18 la stabilità deve essere almeno 5. Progettare il circuito con $\alpha = 0{,}97$, $E_{cc} = 22$v ed $R_L = 3_K\ \Omega$.

3-8. Progettare il circuito di fig. 3-18 usando un transistore N-P-N 2N1121 in modo che sia S = 6 sapendo che $E_{CE} = 5$v, $I_c = 2$mA, $E_{BE} = 0{,}6$v, $h_{fe} = 72$.

3-9. Calcolare un'espressione del fattore di stabilità per il circuito di fig. 3-17c.

3-10. Usando le formule esatte, calcolare i valori di R_i, R_O, A_I ed A_p per un amplificatore ad emettitore comune in cui $r_e = 25\ \Omega$, $r_b = 500\ \Omega$, $r_c = 0{,}5M\ \Omega$, $\alpha = 0{,}96$, $R_s = 100\ \Omega$, $R_L = 25K\ \Omega$. Calcolare le stesse quantità con le formule approssimate e controllare le eventuali differenze.

3-11. Calcolare il guadagno di tensione e di corrente per il transistore del problema 3-3 nei circuiti a base e ad emettitore comune, per $R_s = 1.000\ \Omega$ ed $R_L = 5.000\ \Omega$.

3-12. Un transistore avente $h_{ib} = 34\ \Omega$, $h_{rb} = 0{,}0005$, $h_{ob} = 0{,}5\mu$mho, ed $h_{fe} = 150$ deve fornire una un'uscita di 4 volt su un carico di 12K Ω. Calcolare la tensione di ingresso che deve fornire un generatore di 500 Ω di impedenza interna.

3-13. Per il transistore N-P-N 2N332, con $h_{fe} = 15$, $h_{ib} = 43\ \Omega$, $h_{ob} = 0{,}25\mu$mho, nella connessione ad emettitore comune, fare un grafico di A_I, A_v ed A_p in funzione di R_L quando questa quantità varia fra 0 e $10^5\ \Omega$. Determinare la resistenza di carico per cui si ha il massimo guadagno di potenza.

3-14. Ripetere il ptoblema 3-13 per la connessione a base comune.

3-15. Determinare i valori di R_s e di R_L in condizioni di carico adattato per il circuito ad emettitore comune realizzato con il transistore del problema 3-13; determinare anche il guadagno di potenza in decibel in condizione di adattamento.

3-16. Per il circuito di fig. 3-46 tracciare il circuito equivalente con generatori di corrente supponendo che siano trascurabili tutte le reattanze capacitative.

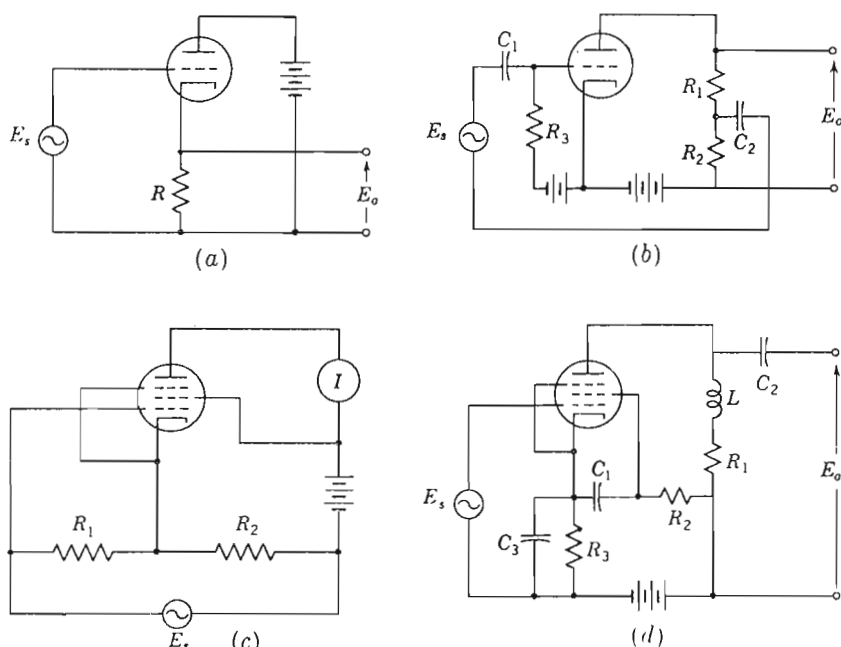



FIG. 3-46.

3-17. Si applica ad un triodo con $\mu = 70$ ed $r_p = 66.000\ \Omega$, connesso con catodo a massa, un segnale di 2,0v efficaci. Il carico è resistivo e pari a 80.000 Ω. Determinare la corrente anodica alternata, E_o, ed il guadagno di tensione espresso in dbv.

3-18. Il triodo del problema 3-17 funziona a 50k Hz in un amplificatore con catodo a massa, con un carico di $70.000\ \underline{/45^0}$. Calcolare la resistenza e la capacità di ingresso, dati $C_{gp} = 2{,}5$pF, $C_{gk} = 4{,}0$pF e $C_{pk} = 3{,}2$pF.

3-19. Due triodi funzionano in parallelo. Determinare le espressioni di μ, g_m, r_p equivalenti in funzione delle μ_1, r_{p1}, g_{m1}, μ_2, r_{p2}, g_{m2} dei due tubi.

3-20. Nel circuito di fig. 3-28b si impiega un pentodo nelle seguenti condizioni: punto Q ad $I_b = 3$mA, $I_{c2} = 0{,}8$mA, $E_{bb} = 250$V, $E_{c1} = -1{,}5$V, $E_{c2} = 100$V, $g_m = 4.800\mu$mho, ed $r_p = 1{,}5$M Ω. Calcolare i valori di R_s ed R_k, dei condensatori

di shunt adatti per un funzionamento a 100Hz ed un carico R_L tale da consentire un guadagno di tensione di 125.

3-21. In un circuito a catodo comune, con $E_{bb} = 250V$, si impiega il triodo 12 AX 7. L'impedenza di uscita deve essere di 600 Ω. Determinare il resistore catodico, la massima ampiezza, picco a picco, del segnale che può essere applicato a questo amplificatore senza che la griglia vada oltre la interdizione.

3-22. Un generatore ha $E_s = 0{,}01V$ ed $R_s = 300\ \Omega$. Progettare un amplificatore con griglia a massa usando il tubo 6j6 con $\mu = 38$ ed $r_p = 7100\ \Omega$ e tale da realizzare lo adattamento dell'impedenza di ingresso. Determinare la tensione di uscita ed il guadagno di potenza.

3-23. Un inseguitore catodico, impiega un triodo avente $\mu = 35$, $r_p = 62.000\ \Omega$, $E_{cc} = -2V$. Determinare il valore del resistore di polarizzazione per $I_b = 0{,}3$ mA e scegliere R_k in modo tale che il guadagno sia 0,85. Determinare inoltre la massima ampiezza, picco a picco, del segnale che può essere applicato a questo amplificatore senza che la griglia vada oltre la interdizione.

BIBLIOGRAFIA

1. "IRE Dictionary of Electronics Terms and Symbols", Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 1961.
2. Le Croisette D.: "Transistors", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
3. Middlebrook R. D.: "An Introduction to Junction Transistor Theory", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
4. Ryder J. D.: "Electronic Fundamentals and Applications", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
5. Linvill J. C., and Gibbons J. F.: "Transistors and Active Circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
6. Dewitt D., and Rossoff A. L.: "Transistor Electronics", McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.

CAPITOLO IV

RISPOSTA DEGLI AMPLIFICATORI LINEARI PER PICCOLI SEGNALI

Nel capitolo precedente si sono studiati gli amplificatori fondamentali per piccoli segnali. In tale studio si sono trascurati gli effetti delle capacità parassite e delle reattanze esterne che influenzano la risposta degli amplificatori dando luogo a variazioni delle forme d'onda.

Il frequente impiego di forme d'onda impulsive richiede lo studio della risposta degli amplificatori a transitori non sinusoidali. Per gli amplificatori lineari il progettista del circuito deve tenere conto della risposta in fase e frequenza per forme d'onda sinusoidali e, più generalmente, della risposta nel caso di forme d'onda impulsive. Nel presente capitolo verrà eseguita sia l'analisi che il progetto di tali amplificatori, facendo riferimento soprattutto ai circuiti ad emettitore ed a collettore comune per i vantaggi che questi montaggi presentano. È possibile estendere la trattazione ad altri circuiti facendo uso di quanto si è studiato nel cap. 3.

4-1. Natura dei segnali.

La funzione di molte apparecchiature elettroniche è la trasmissione o conversione dell'informazione.

L'informazione viene trasmessa sotto forma di segnali che sono *analoghi* all'informazione o che utilizzano un opportuno *codice* prestabilito. Si possono considerare come esempi di segnali elettrici di tipo analogico la corrente generata da un microfono sensibile alle onde acustiche delle parole, oppure l'uscita elettrica variabile di un ponte di resistenze del tipo ad estensimetro che misuri la pressione di una macchina a combustione interna.

Un segnale analogico è proporzionale alla forma d'onda dell'informazione ed è continuo nel tempo quando lo è l'informazione. Tali segnali, anche se non sinusoidali, sono considerati, dal punto di vista matematico, come una sovrapposizione nel dominio della frequenza di componenti sinusoidali con appropriate relazioni di ampiezza, frequenza e fase.

Queste componenti possono essere considerate singolarmente come elementi di uno spettro di frequenza, risultante dallo sviluppo in serie di Fourier, come è mostrato in figura 4-Ia.

Nel caso ideale, tutte le frequenze, nel passare attraverso un amplificatore, vengono amplificate esattamente allo stesso modo e subiscono lo stesso sfasamento nel tempo, sicchè la forma d'onda in uscita risulta invariata rispetto a quella in ingresso. In realtà per gli amplificatori effettivi si possono tracciare dei diagrammi di amplificazione e di sfasamento in funzione della frequenza come risulta dalle figg. 4-1b e c.

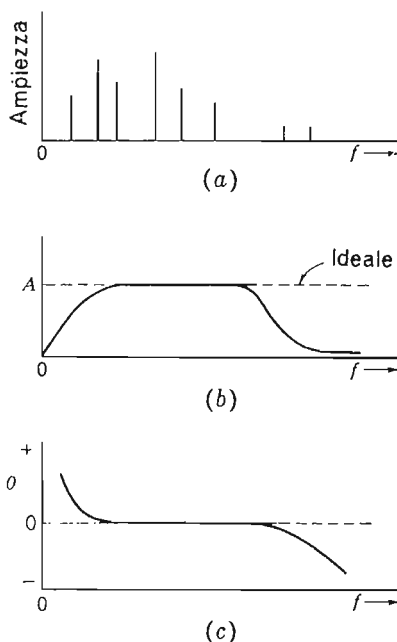



FIG. 4-1. — (*a*) Spettro di frequenza di un segnale musicale; (*b*) Caratteristica amplificazione-frequenza di un amplificatore; (*c*) diagramma fase-frequenza per un amplificatore.

L'effettivo segnale di uscita si ottiene sovrapponendo allo spettro di frequenze del segnale le caratteristiche del guadagno e della fase relative all'amplificatore. Se le componenti del segnale cadono nella zona centrale delle caratteristiche dell'amplificatore, non vi saranno variazioni della forma d'onda in uscita e le informazioni in essa contenute rimarranno inalterate; ma se la *larghezza di banda* del sistema è più stretta di quella dell'informazione, si avrà degradazione del segnale e perdita di informazione.

Un semplice esempio di segnale codificato è quello telegrafico, in cui la presenza o assenza di corrente viene tradotta in informazione mediante l'applicazione di un codice prestabilito. Tali codici del tipo a tutto o niente sono sistemi a due stati. Sistemi più elaborati vengono impiegati nei codici a dati campionati dove si deve riconoscere un numero limitato di livelli. I sistemi in codice sono discontinui in quanto i segnali sono proporzionali alle campionature temporali della informazione in accordo con un codice di ampiezza. Tali sistemi normalmente realizzano la trasmissione mediante treni di impulsi, che si differenziano per la presenza o assenza degli impulsi, e per la posizione, ampiezza o larghezza degli impulsi stessi. Lo spettro di frequenze di tali segnali viene ottenuto mediante l'integrale di Fourier, dal quale risulta che le forme d'onda impulsive hanno una banda di frequenza che si estende fino all'infinito.

In alcuni sistemi ad impulsi la posizione temporale dell'impulso risulta critica in fase di lettura poichè le costanti di tempo del circuito limitano il tempo di salita dell'impulso e possono alterare la forma dell'impulso stesso. Quindi nel progetto di un sistema potranno essere utili questi due criteri: 1) scelta di una larghezza di banda sufficientemente larga per trasmettere le frequenze presenti nel segnale originale senza grave perdita del contenuto di informazione; 2) scelta di opportune costanti di tempo per i circuiti onde mantenere il tempo di salita dell'impulso nei limiti di tolleranza accettabili per non distorcere la forma dell'impulso. Si vedrà in seguito come questi requisiti del sistema siano correlati tra di loro.

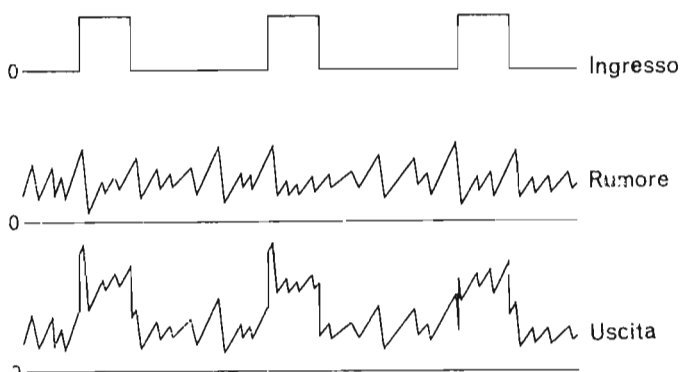



FIG. 4-2. — Segnali in presenza di rumore.

Una certa degradazione dell'informazione avviene inevitabilmente in seguito all'impiego di circuiti o sistemi che presentano larghezza finita di banda e determinate costanti di tempo. Il problema base dell'ingegnere dei

sistemi è quello di trovare un compromesso tra l'aumento di costo del circuito in seguito ad un allargamento di banda e la perdita di informazione che si ha stringendo la banda del sistema.

Un ulteriore fattore è importante nella manipolazione ed amplificazione dei segnali: *il rumore*, cioè le variazioni elettriche casuali nei circuiti o l'incertezza dei valori in sistemi con dati campionati. In fig. 4-2 viene mostrato il possibile effetto del rumore su un segnale impulsivo. Risulta evidente che si introduce un elemento di incertezza nel tempo di arrivo, nell'ampiezza e nella larghezza degli impulsi. Abitualmente si dice che questo rumore è « bianco » o anche che la potenza di rumore è uniformemente distribuita in tutto lo spettro di frequenze del segnale di ingresso. Una riduzione della banda passante diminuirà quindi il rumore, ma potrà anche degradare l'informazione contenuta nel segnale, per cui, ancora una volta, si richiede una soluzione di compromesso. In tal modo si giustifica l'importanza che verrà attribuita alla larghezza di banda ed al tempo di salita degli impulsi nei paragrafi successivi.

4-2. Degradazione del segnale; distorsione.

Gli amplificatori per piccoli segnali sono progettati per lavorare in *classe A*; in tal caso la corrente anodica o di collettore è sempre presente, ed il funzionamento avviene nel tratto lineare della caratteristica di trasferimento, cosicchè ci si attenderebbe che la forma d'onda in uscita sia identica a quella in ingresso; ossia le ampiezze relative delle componenti sinusoidali del segnale dovrebbero essere identiche a quelle d'ingresso, e le relazioni di fase invariate. Negli amplificatori effettivi difficilmente si ottengono queste condizioni con segnali di ragionevole ampiezza e per larghe bande di frequenze; si avrà quindi una certa *distorsione* della forma d'onda ed una perdita del contenuto di informazione del segnale.

Si considerano generalmente tre tipi fondamentali di distorsione: 1) distorsione di frequenza, 2) distorsione di fase o ritardo, e 3) distorsione non lineare e di intermodulazione.

Un amplificatore ideale dovrebbe amplificare ugualmente tutte le frequenze comprese nei limiti di banda del progetto e contenute nel segnale; tuttavia per la presenza delle inevitabili reattanze, in pratica tutti gli amplificatori avranno un limite di frequenza oltre il quale l'amplificazione varia con la frequenza. In tal caso si ha *distorsione di frequenza.*

Un amplificatore che presenta un diagramma guadagno-frequenza orizzontale, come indicato dalla linea tratteggiata di fig. 4-3, si dirà ideale, in quanto non ha alcuna limitazione nella larghezza di banda. Un amplificatore

effettivo invece può avere una caratteristica che si inclina ad una o ad entrambe le estremità dello spettro di frequenze, come si vede in fig. 4-3. Se un segnale ha delle componenti a frequenza f_a ed f_b, che vengono amplificate in maniera disuguale, la forma d'onda in uscita differirà da quella di ingresso e l'amplificatore presenterà una distorsione di frequenza.

FIG. 4-3. — Diagramma amplificazione-frequenza.

È noto che l'orecchio umano può distinguere solo tra livelli di intensità che differiscono di circa 2,5 db o più; diventa quindi naturale definire alle basse ed alle alte frequenze della risposta di un amplificatore, le frequenze limiti f_1 ed f_2 in corrispondenza delle quali il guadagno diminuisce di 3 db rispetto a quello dell'amplificatore ideale.

Anche se molti amplificatori non hanno un'uscita che possa essere utilizzata dall'orecchio, risulta ancora conveniente definire la *larghezza di banda* B di un amplificatore in base alle frequenze dei punti a 3 db, ossia:

$$B = f_2 - f_1 \qquad (4\text{-}1)$$

Il ritardo di fase di una componente in frequenza del segnale, rispetto alle altre componenti, fa sì che la forma d'onda d'uscita differisca da quella in ingresso, dando luogo alla *distorsione di fase*. Un amplificatore ideale o avrà sfasamento nullo in tutto il suo campo di frequenza o darà luogo, per ciascuna componente sinusoidale del segnale, ad un ritardo proporzionale alla frequenza della stessa componente. In questo ultimo caso, tutte le componenti sono ritardate di uno stesso intervallo di tempo e l'intera onda risulta traslata nel tempo senza variazione di forma. Ne scaturisce quindi un importante criterio secondo il quale la distorsione di fase è nulla qualora $d\theta/d\omega$ sia costante, ovverossia quando lo sfasamento in radianti sia $\theta = K\omega$ con K ritardo dell'onda considerata nel suo complesso. In effetti, è molto più facile progettare uno sfasamento lineare con la frequenza che realizzare uno sfasamento approssimativamente nullo per tutta la larghezza della banda,

in quanto la distorsione di fase è generalmente dovuta agli elementi reattivi sempre presenti.

La distorsione non lineare è causata dal funzionamento dei circuiti attivi su una parte non lineare della loro caratteristica dinamica di trasferimento. Segnali di diversa ampiezza verranno allora amplificati in modo diverso, come risulta dalla fig. 4-4; così, se la tensione del segnale d'ingresso è una sinusoide, la forma d'onda della corrente in uscita è distorta; ciò indica che si sono aggiunte in uscita componenti ad altre frequenze che non erano presenti all'ingresso.

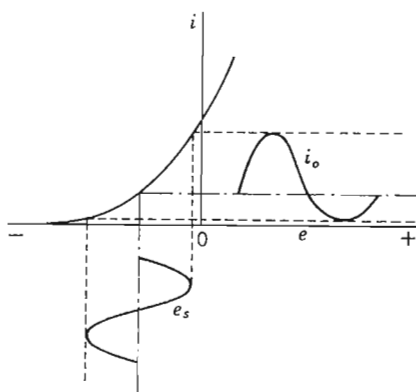



FIG. 4-4. — Distorsione non lineare provocata da una caratteristica di trasferimento dinamica incurvata.

Quando un certo numero di frequenze sono contemporaneamente presenti in ingresso, una caratteristica non lineare dà luogo inoltre alla *distorsione di intermodulazione*; cioè la caratteristica di trasferimento non lineare causa la generazione di componenti ad altre frequenze, che comprendono le somme e le differenze di tutte le frequenze presenti. Queste somme e differenze di frequenze non sono in relazione armonica con le frequenze originali di ingresso e vengono considerate dall'orecchio come un rumore: si aggiungono così al segnale ulteriori e casuali informazioni.

Per i componenti attivi, transistori o tubi, la distorsione non lineare è dovuta a condizioni di lavoro improprie o ad una scelta non opportuna del punto Q.

4-3. Circuito equivalente del transistore.

Il circuito di fig. 4-5a è stato ricavato nel paragrafo 3-16 come circuito equivalente di un transistore connesso ad emettitore comune, per quelle fre-

quenze alle quali, in condizione di funzionamento dinamico, intervengono la diffusione interna e le capacità. Nel ricavare tale circuito equivalente si era assunto che h_{re}, rapporto di trasferimento inverso, fosse trascurabile. In tale ipotesi, il circuito di ingresso si semplifica e la resistenza R_{ie} diventa uguale a h_{ie}.

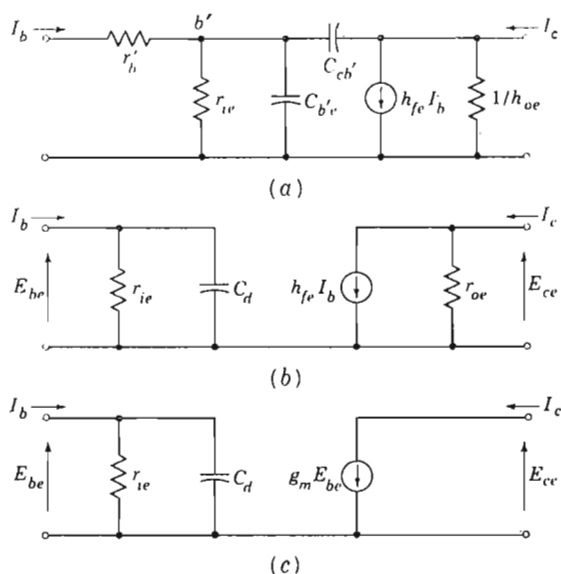



FIG. 4-5. — (*a*) Circuito equivalente per la connessione ad emettitore comune; (*b*) il circuito (*a*) semplificato riguardo alla connessione dei condensatori; (*c*) ulteriore semplificazione del circuito (*b*).

Si può tenere conto della controreazione dovuta a $C_{cb'}$, introducendo C_d nel circuito di ingresso, come risulta dalla fig. 4-5b. La capacità C_d è stata già definita nel paragrafo 3-16 come:

$$C_d = C_{eb'} + (1 + A_{ve})C_{cb'} \tag{4-2}$$

È inoltre possibile, per i transistori per alta frequenza e bassa potenza, trascurare la resistenza di base $r_{b'}$, o includerla nella resistenza serie del generatore di segnalc. Per comodità, i parametri ibridi h_{ie} ed h_{oe} si considerano come resistenze $r_{ie} = h_{ie}$ e $r_{oe} = 1/h_{oe}$. Si potrà ora discutere sugli effetti delle varie costanti di tempo. Nel circuito di fig. 4-5c, si è considerata r_{oe} trascurabile, in quanto elevata rispetto ai carichi normali; tale considerazione permette di considerare il circuito di uscita come quello di un pentodo.

Un ulteriore parallelo con i pentodi può essere stabilito operando algebricamente sul generatore di corrente. Dalla fig. 4-5b, per le basse frequenze si ha:

$$I_b = \frac{E_{be}}{r_{ie}} = \frac{E_{be}}{h_{ie}}$$

Il generatore di corrente $h_{fe}I_b$ può allora essere indicato con:

$$h_{fe}I_b = \beta I_b = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} E_{be} = g_m E_{be} \tag{4-3}$$

quest'ultimo risultato segue dallo studio che ci ha condotti all'equazione (3-83). Lo schema di fig. 4-5c sarà utilizzato largamente nell'analisi dei circuiti a transistori ad emettitore comune.

Per un dato ingresso I_b, la tensione E_{be} e di conseguenza la corrente di uscita, saranno funzioni dell'impedenza del circuito d'ingresso, cosicché il guadagno di corrente varierà con la frequenza se l'impedenza è funzione della frequenza. Tale effetto può essere studiato considerando il guadagno di corrente β di corto circuito. Con l'uscita cortocircuitata, il guadagno A_{ve} è nullo, e così $C_d = C_{eb} + C_{cb}$.

Per un dato I_b:

$$E_{be} = \frac{r_{ie}}{1 + j\omega C_d r_{ie}} I_b$$

$$I_c = g_m E_{be} = \frac{g_m r_{ie}}{1 + j\omega C_d r_{ie}} I_b \tag{4-4}$$

Ne segue che in condizioni di corto circuito in uscita:

$$\frac{I_c}{I_b} = \beta = \frac{g_m r_{ie}}{1 + j\omega C_d r_{ie}} \tag{4-5}$$

Dall'eq. (4-3), si può notare che per frequenze alle quali C_d è trascurabile, si ha:

$$h_{fe} = g_m h_{ie} = g_m r_{ie} = \beta_0$$

Detto β_0 questo valore del guadagno in bassa frequenza, l'eq. (4-5) diviene:

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + j\omega C_d r_{ie}} \tag{4-6}$$

Questo risultato lega gli effetti dovuti alla diffusione delle cariche nella base al guadagno di corrente in funzione della frequenza del segnale.

La costante di tempo $C_d r_{ie}$ può essere utilizzata per definire una frequenza $f_\beta = \omega_\beta/2\pi$, dove:

$$\omega_\beta = \frac{1}{C_d r_{ie}} \tag{4-7}$$

cosicché:

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + j\omega/\omega_\beta} \tag{4-8}$$

Alla frequenza f_β, il guadagno di corrente si riduce a $1/\sqrt{2}$ o a 0,707 del suo valore in bassa frequenza, e la potenza di uscita diventa la metà di quella in bassa frequenza. Così f_β corrisponde alla frequenza f_2 che si è definita frequenza limite superiore della banda del guadagno di corrente di un transistore in un circuito ad emettitore comune. La frequenza f_β talvolta viene chiamata frequenza di taglio di β. In effetti f_β viene utilizzato solo per indicare la fine della regione in cui è costante il guadagno in funzione della frequenza; i transistori possono lavorare anche al di sopra di f_β ma con una prevista perdita di guadagno.

Nei circuiti a base comune, il guadagno di corrente di corto circuito è $h_{fb} = -\alpha$. D'altronde poiché $\alpha = \beta/(1 + \beta)$è possibile definire α in funzione della frequenza:

$$\alpha = \frac{\beta_0/(1 + \beta_0)}{1 + j\omega/[\omega_\beta(1 + \beta_0)]} = \frac{\alpha_0}{1 + j\omega/[\omega_\beta(1 + \beta_0)]} \tag{4-9}$$

dove

$$\alpha_0 = \frac{\beta_0}{1 + \beta_0} \tag{4-10}$$

ne segue che:

$$\omega_\alpha = \omega_\beta(1 + \beta_0) \tag{4-11}$$

che è detta pulsazione di taglio di α.

Per il circuito a collettore comune:

$$h_{fc} = -\frac{1}{1 - \alpha}$$

Ricorrendo alle precedenti relazioni, il guadagno di corrente in corto circuito è:

$$h_{fc} = -\left(1 + \frac{\beta_0}{1 + j\omega/\omega_\beta}\right) \cong \frac{-\beta_0}{1 + j\omega/\omega_\beta} \tag{4-12}$$

ove l'approssimazione è valida per valori elevati di β; in ogni caso il comportamento di questo circuito è quasi identico a quello ad emettitore comune.

Le equazioni (4-8), (4-9) e (4-12) vengono confrontate in fig. 4-6 dalla quale risulta che il circuito a base comune presenta una maggiore costanza di β in funzione della frequenza, come risulta anche dall'eq. (4-11). Tuttavia considerazioni di adattamento di impedenza e di guadagno possono portare a preferire gli altri due circuiti.

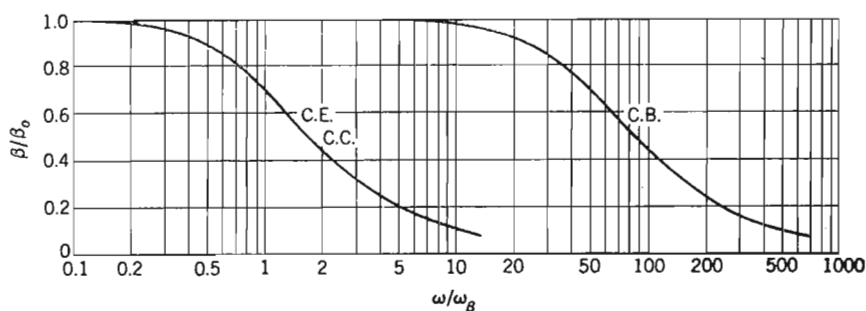



FIG. 4-6. — Andamento dell'amplificazione di corrente in alta frequenza per $\beta = 50$

Un'altra frequenza caratteristica di notevole importanza è f_T, frequenza alla quale il valore del guadagno di corrente, β, si riduce alla unità; questo avviene quando $\omega/\omega_\beta \gg 1$, in tal caso dall'eq. (4-8) si ha:

$$\omega_T = \beta\omega_\beta \tag{4-13}$$

dalla quale si deduce che, per i transistori, ω_T è il prodotto del guadagno di corrente per il limite superiore della banda nella connessione ad emettitore comune; talvolta ω_T viene considerata come figura di merito e chiamata *prodotto del guadagno di corrente per la larghezza di banda.*

4-4. L'amplificatore R C a transistori alle basse e medie frequenze.

Gli amplificatori lineari per piccoli segnali vengono impiegati normalmalmente in cascata, cosicché il carico di ciascuno stadio è influenzato dalle condizioni di lavoro dello stadio successivo. Per effetto del condensatore di blocco C nell'amplificatore di fig. 4-8a e delle capacità in derivazione proprie dei transistori, il diagramma del guadagno in funzione della frequenza si discosterà sia alle alte che alle basse frequenze dall'andamento ideale orizzontale, come indicato in fig. 4-7.

Si può allora analizzare il comportamento del guadagno di un amplificatore a transistore accoppiato ad RC, separatamente in ciascuna delle tre zone di frequenza indicate.

Il *campo delle basse frequenze* viene definito come quello entro il quale le reattanze serie di C e di C_E hanno valori non trascurabili, rispetto alle resistenze serie, per cui il guadagno viene alterato.

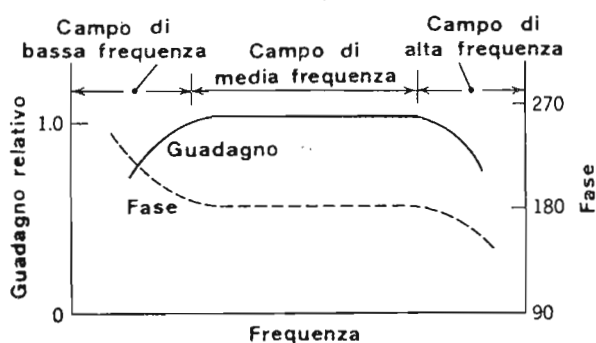



FIG. 4-7. — Diagrammi dell'amplificazione e della fase di un amplificatore RC.

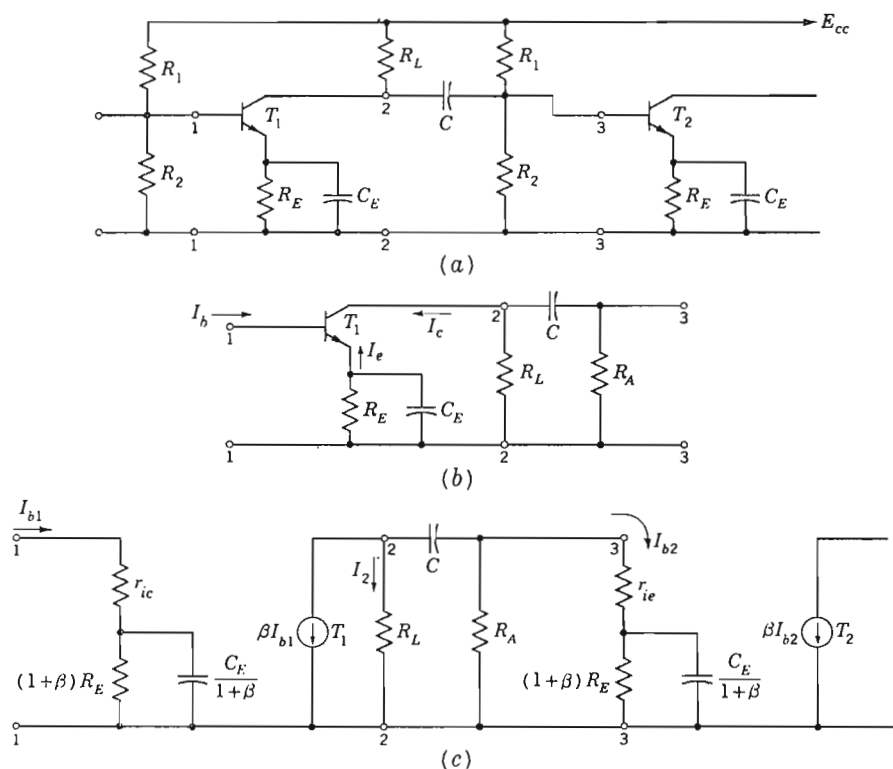



FIG. 4-8. — (*a*) Amplificatore completo ad emettitore comune. (*b*) Primo stadio e relative correnti. (*c*) Circuito equivalente dello stadio intermedio.

Il *campo delle medie frequenze* comprende quelle frequenze per le quali le reattanze serie sono veramente un corto circuito mentre quelle derivate sono tanto grandi da costituire dei circuiti effettivamente aperti. Il campo delle medie frequenze è dunque quello in cui nessuna reattanza ha effetto o compare nel circuito equivalente.

Il *campo delle alte frequenze* comprende quelle frequenze per le quali le reattanze derivate sono tali da alterare le impedenze derivate del circuito.

Si consideri il primo stadio amplificatore T_1 di fig. 4-8a, tra i terminali 1,1 e 3,3. Utilizzando per il transistore il circuito equivalente di fig. 4-5 si ottiene per l'amplificatore il circuito equivalente in bassa freqùenza di fig. 4-7c. Si sono trascurate le capacità in derivazione C_d e C_{cb} poichè sono dei circuiti aperti alle basse frequenze, mentre le capacità in serie C e C_E danno luogo, in questo campo di frequenze, a delle effettive reattanze. Facendo riferimento alla fig. 4-8b, si ha:

$$I_e = (1 + \beta)I_b$$

La caduta di tensione sul circuito costituito da R_E, C_E è:

$$E_E = \frac{I_e}{1/R_E + j\omega C_E} \tag{4-14}$$

Nel circuito equivalente di fig. 4-8c, compaiono gli elementi $R_E(1 + \beta)$ e $C_E/(1 + \beta)$ nella maglia percorsa da I_b, ciò perchè deve essere uguale ad E_E la caduta di tensione sul cappio; si ha infatti:

$$E_E = \frac{I_b}{1/[R_E(1 + \beta)] + j\omega C_E/(1 + \beta)} \tag{4-15}$$

questa relazione giustifica il circuito equivalente di fig. 4-8c; in esso R_A rappresenta la resistenza equivalente del parallelo di R_1 ed R_2. Come nella trattazione precedente che ha portato al circuito di fig. 4-5, anche ora bisognerà fare qualche approssimazione per ottenere delle semplici espressioni e per comprendere il funzionamento del circuito.

Il comportamento in bassa frequenza del circuito di fig. 4-8c dipende dalle costanti di tempo dei circuiti che comprendono C e C_E; mentre C_E è posta in parallelo ad R_E, normalmente solo di qualche centinaio o di migliaio di ohm, C è in una rete che include resistenze che di solito valgono molte migliaia di ohm, come è il caso di R_A e di $(1 + \beta)R_E$. Affinché la costante di tempo dei due circuiti sia la stessa e abbiano quindi un'eguale influenza nella risposta in bassa frequenza, è da attendersi che C_E sia notevolmente più grande di C. In pratica questo è effettivamente verificato, ed il rapporto tra le due capacità è di 50 o più. Mentre è poco costoso aumentare il valore di C, può essere proibitivo, aumentare C_E, cosicchè nella

maggior parte dei circuiti, C_E costituisce il limite per le basse frequenze allorchè C rappresenta ancora un cortocircuito o una reattanza trascurabile.

Nel campo di frequenze in cui la reattanza di C_E comincia ad avere un certo peso, R_L ed R_A risultano ancora effettivamente in parallelo, presentando la capacità C una reattanza trascurabile, e danno luogo ad una resistenza equivalente R'_L. La corrente allora si divide in modo che:

$$I_{b2} = -\beta I_{b1} \frac{R'_L}{R'_L + r_{ie} + \dfrac{(1+\beta)R_E}{1 + j\omega C_E R_E}} = \tag{4-16}$$

$$= \frac{-\beta I_{b1}}{1 + r_{ie}/R'_L} \frac{1 + j\omega C_E R_E}{1 + (1+\beta)R_E/(R'_L + r_{ie}) + j\omega C_E R_E} \tag{4-47}$$

A frequenze ancora più basse, per le quali la reattanza di C diventa considerevole, si potrà considerare C_E un circuito aperto. La resistenza $(1 + \beta)R_E$ risulterà molto grande, ed il ramo 3,3 ha un effetto trascurabile sulla restante parte del circuito. La capacità C darà luogo allora ad una ulteriore diminuzione del guadagno totale di corrente che diventa:

$$A_{iL} = \frac{I_{b2}}{I_{b1}} = \frac{-\beta}{1 + r_{ie}/R'_L}\left[\frac{1 + j\omega C_E R_E}{1 + (1+\beta)R_E/(R'_L + r_{ie}) + j\omega C_E R_E}\right]\frac{R_A}{R_A + 1/j\omega C} \tag{4-18}$$

È utile definire i seguenti due parametri in funzione delle costanti di tempo del circuito:

$$\omega_E = \frac{1}{C_E R_E} \qquad \omega_C = \frac{1}{CR_A}$$

nonché il parametro:

$$a = 1 + \frac{(1+\beta)R_E}{R'_L + r_{ie}}$$

L'espressione del guadagno in bassa frequenza diventa allora:

$$A_{iL} = \frac{-\beta}{1 + r_{ie}/R'_L}\left[\frac{1 + j\omega/\omega_E}{a + j\omega/\omega_E}\right]\left[\frac{j\omega/\omega_C}{1 + j\omega/\omega_C}\right] \tag{4-19}$$

In media frequenza nè le capacità in serie nè quelle derivate hanno effetto sul comportamento del circuito; in tal caso $\omega \gg \omega_E$ ed ω_C ed i due termini in parentesi dell'eq. (4-19) diventano pari all'unità, ovvero:

$$A_{iM} = \frac{-\beta}{1 + r_{ie}/R'_L}$$

Questa relazione rappresenta il guadagno ideale di corrente in corto circuito β, modificato per l'effetto di r_{ie}/R'_L, e conduce al circuito equivalente di fig. 4-9. È evidente l'opportunità di rendere $r_{ie} \ll R'_L$.

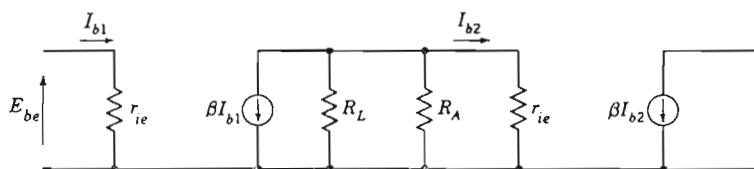



FIG. 4-9. — Circuito equivalente in media frequenza.

A frequenza più alta di ω_E cioè per $\omega_1 = a\omega_E$, l'amplificazione presenta nel campo della bassa frequenza un punto a metà potenza, dovuto a C_E. Ne segue che:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_E R_E} + \frac{1 + \beta}{C_E(R'_L + r_{ie})} \tag{4-21}$$

Questa frequenza è evidentemente più alta di quella che risulta dalla relazione $f_E = \omega_E/2\pi$. Ad una frequenza molto più bassa, in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_C$, si avrà un'ulteriore riduzione di 3 db, dovuta all'effetto di C.

Molto spesso il valore necessario per C_E è tanto grande da essere antieconomico; in tal caso dall'eq. (4-19), per $\omega_E = \infty$, si ha per il guadagno A'_{iL} dell'amplificatore senza alcun elemento in derivazione ad R_E:

$$A'_{iL} = \frac{A_{iM}}{a} \frac{j\omega/\omega_C}{1 + j\omega/\omega_C} \tag{4-22}$$

L'effetto della mancanza dell'elemento in derivazione è una riduzione di guadagno secondo il fattore 1/a ed è il risultato di una controreazione negativa dovuta ad R_E, che verrà discussa in seguito.

Il guadagno quindi varia man mano che si passa dalle frequenze molto basse, ove si applica la eq. (4-22) e C_E è inefficace come condensatore in derivazione, alle medie frequenze dove è valida l'eq. (4-20) e dove entrambe le capacità si comportano come effettivi cortocircuiti.

In fase di progetto, le resistenze R_1, R_2, R_L ed R_E, vengono scelte per ottenere il desiderato punto Q di riposo, l'opportuno guadagno in media frequenza e la stabilità voluta. In corrispondenza del punto di funzionamento Q, si può sottrarre da E_{cc} la tensione che cade sul transistore e dividere la restante tensione in parti eguali tra R_E ed R_L. Ciò consente di determinare R_L ed R_E; dopo di che si può fissare ω_1 conoscendo la larghezza di banda del segnale e determinare C e C_E.

4-5. L'amplificatore RC a transistore in alta frequenza.

L'amplificatore accoppiato ad RC di fig. 4-8a può essere studiato in alta frequenza impiegando il circuito equivalente di fig. 4-5c. In tale campo di frequenze si può considerare che le capacità C e C_E diano luogo a reattanze trascurabili, mentre facciano sentire la loro influenza le capacità derivate C_d e C_{cb}. La resistenza, che dovrebbe apparire in derivazione all'ingresso del circuito, come conseguenza dell'effetto Miller con carico capacitivo, può essere trascurata essendo elevata. Ne risulta il circuito di fig. 4-10. Nel circuito di accoppiamento le correnti si possono sommare come segue:

$$\beta I_{b1} + E_{b2}\left(\frac{1}{R'_L} + \frac{1}{r_{ie}} + j\omega C_s\right) = 0 \qquad (4\text{-}23)$$

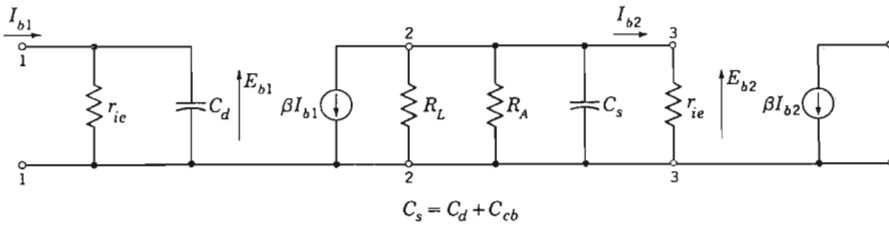



FIG. 4-10. — Circuito equivalente in alta frequenza per un amplificatore RC ad emettitore comune.

con

$$C_s = C_d + C_{cb} \qquad (4\text{-}24)$$

in quanto le due capacità compaiono in parallelo. Poiché:

$$E_{b2} = r_{ie} I_{b2}$$

di conseguenza, nel campo delle alte frequenze, il guadagno diventa:

$$A_{iH} = \frac{I_{b2}}{I_{b1}} = \frac{-\beta}{1 + r_{ie}/R'_L}\left[\frac{1}{1 + \dfrac{j\omega C_s R'_L r_{ie}}{R'_L + r_{ie}}}\right] \qquad (4\text{-}25)$$

Si può utilizzare la costante di tempo del circuito per definire la frequenza $f_2 = \omega_2/2\pi$ mediante la relazione:

$$\omega_2 = \frac{1}{C_s R'_L r_{ie}/(R'_L + r_{ie})} = \frac{1}{C_s R_p} \qquad (4\text{-}26)$$

dove R_p è il parallelo delle tre resistenze in derivazione. È evidente che nell'eq. (4-25) il primo dei due fattori a secondo membro è A_{iM}, cosicché:

$$A_{iH} = A_{iM}\frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} \qquad (4\text{-}27)$$

Poiché alla pulsazione $\omega = \omega_2$, il guadagno diventa $A_{iM}/\sqrt{2}$ e la fase $\varphi = 45^0$, ω_2 viene indicata come il limite superiore della banda o frequenza a metà potenza dell'amplificatore.

Il limite superiore della banda è funzione inversa di $C_s = C_d$, e potrà essere aumentato scegliendo opportunamente il transistore che dovrà avere valori piccoli di C_d nonché una bassa resistenza di ingresso.

4-6. Amplificatori a triodo e a pentodo in bassa frequenza.

Per i tubi a vuoto, triodi e pentodi, i circuiti equivalenti sono simili a quelli per i transistori, ed i metodi di analisi sono analoghi. Il circuito di fig. 4-11a si trasforma in quello di fig. 4-11b, e si ha:

$$E_g = E_i - I_p \frac{R_k}{1 + j\omega C_k R_k} \tag{4-28}$$

$$\mu E_g = I_p \left(r_p + R_L \quad \frac{R_k}{1 + j\omega C_k R_k} \right) \tag{4-29}$$

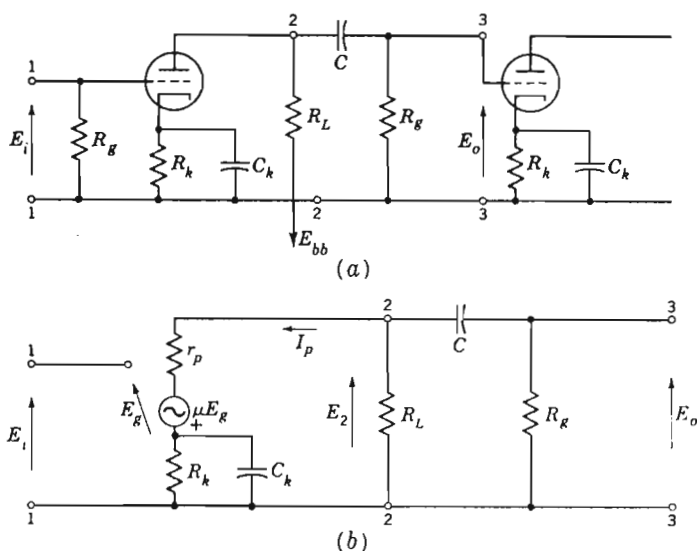



FIG. 4-11. — (*a*) Amplificatore a triodo. (*b*) Circuito equivalente in bassa frequenza per (*a*).

dalle quali:

$$\mu E_i = I_p \left[r_p + R_L \quad \frac{(\mu + 1) R_k}{1 + j\omega C_k R_k} \right] \tag{4-30}$$

La resistenza di fuga di griglia è generalmente elevata rispetto ad R_L, per cui C ed R_g danno luogo ad una ripartizione di tensione, ma non influi-

scono in modo apprezzabile sul valore di R_L. Pertanto essendo $E_2 = -I_pR_L$, si ha:

$$E_0 = \frac{-j\omega C R_g R_L}{1 + j\omega C R_g} I_p \tag{4-31}$$

Il guadagno di tensione in bassa frequenza risulta allora:

$$A_{vL} = \frac{-g_m R_L}{1 + R_L/r_p} \left[\frac{1 + j\omega C_k R_k}{1 + (\mu + 1)R_k/(r_p + R_k) + j\omega C_k R_k}\right] \left[\frac{j\omega C R_g}{1 + j\omega C R_g}\right] \tag{4-32}$$

anche questa volta si pone:

$$\omega_k = \frac{1}{C_k R_k} \qquad \omega_C = \frac{1}{C R_g}$$

$$b = 1 + \frac{(\mu + 1)R_k}{r_p + R_k}$$

Il campo delle medie frequenze verrà raggiunto quando i termini in parentesi dell'eq. (4-32) tenderanno all'unità al crescere di ω, in modo che:

$$A_{vM} = \frac{-g_m R_L}{1 + R_L/r_p} \tag{4-33}$$

L'espressione del guadagno in bassa frequenza diventa allora:

$$A_{vL} = A_{vM} \frac{1 + j\omega/\omega_k}{b + j\omega/\omega_k} \frac{j\omega/\omega_C}{1 + j\omega/\omega_C} \tag{4-34}$$

espressione che è molto simile all'eq. (4-19) per gli amplificatori a transistori.

Il rapporto tra le capacità C_k e C non è tanto elevato come per il circuito ad emettitore comune; per motivi economici conviene che le due capacità influiscano egualmente sulla frequenza limite inferiore. Così operando si ha: $\omega_0 = \omega_C = \omega_k$ e di conseguenza:

$$A_{vL} = A_{vM} \frac{j\omega/\omega_0}{b + j\omega/\omega_0} \tag{4-35}$$

Quando $\omega/\omega_0 = b$, il guadagno diventa $A_{vM}/\sqrt{2}$, ed il limite inferiore della banda risulta:

$$\omega_1 = b\omega_0 = \frac{1}{C_k R_k} + \frac{\mu + 1}{C_k(r_p + R_k)} \tag{4-36}$$

Con $\omega_C = \omega_k$, il rapporto tra le capacità deve essere:

$$\frac{C_k}{C} = \frac{R_g}{R_k} \tag{4-37}$$

Il progetto segue il procedimento esposto dettagliatamente per l'amplificatore a transistore, meno che per la tensione di polarizzazione catodica

che sarà trascurabile se paragonata con la caduta su R_L. Generalmente si sceglie un carico tale che la tensione di alimentazione si divida in aliquote circa equali tra il carico R_L ed il tubo.

Per un pentodo, $r_p \gg R_L$, per cui:

$$A_{vM} = - g_m R_L \tag{4-38}$$

4-7. Gli amplificatori a pentodo in alta frequenza.

L'effetto Miller rende i triodi inadatti per frequenze superiori a poche centinaia di chiloertz; cosicchè in questo paragrafo si analizzeranno i circuiti a pentodo per i quali la capacità d'ingresso è essenzialmente dovuta alla sola C_{gk} essendo trascurabile il valore di C_{gp}. Ne segue che il circuito equivalente, secondo le definizioni relative al campo delle alte frequenze, diventa quello della fig. 4-12. La capacità C_s è:

$$C_s = C_{pk} + C_{gk}$$

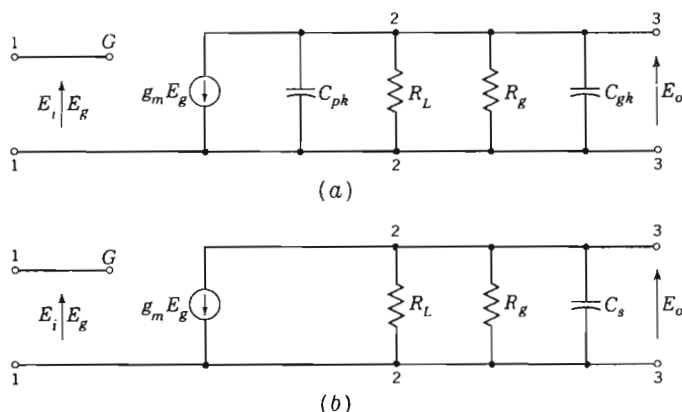



FIG. 4-12. — Circuito equivalente in alta frequenza per un pentodo con $r_p \gg R_L$.

Poiché il circuito di fig. 4-12b è simile al circuito equivalente dell'amplificatore a transistore in alta frequenza di fig. 4-10, è possibile scrivere il guadagno di tensione in alta frequenza per il pentodo sfruttando l'analogia con l'eq. (4-27):

$$A_{vH} = \frac{- g_m R_L}{1 + R_L/R_g} \, \frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} \tag{4-39}$$

dove:

$$\omega_2 = \frac{1}{C_s R_L R_g/(R_L + R_g)} = \frac{1}{C_s R'_L} \tag{4-40}$$

è la frequenza limite superiore della banda.

Normalmente $R_g \gg R_L$, cosicché l'espressione del guadagno può ulteriormente ridursi a:

$$A_{vH} = -g_m R_L \frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} = A_{vM} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} \tag{4-41}$$

Le relazioni relative agli amplificatori a pentodi e a transistori risultano simili in conseguenza del fatto che ciascuno dei due componenti è una sorgente controllata le cui caratteristiche si allontanano da quelle ideali agli estremi del campo di frequenze a causa delle reattanze interne o di quelle del circuito.

Il transistore è il componente preferito per il suo comportamento lineare in un più ampo campo della tensione di ingresso, inoltre ha piccole dimensioni e presenta una maggiore flessibilità di impiego non avendo il filamento di riscaldamento.

4-8. Diagrammi del guadagno in funzione della frequenza.

Le relazioni relative al guadagno viste nei precedenti paragrafi, possono essere riportate in diagramma rapportate ad A_M ed in funzione di ω/ω_1 o di ω/ω_2, come in fig. 4-13. La larghezza di banda è la differenza di frequenza f_2-f_1 tra i due punti a metà potenza, dove $f_1 = \omega_1/2\pi$ ed $f_2 = \omega_2/2\pi$. Questi sono valori limite arbitrari ma utili poichè dipendono dai parametri di progetto del circuito. Si può notare che il campo di frequenza, nel quale avviene un'apprezzabile variazione di fase, è considerevolmente più grande del campo in cui varia il guadagno e ciò è importante in alcuni tipi di amplificatori controreazionati che verranno esaminati nel cap. 5.

Se i rapporti di guadagno vengono riportati in decibel, o in dbv o in dbi, si può determinare rapidamente il guadagno e lo sfasamento di più amplificatori disposti in cascata sommando direttamente i loro guadagni in decibel e i loro sfasamenti. Inoltre si può usare un metodo semplice per il tracciamento delle curve, ed ancora si possono ricavare dai diagrammi in decibel alcune informazioni sugli sfasamenti relativi.

Per esempio il valore in decibel del rapporto A_H/A_M porta alla relazione:

$$\left|\frac{A_H}{A_M}\right|_{dbv} = 20 \log \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_2)^2}\right]^{1/2}$$
$$= -10 \log [1 + (\omega/\omega_2)^2] \tag{4-42}$$

Se $(\omega/\omega_2)^2$ è piccolo rispetto all'unità, l'amplificatore lavorerà nel campo di media frequenza, cioè:

$$\left|\frac{A_H}{A_M}\right| = 10 \log 1 = 0 \text{ dbv} \tag{4-43}$$

relazione che definisce il guadagno in media frequenza come livello di riferimento a 0 dbv. Se $\omega/\omega_2 = 1$, si ha:

$$\left|\frac{A_H}{A_M}\right| = 10 \log {}^1/_2 = -3{,}01 \text{ dbv} \tag{4-44}$$

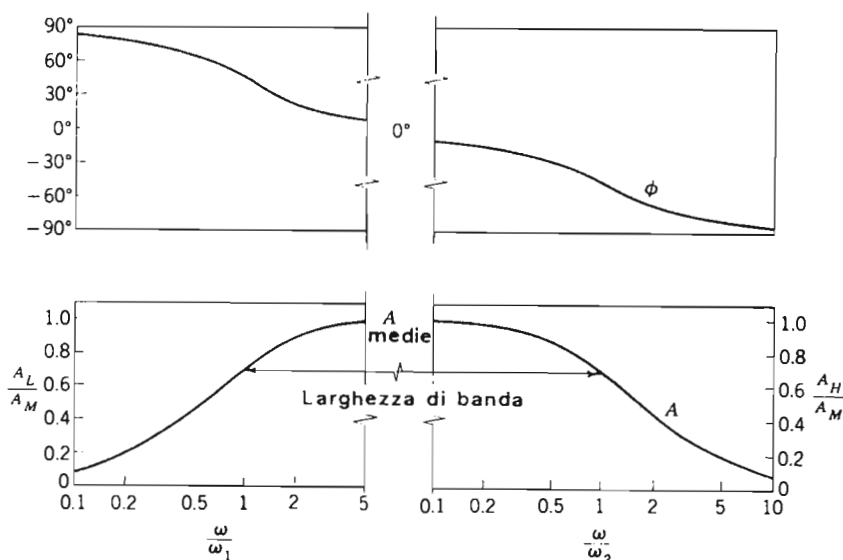



FIG. 4-13. — Variazione di A e di Φ con la frequenza.

ed il guadagno è minore (a causa del segno meno) di 3 db rispetto al livello di riferimento. Si possono ricavare altri valori di ω/ω_2 dalla tab. 7, in cui è tabulata la curva di risposta in alta frequenza di fig. 4-14.

Quando $(\omega/\omega_2)^2 \gg 1$, si ha:

$$\left|\frac{A_H}{A_M}\right| = 10 \log \frac{1}{(\omega/\omega_2)^2} = -20 \log (\omega/\omega_2) \tag{4-45}$$

Si può vedere che l'eq. (4-45) è quella della retta tratteggiata nel diagramma di fig. (4-14), passante per il punto $\omega/\omega_2 = 1{,}0$ e che costituisce l'asintoto della curva del guadagno in funzione della frequenza.

La frequenza alla quale $\omega/\omega_2 = 1$ viene chiamata *frequenza d'angolo*, perchè in corrispondenza di essa vi è l'intersezione del guadagno di riferi-

mento con l'asintoto. L'asintoto ha un'inclinazione di —20 db per decade di frequenza, equivalente ad una inclinazione di —6 db per ottava di frequenza.

TABELLA 7 — GUADAGNO IN ALTA FREQUENZA PER UN SOLO STADIO

ω/ω_2	*guadagno* *db*	Φ *gradi*	ω/ω_2	*guadagno* *db*	Φ *gradi*
0,1	—0,04	— 5,8	1,5	— 5,12	—56,3
0,2	—0.18	—11,3	2,0	— 7,0	—63,5
0,3	—0,38	—16,7	3,0	—10,0	—71,5
0,5	—0,96	—26,5	5,0	—14,1	—78,7
0,7	—1,73	—35,0	8,0	—18,1	—82,8
1,0	—3,01	—45,0	10,0	—20,0	—84,3

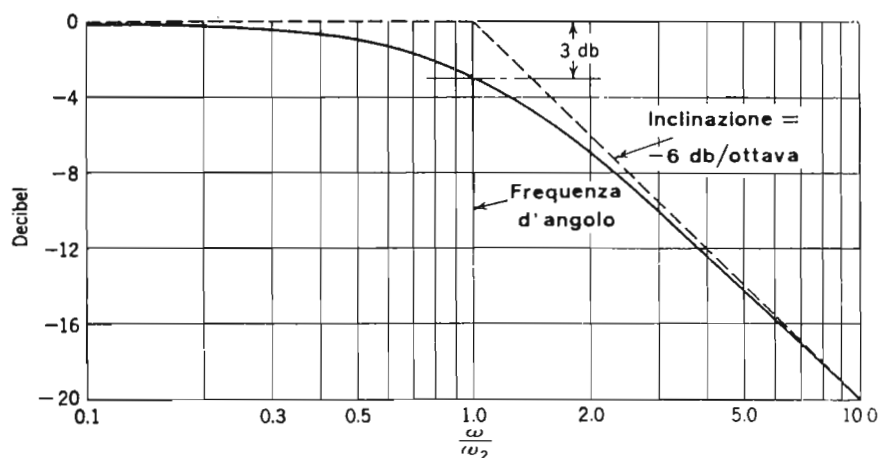



FIG. 4-14. — Amplificazione in decibel in funzione di ω/ω_2 per la risposta in alta frequenza.

Si può tracciare un diagramma simile per il guadagno in bassa frequenza in quei casi in cui il comportamento dell'amplificatore è determinato da una sola costante di tempo ed il guadagno ha un'espressione del tipo:

$$\left| \frac{A_L}{A_M} \right| = 20 \log \left[\frac{1}{1 + (\omega_1/\omega)^2} \right]^{1/2} \qquad (4\text{-}46)$$

La tab. 8 fornisce una serie di valori da interpolare. Si può allora ottenere il diagramma della curva tracciando gli asintoti e quindi disegnando

la curva effettiva nella regione della frequenza d'angolo utilizzando i dati tabulati.

Dovrebbe ora risultare evidente la ragione di esprimere un polinomio come prodotto di una serie di rapporti di frequenza, metodo che viene impiegato frequentemente.

TABELLA 8 — GUADAGNO IN BASSA FREQUENZA PER UN SOLO STADIO

ω/ω_1	*Guadagno* *db*	Φ *gradi*	ω/ω_1	*Guadagno* *db*	Φ *gradi*
0,1	—20,0	84,2	1,5	—1,61	33,7
0,2	—14,1	78,7	2,0	—0,96	26,5
0,3	—10,7	73,3	3,0	—0,42	18,5
0,5	— 7,0	63,5	5,0	—0,18	11,3
0,7	— 4,8	55,0	8,0	—0,07	7,2
1,0	— 3,0	45,0	10,0	—0,04	5,8

Le espressioni del guadagno in bassa frequenza eq. (4-19) o (4-34) mostrano l'effetto di due costanti di tempo, cioè presentano due frequenze di angolo. Scrivendo l'eq. (4-19) nella forma:

$$\left|\frac{A_{iL}}{A_{iM}}\right| = 20 \log \frac{\omega}{\omega_C} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^2} - 20 \log \sqrt{a^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^2} \qquad (4\text{-}47)$$

si ottengono i quattro asintoti tratteggiati di fig. 4-15a. I singoli termini sono stati indicati con A, B, C e D. L'asintoto complessivo viene ricavato mediante addizione, ed ha l'andamento della spezzata a tratto sottile di fig. 4-15b. La curva effettiva del guadagno può essere ottenuta approssimativamente mediante gli asintoti ed assume l'aspetto della curva in grassetto.

Se un secondo amplificatore lavora in cascata con il primo, il guadagno complessivo in decibel è la somma dei singoli guadagni in decibel a ciascuna frequenza. Il diagramma per un amplificatore a due stadi identici con —6db per stadio alla frequenza d'angolo, ha un asintoto con un'inclinazione di —12db per ottava. La fig. 4-16 mostra come vari la curva di risposta di più

stadi identici disposti in cascata. Ovviamente si ha una diminuzione della larghezza di banda per ogni stadio aggiunto.

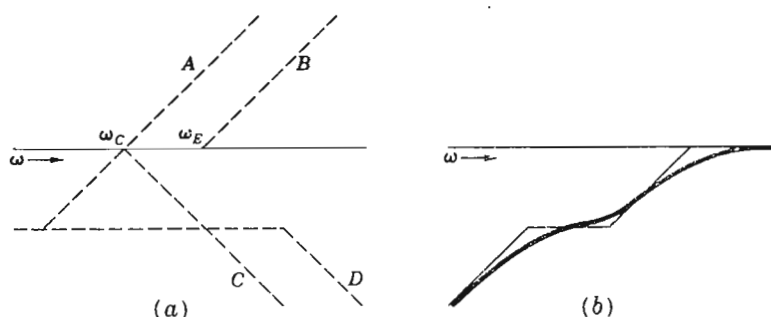



FIG. 4-15. — Determinazione asintotica della risposta in bassa frequenza.

Nel campo di frequenza dove $(\omega/\omega_2)^2$ è grande, ovverossia dove la curva del guadagno si approssima all'asintoto, l'angolo di fase di un singolo ampli-

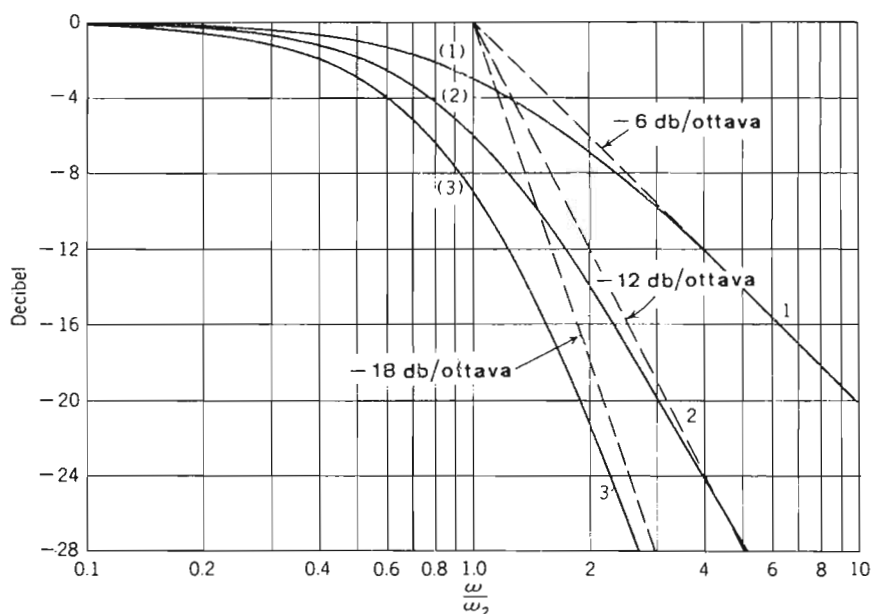



Fig. 4-16. — Risposta di un amplificatore ad *n* stadi identici; rispettivamente ad uno, a due, a tre stadi.

ficatore accoppiato ad RC si avvicinerà ai —90°, mentre nel caso di bassa frequenza l'angolo di sfasamento è 90°. Per un amplificatore a due stadi,

l'asintoto del guadagno ha un'inclinazione di —12db per ottava, e nella zona in cui la curva del guadagno si avvicina all'asintoto, l'angolo di fase risulterà prossimo a -180^0 (180^0 nel caso di bassa frequenza). In tal modo si può ottenere qualche informazione sull'angolo di fase dalla sola conoscenza dell'andamento della curva del guadagno.

4-9. Circuiti RC impiegati per variare la larghezza di banda.

Mediante l'uso di una semplice rete RC, è possibile stringere la banda passante sia verso le basse che le alte frequenze; analogamente sacrificando parte del guadagno, la banda può essere estesa da entrambi i lati. Ciò si ottiene combinando opportunamente la caratteristica discendente del guadagno dell'amplificatore con quella di un circuito RC che vari in senso opposto.

I circuiti di fig. 4-17 sono due dei tanti possibili: la loro analisi può essere effettuata mediante i metodi della frequenza d'angolo e della inclinazione delle tangenti alla curva del guadagno, già visti nel paragrafo precedente. Il circuito di fig. 4-17a taglia la risposta in alta frequenza dando così l'impressione di innalzare la risposta in bassa frequenza. Il rapporto tra le tensioni è:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)} \tag{4-48}$$

Per determinare il valore del guadagno agli estremi della banda di frequenza si prende ω molto piccolo e si ottiene:

$$\frac{E_o}{E_i} = 1$$

Analogamente per ω molto grande si ha:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha$$

Eseguendo quindi il logaritmo del rapporto e moltiplicandolo per 20 si ottiene 0 db come livello di riferimento in bassa frequenza e 20 log α come asintoto in alta frequenza. In tal modo la compensazione in bassa frequenza del circuito (o la perdita in alta frequenza) risulta una funzione di α, rapporto di resistenze.

Riscrivendo l'eq. (4-48) si ha:

$$\left|\frac{E_o}{E_i}\right| = \left[\frac{1 + (\omega/\omega_2)^2}{1 + (\omega/\omega_1)^2}\right]^{1/2} \tag{4-49}$$

dove

$$\omega_1 = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \qquad \omega_2 = \frac{1}{CR_2}$$

Passando ai decibel, il rapporto uscita-ingresso risulta:

$$\left|\frac{E_o}{E_i}\right| db = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \tag{4-50}$$

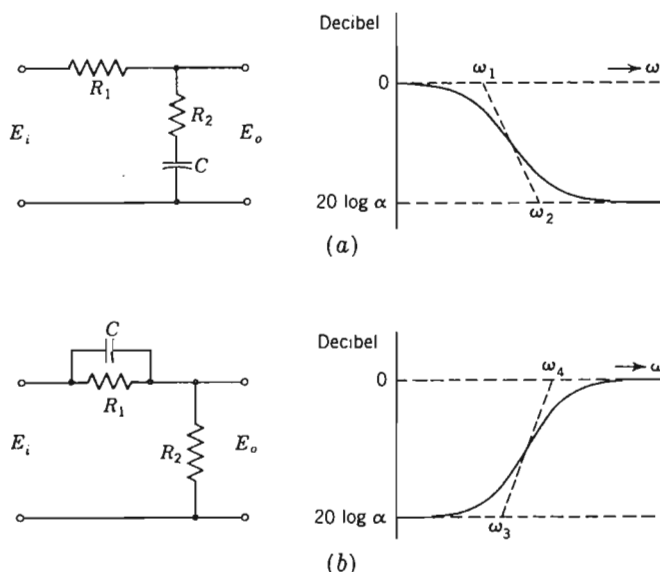



FIG. 4-17. — (*a*) Compensazione in bassa frequenza o abbassamento in alta frequenza. (*b*) Compensazione in alta frequenza o abbassamento in bassa frequenza.

ed è da notare che questi termini sono simili a quelli dell'eq. (4-47).

Per $\omega = \omega_1$ si ha una frequenza d'angolo, per la quale $|E_o/E_i|$ è inferiore di 3 db al livello in bassa frequenza. Questo stesso termine fornisce un asintoto alla curva di risposta con inclinazione di —6 db per ottava a partire dalla frequenza d'angolo $\omega = \omega_1$. L'asintoto è riportato tratteggiato in fig. 4-18a. Una seconda frequenza d'angolo viene fornita dal primo termine per $\omega = \omega_2$; a causa del segno positivo, l'asintoto ha un'inclinazione positiva di 6 db per ottava.

La risposta complessiva $|E_o/E_i|$ è allora fornita dalla somma di queste due risposte, come è indicato in fig. 4-18b. Dopo $\omega = \omega_2$, i due asintoti, hanno inclinazioni uguali ed opposte e si annullano a vicenda; l'asintoto della risposta diventa orizzontale ad un valore di 20 log α. Quindi la risposta in alta frequenza diminuisce di 20 log α rispetto al valore in bassa frequenza. Adoperando queste curve asintotiche è allora possibile tracciare la curva effettiva di risposta, riportata a tratto pieno in figura; i valori per i punti intermedi sono ottenuti dalle tabelle.

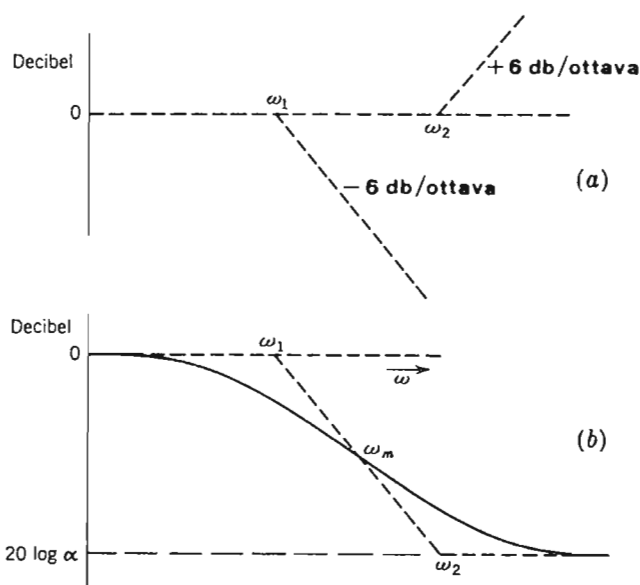



FIG. 4-18. — (*a*) Frequenze d'angolo e costruzione asintotica. (*b*) Impiego degli asintoti per ottenere la risposta di fig. 4-17.

Questo circuito permette, in maniera semplice, di ottenere una risposta migliore alle basse frequenze, sacrificando il guadagno alle alte frequenze. Nel campo dei servomeccanismi, il circuito è conosciuto come un circuito di *ritardo*, in quanto l'angolo di fase del segnale in uscita è in ritardo rispetto a quello di ingresso.

Il circuito di fig. 4-17b agisce in modo opposto, riducendo l'ampiezza della risposta alle basse frequenze rispetto a quella alle alte frequenze. La risposta di tale circuito è:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1R_2/(R_1 + R_2)} \tag{4-51}$$

Gli asintoti del guadagno in corrispondenza delle frequenze estreme sono, per ω molto piccolo:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha$$

e per ω molto grande:

$$\frac{E_o}{E_i} = 1$$

Eseguendo il logaritmo di quest'ultima espressione per passare in decibel, si vede che il livello zero di riferimento si trova alle alte frequenze. Il livello in decibel alle basse frequenze è 20 log α, e poiché è minore dell'unità, l'asintoto del guadagno in bassa frequenza è al di sotto del riferimento ed il circuito riduce l'ampiezza della risposta alle basse frequenze rispetto a quella alle alte. L'eq. (4-51) può essere scritta:

$$\left|\frac{E_o}{E_i}\right| = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\frac{1 + (\omega/\omega_3)^2}{1 + (\omega/\omega_4)^2}\right]^{1/2} \tag{4-52}$$

dove:

$$\omega_3 = \frac{1}{CR_1} \qquad \omega_4 = \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = \frac{\omega_3}{\alpha}$$

Passando in decibel, il rapporto tra ingresso e uscita diventa:

$$\left|\frac{E_o}{E_i}\right|_{db} = 20 \log \alpha + 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right] - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_4}\right)^2\right] \tag{4-53}$$

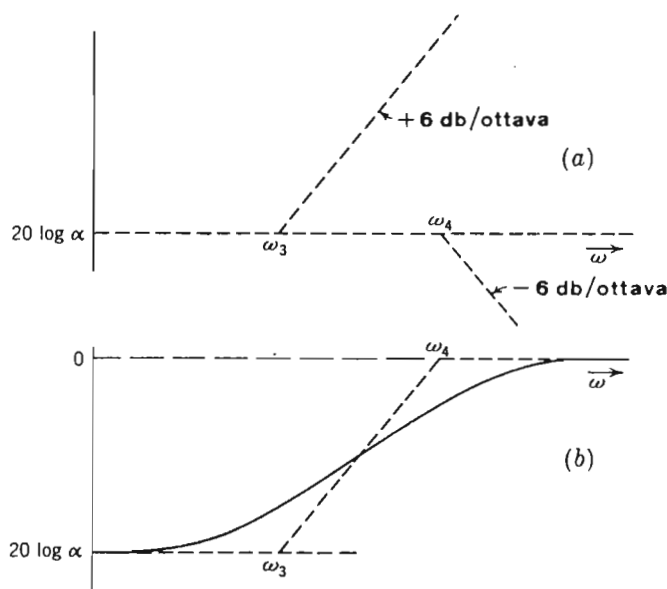



FIG. 4-19. — (*a*) Frequenze d'angolo ed asintoti per la fig. 4-17b. (*b*) Risposta del circuito.

La somiglianza di questa espressione con l'eq. (4-50) è evidente, e l'andamento della fig. 4-19 segue da un ragionamento analogo a quello relativo alla fig. 4-18.

Le inclinazioni del due asintoti possono essere sommate: l'inclinazione positiva annulla quella negativa al di sopra della frequenza d'angolo corrispondente ad ω_4, ed il risultato è riportato in figura. Si è inoltre tracciata l'effettiva curva di risposta che passa per i punti a ± 3 db in corrispondenza di ω_3 ed ω_4. L'ampiezza della risposta alle basse frequenze diminuisce rispetto a quella alle alte di una quantità pari a 20 log α db. Nel campo dei servomeccanismi, il circuito è noto come *rete anticipatrice*, in quanto la tensione d'uscita anticipa in fase quella di ingresso.

4-10. Fattori che influenzano la larghezza di banda di un amplificatore.

L'amplificazione di forme d'onda che contengono frequenze di molte migliaia di hertz, richiede amplificatori con notevole larghezza di banda e, normalmente, di grande guadagno. La frequenza inferiore di taglio dipende da C da C_E o C_k, capacità che possono essere aumentate in modo da rendere f_1 piccola. Poiché f_1 può essere mantenuta molto bassa ed f_2 può essere di qualche centinaio o migliaio di chiloertz, usualmente si trascura f_1 rispetto ad f_2 e si assume come ampiezza di banda la frequenza f_2 piuttosto che $f_2 - f_1$.

Si è visto che il guadagno in alta frequenza per un transistore ad emettitore comune è:

$$A_{IH} = \frac{-\beta R'_L}{R'_L + r_{ie}} \left(\frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} \right) \tag{4-54}$$

dove ω_2 ha il seguente valore:

$$\omega_2 = \frac{1}{C_s R'_L r_{ie}/(R'_L + r_{ie})} \tag{4-55}$$

Ossia il guadagno è proporzionale ad R'_L, equivalente al parallelo di R_L ed R_A, e la larghezza di banda è inversamente proporzionale allo stesso fattore. Ne segue che il prodotto *guadagno-larghezza* di banda, (GB), è indipendente da R'_L:

$$GB = \frac{\beta}{C_s r_{ie}} = \frac{g_m}{C_s} \tag{4-56}$$

Poiché per un dato transistore, $C_s = C_d + C_{cb}$, GB è determinato dai parametri del transistore. Se g_m è espresso in microsiemens e C_s in picofarad il prodotto guadagno-larghezza di banda risulta in megahertz. Il prodotto GB, o fattore di merito, è una costante per un dato transistore, e quindi non

è possibile aumentare la larghezza di banda senza sacrificare il guadagno e viceversa.

Il pentodo presenta un fattore di merito simile in quanto:

$$A_{vH} = - g_m R_L$$

$$\omega_2 = \frac{1}{(C_{gk} + C_{pk})R_L}$$

Ne segue che:

$$GB = \frac{g_m}{C_{gk} + C_{pk}} \tag{4-57}$$

che è la relazione valida per il pentodo.

A frequenze molto elevate, l'eq. (4-54) diventa:

$$A_{iH}\ \text{db} = A_{iM}\ \text{db} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_2} \tag{4-58}$$

ed il valore di ω per il quale A_{iH} si riduce a zero db, o il guadagno in alta frequenza, rapportato ad A_{iM}, si riduce all'unità, è:

$$\omega_T = A_{iM}\, \omega_2 \tag{4-59}$$

Così in un diagramma dei decibel in funzione della frequenza, il prodotto guadagno-larghezza di banda individua la frequenza alla quale il guadagno taglia l'asse di riferimento a 0 db. Questa corrisponde alla frequenza definita per il transistore nel paragrafo 4-3. Nei circuiti pratici vi è un diretto legame tra guadagno e larghezza di banda: ad ogni incremento di 6 db di guadagno, la larghezza di banda del dispositivo diminuisce di un'ottava al di sotto di f_T.

Se un amplificatore è composto di n stadi accoppiati ad RC in cascata, il guadagno complessivo rapportato ad A_M è dato da un polinomio nei rapporti ω/ω_x, dove ω_x dipende dai parametri di ciascuno stadio. Ossia se A'_H ed A'_M sono i valori complessivi, si ha:

$$\left| \frac{A'_H}{A'_M} \right| = \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_a)^2}\right]^{1/2} \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_b)^2}\right]^{1/2} + \ldots$$

Se gli stadi sono identici, e $\omega_x = \omega_2$ per ciascun stadio, allora:

$$\frac{A'_H}{A'_M} = \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_2)^2}\right]^{n/2} \tag{4-60}$$

Il limite di banda o il punto a metà potenza per l'intero amplificatore è allora fornito da:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_2)^2}\right]^{n/2}$$

$$\omega_{ov} = \omega_2 \sqrt{2^{1/n} - 1} \tag{4-61}$$

Ciò indica che se più stadi amplificatori identici ad RC sono posti in cascata, la larghezza di banda diminuisce; ciò è mostrato graficamente in fig. 4-16 e nella tab. 9. Se viene specificata per un amplificatore una determinata larghezza di banda totale, per ciascun stadio ω_2 deve essere considerevolmente più grande della larghezza di banda dell'amplificatore complessivo.

TABELLA 9 — LARGHEZZA DI BANDA PER *n* STADI RC IN CASCATA

Num. di stadi	ω_2/ω_{ov}	*Num. di stadi*	ω_2/ω_{ov}
1	1,00	5	2,57
2	1,56	6	2,86
3	1,96	7	3,12
4	2,27	8	3,33

Esempio — *Si progetti un amplificatore a più stadi con un guadagno di corrente complessivo, in media frequenza, di* 6000 (75 *db*) *e con un guadagno a* 100 *kHz solo del cinque per cento inferiore a quello in media frequenza. Si supponga di usare due soli stadi, per cui il guadagno di corrente per stadio sarà pari a* $\sqrt{6000} = 78$ (37,5 *db*). *La frequenza* f_2 *per il singolo stadio può essere ottenuta impiegando l'eq.* (4-60)

$$\frac{A'_H}{A'_M} = 0{,}95 = \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_2)^2}\right]^{2/2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_2} = 0{,}223$$

e poichè il guadagno a 100 *kHz è lo* 0,95 *di quello in media frequenza, si ha che* $f_2 = 100/0{,}223 = 450$ *kHz per ciascuno stadio.*

Si supponga di voler utilizzare il transistore 2N2196 *del tipo ad impiego generale che ha una* $f_T = 15$ *MHz. Allora per un guadagno di* 78 *per stadio*:

$$f_2 = \frac{f_T}{78} = 192 \text{ kHz}$$

ed il valore è ovviamente troppo basso. Si può allora provare con tre stadi realizzati con lo stesso transistore. Il guadagno richiesto per stadio risulta in tal caso di 18 *o* 25,2 *db, e*:

$$f_2 = \frac{f_T}{18} = 835 \text{ kHz}$$

valore sufficientemente più elevato di quello richiesto di 450 *kHz.*

4-11. Miglioramento della risposta in bassa frequenza.

La risposta in bassa frequenza di un amplificatore accoppiato ad RC, che impieghi un transistore o un tubo, dipende dai valori di C, C_E e delle resistenze del circuito. Da un punto di vista tecnico, il limite in bassa frequenza potrebbe essere esteso aumentando queste capacità; ma problemi di costo, dispersione e spazio intervengono nel progetto. In particolare non si può aumentare C indefinitamente in quanto esso viene impiegato per bloccare la tensione continua e le dispersioni di corrente aumentano con la capacità. Tali correnti di dispersione fanno variare la polarizzazione; inoltre le capacità parassite, dovute alle maggiori dimensioni del condensatore, possono introdurre una ulteriore limitazione nella risposta in alta frequenza. Da questo punto di vista la capacità C_E non è critica.

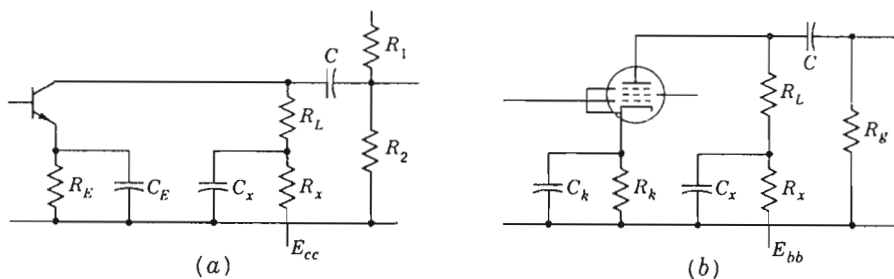



FIG. 4-20. — Rete di compensazione per la risposta in bassa frequenza.

Un valore inadeguato di C può essere compensato, parzialmente, mediante l'impiego di un carico in uscita la cui impedenza aumenti al diminuire della frequenza. Per il transistore di fig. 4-20a, il circuito equivalente in bassa frequenza è riportato in fig. 4-21a; in esso si è trascurato $r_{oe} = 1/h_{oe}$. Per il circuito a tubi a vuoto si fa uso di un pentodo per cui r_p scompare dal circuito equivalente di fig. 4-21b.

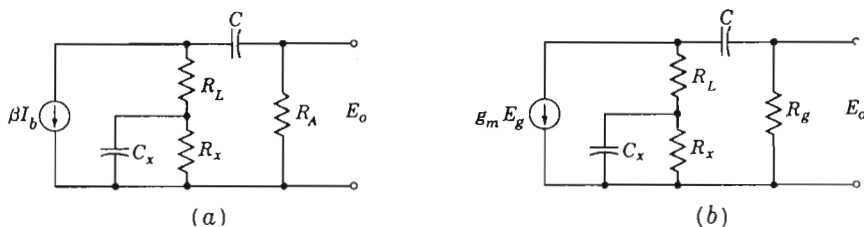



FIG. 4-21. — Circuiti equivalenti in bassa frequenza per gli schemi di fig. 4-20.

I circuiti equivalenti del transistore e del pentodo sono formalmente identici; nell'analisi che segue si supporrà di utilizzare un pentodo. Il carico in uscita è composto di R_L e C_x in serie ed offre un'impedenza crescente al diminuire della frequenza se la resistenza R_x, che fornisce una via alla corrente continua, risulta grande rispetto alla reattanza di C_x. Poichè questo non può essere realizzato per frequenze estremamente basse, la resistenza R_x pone un limite alla efficacia della compensazione.

Dal circuito equivalente si ha:

$$A_v = -g_m\left(R_L + \frac{R_x/j\omega C_x}{R_x + 1/j\omega C_x}\right)\frac{R_g}{R_g + 1/j\omega C} \qquad (4\text{-}62)$$

Ma $R_x \gg 1/\omega C_x$ per cui:

$$A_v = -g_m \frac{1 + j\omega C_x R_L}{C_x} \frac{CR_g}{1 + j\omega CR_g} \qquad (4\text{-}63)$$

È evidente che se:

$$C_x R_L = CR_g$$

il guadagno in bassa frequenza è indipendente dalla frequenza, almeno fino alla frequenza alla quale siano ancora verificate le condizioni imposte su R_x e C_x.

Si può vedere che la nuova pulsazione di taglio inferiore è:

$$\omega'_1 = \frac{1}{1 + R_x/R_L}\,\omega_1 \qquad (4\text{-}64)$$

Cosicché R_x dovrebbe essere grande, tanto quanto lo permette la tensione di alimentazione disponibile.

L'angolo di fase del guadagno risulta:

$$\varphi = \text{arctang}\,\frac{\omega(C_x R_L - CR_g)}{1 + \omega^2 CC_x R_L R_g} \qquad (4\text{-}65)$$

ed ancora se $C_x R_L = CR_g$, tale angolo si annulla e questa è la condizione desiderata.

4-12. Miglioramento della risposta in alta frequenza.

Gli amplificatori con capacità derivate, che ne limitano il guadagno in alta frequenza, presentano un'espressione del guadagno del tipo:

$$\frac{A_H}{A_M} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_2}$$

dove ω_2 è una funzione inversa della capacità parassita e della effettiva resistenza di carico R'_L. Si può ottenere un allargamento della banda dimi-

nuendo R'_L, ma si è visto che si ha contemporaneamente una perdita di guadagno. È possibile ottenere un qualche incremento di f_2 inserendo, in parallelo alle capacità parassite, un'induttanza che tenda ad aumentare l'impedenza di carico in quel campo di frequenze in cui la capacità del dispositivo incomincia a farla diminuire.

Il circuito compensato in derivazione di fig. 4-22 utilizza un induttore L in serie al carico R_1. Tale metodo per allargare la banda è applicabile sia ai transistori che ai pentodi, in quanto un pentodo ha un circuito equivalente simile a quello del transistore ma con $g_m E_{be}$ sostituita da $g_m E_g$, R_2 da R_g e C_s da C_g.

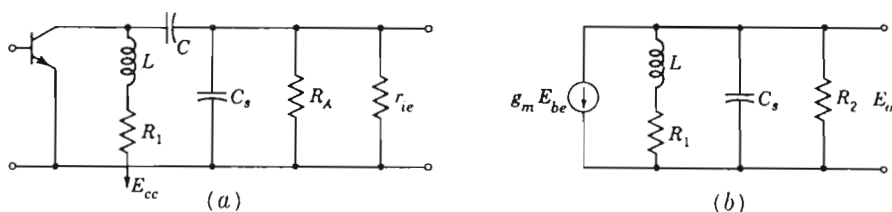



FIG. 4-22. — (*a*) Circuito compensato in parallelo. (*b*) Circuito equivalente per lo schema (*a*).

Si intende che la resistenza R_2 rappresenta il parallelo di R_A ed r_{ie} ed è quasi uguale a quest'ultima; la capacità C_s è già stata definita.

Senza compensazione di tipo induttivo, cioè con L = 0, il circuito ha una frequenza di taglio superiore data da:

$$\omega_2 = \frac{1}{C_s R_1 R_2/(R_1 + R_2)} = \frac{1}{C_s R_p} \tag{4-66}$$

con un guadagno di tensione:

$$A_M = \frac{-g_m R_1 R_2}{R_1 + R_2} = -g_m R_p \tag{4-67}$$

Queste espressioni vengono impiegate come termini di riferimento, per determinare il miglioramento realizzato con l'aggiunta di L.

Eseguendo la somma delle correnti per il circuito di fig. 4-22b si ha.

$$g_m E_{be} + E_o \left(\frac{1}{R_1 + j\omega L} + j\omega C_s + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

da cui:

$$\frac{E_o}{E_{be}} = \frac{-g_m R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega L/R_1}{1 - \frac{L C_s R_2}{R_1 + R_2}\omega^2 + j\omega\left(\frac{L}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2 C_s}{R_1 + R_2}\right)} \tag{4-68}$$

Questa relazione può essere scritta in forma più semplice utilizzando l'eq. (4-66) per gli amplificatori non compensati e ponendo:

$$m = \omega_2 L/R_1 \tag{4-69}$$

$$k = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{4-70}$$

Allora, essendo

$$A_M = - g_m R_1 R_2/(R_1 + R_2)$$

risulta:

$$\frac{A_H}{A_M} = \frac{1 + jm(\omega/\omega_2)}{1 - m(\omega/\omega_2)^2 + j(1 + mk)(\omega/\omega_2)} \tag{4-71}$$

Il quadrato del valore assoluto è:

$$\left| \frac{A_H}{A_M} \right|^2 = \frac{1 + m^2(\omega/\omega_2)^2}{1 + [1 - 2m(1-k) + m^2k^2](\omega/\omega_2)^2 + m^2(\omega/\omega_2)^4} \tag{4-72}$$

e l'angolo di fase:

$$\varphi(\omega) = \text{arctang}\, \frac{(1 + mk)(\omega/\omega_2)}{1 - m(\omega/\omega_2)^2} - \text{arctang} \left(\frac{m\omega}{\omega_2}\right) \tag{4-73}$$

L'eq. (4-72) è la tipica risposta di una rete, espressa come rapporto di due polinomi. Si può fare in modo che una tale funzione costituisca una risposta quanto più piatta è possibile variando i coefficienti sì da ottenere il maggior numero possibile di derivate con valore nullo in corrispondenza di $\omega = 0$. Si può vedere che si ottiene un risultato equivalente eguagliando a numeratore ed a denominatore i coefficienti delle potenze eguali di ω. Ossia:

$$H(\omega)^2 = \frac{1 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots}{1 + b_2\omega^2 + b_4\omega^4 + \dots}$$

e si vede che:

$$\frac{d[H(\omega)^2]}{d(\omega^2)} = 0 \quad \text{se} \quad a_2 = b_2$$

$$\frac{d^2[H(\omega)^2]}{d(\omega^2)^2} = 0 \quad \text{se} \quad a_4 = b_4$$

e così via.

Eguagliando i coefficienti dei termini $(\omega/\omega_2)^2$ si ha:

$$m^2 = 1 - 2m(1 - k) + m^2k^2 \tag{4-74}$$

il che conduce a:

$$m = \frac{1}{1 + k} \left(- 1 + \sqrt{\frac{2}{1 - k}} \right) \tag{4-75}$$

avendo scelto il segno positivo, in quanto m è positivo per definizione.

Esistono i seguenti limiti per la variabile indipendente k: (1) $k = \infty$ il che significa $R_1 = \infty$, il che in pratica è impossibile; (2) $k = 0$, il che significa R_2 grande, e tale condizione può essere realizzata con buona approssimazione se R_1 è piccola.

Per $k = 0$, il valore di m è 0,414 e la risposta è piatta senza inclinazione positiva. Volendo R_2 grande, si può scegliere il valore di R_1 in base all'eq. (4-67) in modo da ottenere un compromesso tra un guadagno A_M accettabile in media frequenza, e un valore di ω_2, in assenza di compensazione, abbastanza elevato.

L'induttanza di compensazione può essere ricavata successivamente mediante le eq. (4-66) e (4-69).

Eguagliando i coefficienti di $(\omega/\omega_2)^2$, il quadrato del valore assoluto del guadagno diventa:

$$\left| \frac{A_H}{A_M} \right|^2 = \frac{1 + m^2(\omega/\omega_2)^2}{1 + m^2(\omega/\omega_2)^2 + m^2(\omega/\omega_2)^4} \tag{4-76}$$

Si può determinare il valore di ω_2' in corrispondenza del quale la risposta dell'amplificatore compensato diminuisce di 3 db, ovverossia la frequenza a metà potenza, ponendo $|A_H/A_M|^2 = 1/2$. Da cui segue che:

$$\omega'_2 = \omega_2 \sqrt{{}^1/_2 + {}^1/_2 \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}}} \tag{4-77}$$

ossia l'allargamento di banda di un circuito compensato, può essere determinato in funzione della larghezza di banda del medesimo circuito senza l'induttanza di compensazione.

In corrispondenza del valore più basso di k cioè per $k = 0$, $m = 0{,}414$, la larghezza di banda è $\omega'_2 = 1{,}72\ \omega_2$ e questo è un valore che in pratica si adopera spesso. La curva di risposta per vari valori di m è riportata in fig. 4-23; essa mostra che ad $m = 0{,}414$ corrisponde una curva senza alcuna inclinazione positiva e senza alcun aumento della risposta per frequenze superiori alle medie. Si può vedere che $m = 0{,}5$ dà luogo ad un ulteriore miglioramento nell'allargamento della banda se è tollerabile un aumento di guadagno del 3 per cento; si deve ricordare che se si connettono n stadi di questo tipo, il picco aumenta ulteriormente.

Il tempo di ritardo t_d, normalizzato alla frequenza ω_2, è fornito dalla relazione:

$$t_d = \frac{\theta}{360(\omega/\omega_2)} \tag{4-78}$$

Riportando in diagramma questa grandezza si ottengono le curve di fig. (4-24), per vari valori di m e per $k = 0$. È evidente che l'uso di $m = 0{,}414$ per ottenere una risposta quanto più è possibile piatta fa sì che il tempo di ritardo non sia costante, specie per valori di $\omega > \omega_2$.

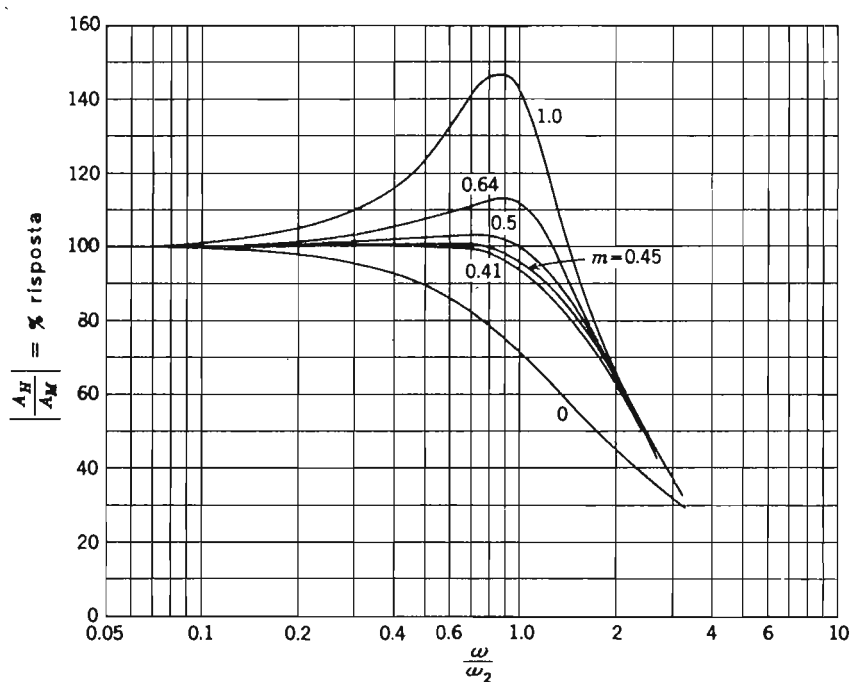



FIG. 4-23. — Risposta di un amplificatore compensato in parallelo per vari valori di m.

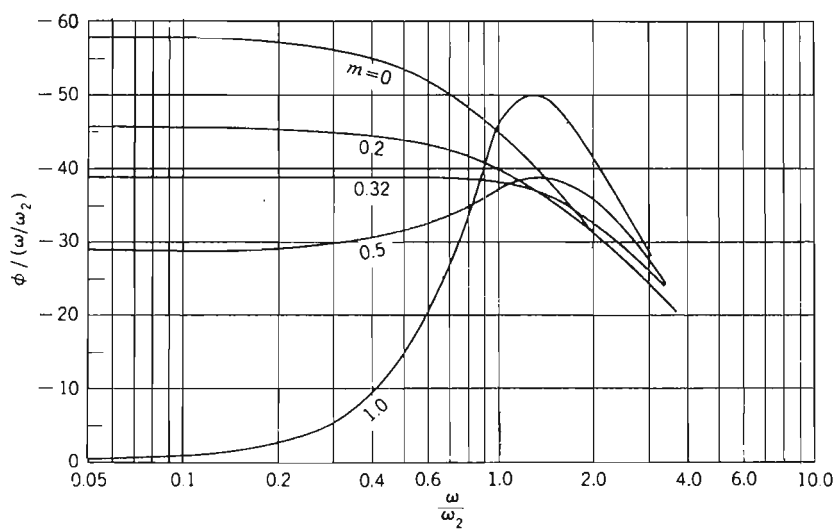



FIG. 4-24. — Andamento della fase per l'amplificatore compensato in parallelo.

Il metodo solitamente seguito per determinare il valore opportuno di m che dia luogo ad un ritardo costante è quello di eseguire la derivata di θ rispetto ad ω e di eguagliare il maggiore numero possibile di coefficienti di potenze eguali di ω presenti a numeratore e denominatore. Per $k = 0$, è possibile eguagliare i coefficienti di $(\omega/\omega_2)^2$ in tal caso si ottiene $m = 0{,}32$. Si può vedere dalla figura che questo valore di m dà luogo ad un ritardo che va diminuendo con continuità all'aumentare della frequenza. Si utilizza spesso un valore leggermente più alto, $m = 0{,}35$, in quanto esso dà luogo ad una minore variazione del ritardo per valori di ω maggiori di ω_2. Tale valore è molto prossimo ad $m = 0{,}414$, necessario per avere la risposta in ampiezza quanto più piatta è possibile. In seguito si vedrà che il tempo di salita di una forma d'onda impulsiva risulta minimo se m è uguale a 0,25.

In fig. 4-25, sono riportati circuiti più complessi che utilizzano ulteriori elementi circuitali. Il circuito di fig. 4-25a tiene conto della capacità parassita C_1 dovuta all'induttanza. Con $k_1 = C_1/C_s = 0{,}35$ la zona approssimativamente piatta rimane tale fino a $\omega = \omega_2$ e la larghezza di banda diventa $\omega'_2 = 1{,}82\ \omega_2$.

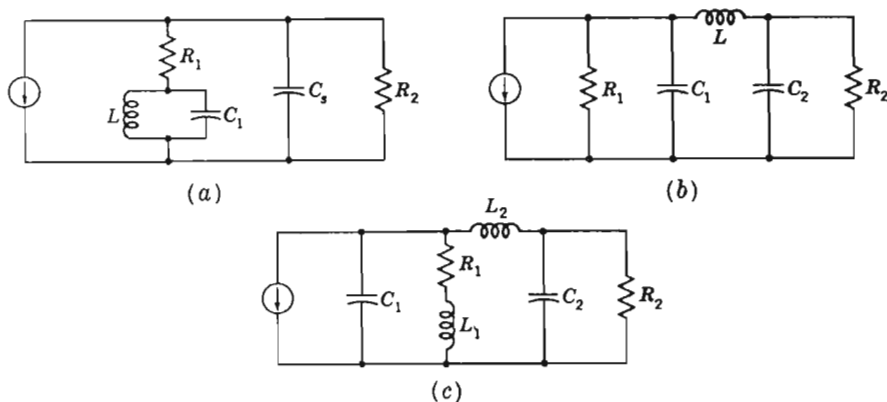



FIG. 4-25. — (*a*) Circuito modificato compensato in parallelo. (*b*) Circuito compensato in serie. (*c*) Circuito compensato in serie-parallelo.

Il circuito di fig. 4-25b è del tipo *compensato in serie* e risulta un circuito con ottime prestazioni se le capacità C_1 e C_2 sono nel rapporto $a = C_1/(C_1 + C_2) = 0{,}25$ e $C_1/C_2 = 0{,}33$. Il valore di m sarà allora 0,667 e la larghezza di banda: $\omega'_2 = 2{,}0\ \omega_2$. Tale circuito non è praticamente utilizzabile se non si può aggiungere alcuna capacità addizionale per ottenere il valore ottimo di a.

Il circuito di fig. 4-25c è un'ulteriore elaborazione e sembrerebbe che

all'aumentare del numero degli elementi del circuito, sia possibile ottenere prestazioni più elevate. In realtà questi circuiti più elaborati costituiscono dei sistemi di ordine più elevato, cosicchè danno luogo a risposte con oscillazioni transitorie o con sovraelongazioni. La sovraelongazione è accentuata se l'amplificatore presenta un picco nella risposta in alta frequenza o se il guadagno diminuisce troppo rapidamente dopo ω_2. Si trova che una variazione lenta e continua della risposta dà la migliore riproduzione degli impulsi, e che il circuito compensato in parallelo è spesso da preferirsi a quelli più elaborati per la diminuzione graduale del guadagno che esso presenta in alta frequenza.

4-13. Le forme d'onda impulsive.

Nella maggior parte degli elaboratori elettronici di dati ed in alcuni canali per telecomunicazioni si impiegano treni di impulsi come è rappresentato in fig. 4-26, piuttosto che segnali di tipo analogico. Gli impulsi di ampiezza E e durata δ si susseguono con *frequenza di ripetizione degli impulsi* (F.R.I.) pari a $1/T_R$.

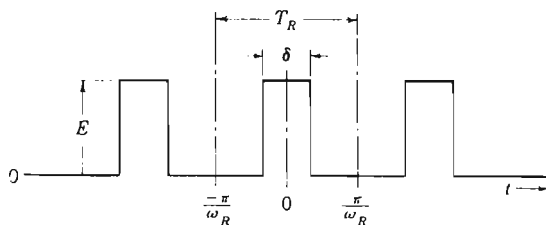



FIG. 4-26. — Treno di impulsi.

Gli amplificatori a larga banda o video, ora analizzati, lavorano spesso con forme d'onda impulsive. Per utilizzare appropriatamente i metodi di analisi nel dominio della frequenza, si richiede la conoscenza delle componenti in frequenza dei segnali impulsivi. L'analisi di Fourier provvede a fornire tali informazioni.

Un treno di impulsi ripetitivi può essere rappresentato da una serie infinita di termini in seno e coseno, con pulsazioni che risultano armoniche di una fondamentale o prima armonica ω_R, e un possibile termine costante aggiuntivo A_0. La frequenza più bassa, o fondamentale, è determinata dall'intervallo di ripetizione, o dal numero di impulsi al secondo. In genere una serie di Fourier si presenta nella forma:

$$f(t) = A_0 + a_1 \cos(\omega_R t) + a_2 \cos(2\omega_R t) + \ldots + a_k \cos(k\omega_R t) + \ldots + b_1 \operatorname{sen}(\omega_R t) + b_2 \operatorname{sen}(2\omega_R t) + \ldots + b_k \operatorname{sen}(k\omega_R t) + \ldots \quad (4\text{-}79)$$

Tale serie si può anche scrivere come:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_R t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\omega_R t) \tag{4-80}$$

I cofficienti della serie si possono determinare mediante manipolazioni algebriche e con l'uso di identità trigonometriche. In fig. 4-26, il periodo è individuato da $2\pi/\omega_R$, e se si moltiplicano entrambi i membri dell'eq. (4-79) per *dt* e si integra in tutto il periodo, tra $-\pi/\omega_R$ e π/ω_R, tutti i termini in seno e coseno a secondo membro vanno a zero, ed il termine costante vale:

$$A_0 = \frac{\omega_R}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_R}^{+\pi/\omega_R} f(t)\, dt \tag{4-81}$$

esso rappresenta il valor medio della funzione f(t).

Se si moltiplicano entrambi i membri dell'eq. (4-79) per $\cos(k\omega_R t)dt$ e si integra tra $-\pi/\omega_R$ e π/ω_R, si ha, in base a relazioni trigonometriche, che tutti i termini a secondo membro tendono a zero tranne quello che ha a_k come coefficiente. Questo è un metodo per determinare i coefficienti dei termini in coseno che sono dati da:

$$a_k = \frac{\omega_R}{\pi} \int_{-\pi/\omega_R}^{+\pi/\omega_R} f(t) \cos(k\omega_R t)\, dt \tag{4-82}$$

Un'analoga manipolazione permette di conoscere i coefficienti dei termini in seno:

$$b_k = \frac{\omega_R}{\pi} \int_{-\pi/\omega_R}^{+\pi/\omega_R} f(t) \operatorname{sen}(k\omega_R t)\, dt \tag{4-83}$$

Per una funzione pari di x risulta: $f(x) = f(-x)$, mentre per una dispari $f(-x) = -f(x)$.

Ne segue che il coseno è una funzione pari, il seno dispari. Se f(t) è una funzione dispari, l'eq. (4-82) include il prodotto di una funzione dispari per una pari, ed il risultato è una funzione dispari. L'integrale di una funzione dispari tra limiti uguali in valore assoluto, l'uno positivo e l'altro negativo, è nullo in quanto il contributo positivo è annullato da quello negativo. Dunque se f(t) è *dispari*, i suoi coefficienti a_k sono nulli, e *la serie di Fourier per una funzione dispari comprenderà solo termini in seno.* Per una ragione analoga, se f(t) è *pari* i coefficienti b_k sono nulli, e *la serie di Fourier di una funzione pari sarà composta di soli termini in coseno.* Il termine costante, che dipende dall'esistenza del valore medio della f(t) nel periodo, può essere presente in entrambi i tipi di serie.

Esempio — *Si determini una serie di Fourier che rappresenti il treno di impulsi rettangolari, di fig. 4-27. Si scelga l'origine degli assi in modo che, risultando la funzione pari, la serie sia composta di soli termini in coseno. Dallo esame dell'onda si vede che essa ha un valore medio ossia un termine continuo* $A_0 = E/2$.

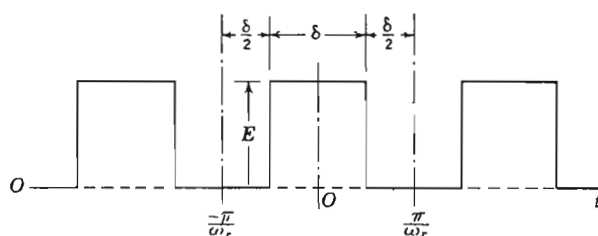



FIG. 4-27. — Una forma d'onda rettangolare

Il generico coefficiente può scriversi come:

$$a_k = \frac{\omega_R}{\pi} \int_{-\pi/2\omega_R}^{+\pi/2\omega_R} E \cos(k\omega_R t)\, dt$$

L'intervallo di integrazione coincide con metà periodo, in quanto E *è nulla al di fuori dell'intervallo* $(-\pi/2\omega_R,\ \pi/2\omega_R)$. *Ne segue che:*

$$a_l = \frac{\omega_R E}{\pi} \left. \frac{\operatorname{sen}(k\omega_R t)}{k\omega_R} \right]_{-\pi/2\omega_R}^{+\pi/2\omega_R} = \frac{2E}{\pi k} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}$$

La serie di Fourier è quindi:

$$f(t) = \frac{E}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{\pi k} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \cos(k\omega_R t)$$

ed i primi termini possono scriversi nella forma:

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_R t) - \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_R t) + \frac{2E}{5\pi} \cos(5\omega_R t) - \ldots$$

I coefficienti delle varie frequenze presenti in un'onda rettangolare sono stati calcolati e tabellati nella tab. 10. *La* 55a *armonica ha ancora un'ampiezza di circa l'uno per cento della fondamentale e contribuisce apprezzabilmente a ricostruire con precisione la forma d'onda.*

Un segno negativo prima dell'ampiezza indica uno sfasamento di 180° per quella determinata armonica.

TABELLA 10 — AMPIEZZE RELATIVE DI ALCUNE ARMONICHE DI UN'ONDA RETTANGOLARE

Armonica	*Ampiezza*	*Armonica*	*Ampiezza*	*Armonica*	*Ampiezza*
1	0,636	13	0,049	65	0,0098
3	—0,212	15	—0,042	75	—0,0085
5	0,127	25	0,025	85	0,0075
7	—0,091	35	—0,018	95	—0,0067
9	0,070	45	0,014	—	—
11	—0,058	55	—0,011	—	—

Una serie con un grande numero (teoricamente infinito) di termini di frequenze non permette di rendersi conto rapidamente di quel che succede quando una serie di impulsi viene trasmessa attraverso un amplificatore a larghezza di banda finita. Si può ottenere un'espressione più adatta, per un'analisi immediata, ritornando all'eq. (4-82):

$$a_k = \frac{\omega_R}{\pi} \int_{-\pi/\omega_R}^{+\pi/\omega_R} f(t) \cos(k\omega_R t)\, dt$$

Poiché f(t) è nulla tranne che nell'intervallo tra $t = -\delta/2$ e $t = +\delta/2$, si possono cambiare i limiti di integrazione:

$$a_k = 2f_R \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} E \cos(2\pi f_R k t)\, dt \qquad (4\text{-}84)$$

Eseguendo l'integrazione, si ha:

$$a_k = 2Ef_R\delta \frac{\text{sen}(\pi k f_R \delta)}{\pi k f_R \delta} \qquad (4\text{-}85)$$

Relazione che esprime l'ampiezza della k^{ma} armonica di un impulso rettangolare in funzione della durata dell'impulso δ e della frequenza di ripetizione, f_R.

Le ampiezze relative sono riportate in fig. 4-28. L'altezza di ciascuna linea verticale compresa nell'inviluppo fornisce il valore a_k di quel particolare termine nella rappresentazione della serie di Fourier. La forma dell'inviluppo indica le ampiezze relative dei vari gruppi di armoniche. Il numero di armoniche compreso in ciascun inviluppo è inversamente proporzionale all'intervallo di ripetizione. Al diminuire della cadenza degli impulsi, le armoniche aumentano e lo spettro si addensa. Al limite, per un impulso isolato,

cioè per $f_R \to 0$, lo spettro di frequenza viene ottenuto mediante l'integrale di Fourier, che per una funzione impulsiva pari è:

$$S(\omega) = \frac{E\delta}{2\pi} \frac{\text{sen}(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2} \tag{4-86}$$

espressione del tipo: (sen x)/x. Di conseguenza lo spettro delle ampiezze delle armoniche per un singolo impulso, è rappresentato dalla curva inviluppo di fig. 4-28. Si può vedere che l'ampiezza della fondamentale è $E\delta/2\pi$.

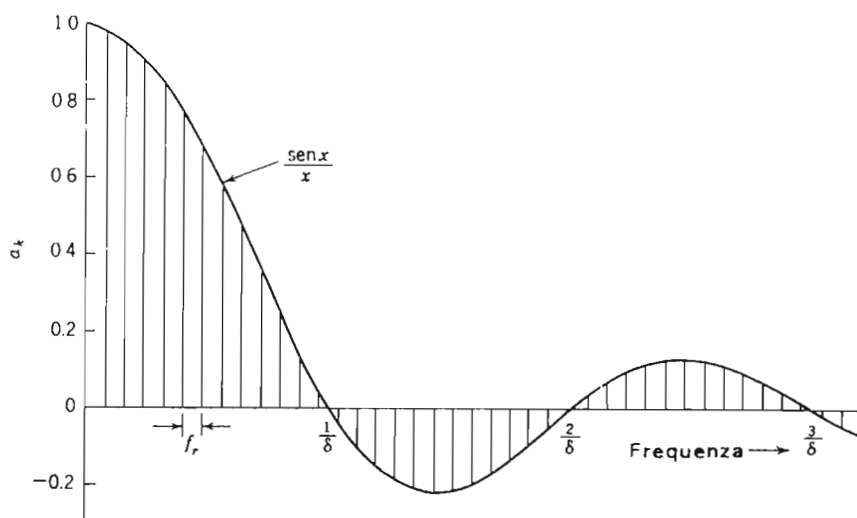



FIG. 4-28. — Distribuzione spettrale di armoniche in un treno di impulsi ricorrenti.

Come esempio, si consideri un impulso che abbia una durata δ di 1 microsecondo, in modo che il primo punto di nullo nello spettro lo si ha a $1/\delta =$ $= 1.000.000$ Hz, il secondo a 2.000.000 Hz ecc. Se la cadenza di ripetizione è di 10.000 impulsi al secondo, vi saranno 100 armoniche in ogni curva dello inviluppo; se $f_R = 1000$, vi saranno 1000 armoniche in ogni curva; e se $f_R = 10$, vi saranno allora 100.000 armoniche nella prima curva ed in ciascun'altra dello spettro.

Le frequenze cui corrisponde un'ampiezza nulla sono funzioni solamente della durata δ, poichè per questi punti:

$$\frac{\text{sen}(\pi k f_R \delta)}{\pi k f_R \delta} = 0$$

$$\pi k f_R \delta = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La particolare armonica per la quale l'ampiezza è nulla è allora:

$$kf_R = \frac{n}{\delta} \tag{4-87}$$

Se un segnale impulsivo viene applicato all'ingresso di un amplificatore, ciascuna frequenza componente verrà amplificata e sfasata secondo le caratteristiche dell'amplificatore dando luogo ad un nuovo spettro con ampiezze modificate e con angoli di fase variati.

Se la risposta in frequenza dell'amplificatore è limitata, gli impulsi di uscita non avranno la forma di quelli di ingresso. L'importanza di ogni singolo gruppo di armoniche dipende dal rapporto tra le loro ampiezze e quella della fondamentale.

Una forma d'onda risulta più distorta, se non viene correttamente amplificata un'armonica di grande ampiezza, di quanto non lo sia se un'armonica di piccola ampiezza cade fuori della banda passante dell'amplificatore.

Normalmente il restringimento della banda di un amplificatore viene valutato in ragione del numero lobi della curva inviluppo che cadono all'interno della banda passante. Quanti più lobi della fig. 4-28 sono compresi nella banda passante, tanto più migliorerà la fedeltà di riproduzione degli impulsi; per impulsi di minore durata, si richiederà un amplificatore con larghezza di banda maggiore onde ottenere un'adeguata riproduzione. Tuttavia la decisione circa quante armoniche o lobi dell'inviluppo debbano essere comprese nella banda passante è arbitraria; bisogna basarsi generalmente sul costo del progetto, tenendo presente che la riproduzione di norma sarà eccellente, se la larghezza di banda dell'amplificatore si estende oltre il quarto o quinto zero. In realtà poichè il maggior numero di armoniche di grande ampiezza compare nella prima curva dell'inviluppo, si può spesso ottenere una riproduzione con una distorsione tollerabile considerando le frequenze fino al primo zero. In tal caso la banda dell'amplificatore andrà dalla frequenza di ripetizione come limite inferiore fino alla frequenza $1/\delta$ come limite superiore.

Esempio — *Per un treno di impulsi rettangolari con* $\delta = 10\mu s$, *e con una frequenza di ripetizione di* 4000 *impulsi al secondo, trovare l'ampiezza delle prime cinque armoniche. Quante armoniche saranno comprese in ciascun lobo dello spettro?.*

Dall'eq. (4-85) *si ha*:

$$a_k = 2Ef_R\delta \frac{\text{sen}(\pi k f_R \delta)}{\pi k f_R \delta} = \frac{2E}{\pi k} \text{sen}(0{,}04\pi k)$$

Trascurando il termine continuo, la serie risulta

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 0{,}079E \cos(2\pi \times 4000t) + 0{,}079E \cos(2\pi \times 8000t) \\ & + 0{,}078E \cos(2\pi \times 12.000t) + 0{,}076E \cos(2\pi \times 16.000t) \\ & + 0{,}074E \cos(2\pi \times 20.000t) + \ldots \end{aligned}$$

Essendo

$$kf_R = 1/\delta = 100.000 \text{ Hz}$$

vi saranno:

$$k = \frac{100.000}{4000} = 25 \text{ armoniche}$$

in ciascun lobo dello spettro.

4-14. Risposta degli amplificatori nel dominio del tempo: tempo di salita.

Necessità pratiche impongono l'uso di amplificatori con banda non troppo larga, di conseguenza gli impulsi di uscita subiranno una certa distorsione dovuta all'eliminazione delle componenti in alta e bassa frequenza. L'analisi delle forme d'onda impulsive nel dominio del tempo permette di ottenere informazioni sulla distorsione in modo più diretto di quanto sia possibile attraverso l'analisi nel dominio della frequenza.

Dall'analisi nel dominio del tempo, inoltre, potranno scaturire indicazioni per il progetto di massima dell'amplificatore e sui criteri da seguire per una soddisfacente riproduzione dell'impulso.

Quando un impulso di tensione della forma indicata in fig. 4-29a, viene applicato ad un amplificatore con banda limitata, la forma d'onda in uscita può venire distorta in vari modi, come risulta dalle figg. 4-29b e c.

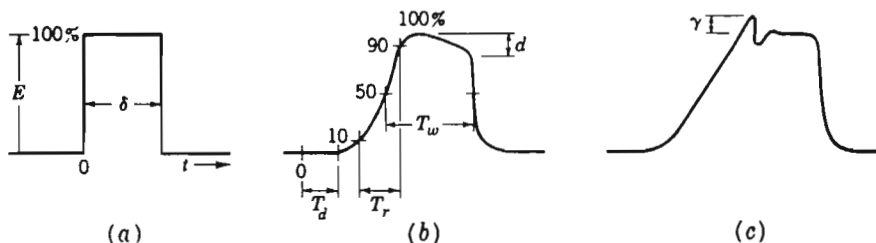



FIG. 4-29. — Forme d'onda impulsive: (*a*) impulso ideale; (*b*) impulso in uscita; (*c*) impulso con sovraondulazione.

Si supponga di applicare un impulso di ampiezza E e durata δ. L'impulso in uscita può essere ritardato di un tempo finito T_d, rispetto all'ingresso, inoltre, poiché i circuiti effettivi non possono reagire istantaneamente al tempo di salita nullo di un impulso ideale, il tempo di salita dell'impulso in uscita sarà sempre finito.

Per evitare l'errore dovuto alla stima dell'istante d'inizio dell'impulso, il *tempo di salita* T_r viene definito come il tempo occorrente perché l'impulso

passi dal 10 al 90 per cento dell'ampiezza. È anche difficile da misurare la larghezza dell'impulso e, di conseguenza, la si definisce spesso come il tempo che intercorre tra i punti posti al 50% dell'ampiezza rispettivamente sul fronte d'onda di salita e di discesa. Si usano anche altre definizioni per la larghezza dell'impulso.

In un impulso di lunga durata, la cresta può presentare una caduta d o una sovraelongazione γ. La sovraelongazione è rappresentativa di una equazione del secondo ordine per il circuito e mostra il possibile effetto della inclusione di una induttanza di compensazione. Sia la caduta d che la sovraelongazione γ sono ordinariamente specificate in percentuale della ampiezza dell'impulso.

L'effetto del circuito sull'impulso d'uscita può essere studiato in due fasi successive:

1) determinando le grandezze che controllano e rendono minimo il tempo di salita;

2) determinando la risposta durante e dopo che l'impulso ha raggiunto la massima ampiezza.

La salita dipende dalla velocità con cui le capacità in parallelo possono caricarsi, di conseguenza il tempo di salita è funzione della risposta in alta frequenza; la diminuzione di ampiezza dipende invece dalle variazioni di carica nelle capacità in serie e quindi della risposta in bassa frequenza del circuito.

Il circuito equivalente in alta frequenza di un amplificatore ad emettitore comune accoppiato ad RC, può ridursi, per lo studio del tempo di salita, a quello riportato in fig. 4-30. La resistenza R_p equivale al parallelo di R_L,

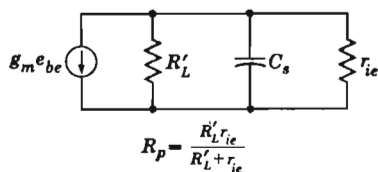



FIG. 4-30. — Circuito equivalente in alta frequenza di un amplificatore RC ad emettitore comune.

R_A ed r_{ie} dello stadio successivo; C_s è la capacità di diffusione, in cui si può considerare compresa la capacità per effetto Miller dovuta allo stadio seguente. Per il pentodo si ha un circuito identico; in tal caso R_p risulterebbe la resistenza equivalente di R_L ed R_g, e C_s sarebbe dovuta a $C_{pk} + C_{gk}$

Per continuare il parallelo tra transistori e pentodi, è opportuno utilizzare come circuito equivalente quello di fig. 4-30 in cui il generatore di corrente controllato è funzione di g_m, il che è esatto se si ricorda che dal-

l'equazione (4-3) risulta $\beta I_b = g_m E_{be}$. Il guadagno di tensione in media frequenza è allora:

$$A_{vM} = -g_m R_p$$

dove R_p è definito in figura. In definitiva, per analogia con l'eq. (4-41) il guadagno di tensione in alta frequenza risulta:

$$A_{vH} = -g_m R_p \frac{1}{1 + j\omega C_s R_p} \qquad (4\text{-}88)$$

che, per lo studio del comportamento in transitorio mediante il metodo delle trasformate, può essere modificata in:

$$A_{vH}(s) = \frac{-g_m}{C_s} \frac{1}{s + 1/C_s R_p} \qquad (4\text{-}89)$$

Se si applica in ingresso un gradino unitario di ampiezza E, ricordando che $E_{be}(s) = 1/s$, si ha:

$$E_o(s) = \frac{-g_m}{C_s} \frac{1}{s} \frac{1}{s + 1/C_s R_p}$$

Si ha quindi, come risultato, una tensione in uscita durante il tempo di salita data da:

$$e_o(t) = -g_m R_p (1 - \epsilon^{-t/C_s R_p}) \qquad (4\text{-}90)$$

Il tempo di salita è così funzione della costante di tempo $C_s R_p$, che coincide con $1/\omega_2$ nella trattazione nel dominio della frequenza.

Il 100% del livello di uscita vale $E_o = -g_m R_p$. I punti al 10 e al 90% per la misura del tempo di salita, possono essere determinati ponendo $e_o(T_{10}) = -0{,}1\ g_m R_p$ e $e_o(T_{90}) = -0{,}90\ g_m R_p$, che forniscono:

$$T_{90} = 2{,}303 C_s R_p$$

$$T_{10} = 0{,}106 C_s R_p$$

cosicché in definitiva:

$$T_{90} - T_{10} = T_r = 2{,}2 C_s R_p = \frac{2{,}2}{\omega_2} \qquad (4\text{-}91)$$

Il guadagno a metà banda è: $A_M = -g_m R_p$, e può essere incrementato aumentando R_p. In questo modo tuttavia si aumenta il tempo di salita. La proporzionalità tra guadagno e tempo di salita può essere considerata come cifra di merito di un transistore o di un pentodo.

$$\frac{\text{guadagno}}{\text{tempo di salita}} = \frac{A_{vM}}{T_r} = \frac{g_m}{2{,}2C} \qquad (4\text{-}92)$$

La capacità C è dovuta alle capacità interne del dispositivo, C_s o $C_{gk} + C_{pk}$; anche g_m è un parametro interno del dispositivo.

Quanto più alto è il rapporto g_m/C per un dispositivo, tanto migliore sarà il comportamento sia nei riguardi del guadagno che del tempo di salita.

Si è detto che la maggior parte degli amplificatori a larga banda possono essere considerati come unità passa basso, e cioè con $f_1 = o$ e $f_2 = 1/2\pi C_s R_p$. Ne segue che il prodotto della larghezza di banda per il tempo di salita è costante:

$$BT_r = \frac{2{,}2C_sR_p}{2\pi C_sR_p} = 0{,}35 \tag{4-93}$$

per gli amplificatori accoppiati ad RC sia a transistori che a pentodi. In generale, questo rapporto è compreso tra 0,35 e 0,45, raggiungendo il valore più alto per gli amplificatori del secondo ordine che presentano una certa sovraelongazione.

Ormai si realizzano transistori il cui tempo di salita, per risposta impulsiva, può ridursi a qualche nanosecondo, cosicché sono ottenibili larghezze di banda di centinaia di megahertz.

Il tempo di salita per amplificatori pluristadio può essere determinato in modo empirico, tuttavia, per circuiti senza sovraelongazione, può essere approssimativamente dato da:

$$T_{rn} = \sqrt{T_{r1}^2 + T_{r2}^2 + \dots} \tag{4-94}$$

4-15. Effetto della compensazione sul tempo di salita.

Poiché dalla stessa costante di tempo dipende sia f_2 che il tempo di salita, l'uso della compensazione per aumentare f_2 ridurrà il tempo di salita. Tuttavia, poichè il circuito diventa del secondo ordine, si può avere una sovraelongazione. Facendo riferimento al circuito di fig. 4-22 ed all'eq. (4-71), la risposta transitoria ad un gradino unitario in ingresso è:

$$A_{vH}(s) = \frac{-g_m}{C_s}\frac{1}{s}\cdot\frac{s + \omega_2/m}{s^2 + [(1 + mk)/m]\omega_2 s + \omega_2^2/m} \tag{4-95}$$

dove, come prima

$$m = \frac{\omega_2 L}{R_1} \qquad k = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \omega_2 = \frac{1}{C_sR_p}$$

Il denominatore presenta due poli corrispondenti alle sue radici

$$p_1, p_2 = \frac{\omega_2}{m}\left[-1 \pm \sqrt{(1 + mk)^2 - 4m}\right] \tag{4-96}$$

Per il caso di k = o, come prima, e per m<0,25, i poli sono:

$$p_1,\ p_2 = \frac{\omega_2}{m}\left(-1 \pm \sqrt{1-4m}\right)$$

situati sull'asse reale negativo del piano complesso. La risposta è allora:

$$A_{vH}(t) = \frac{-g_m}{C_s}\left[1 - \epsilon^{-\omega_2 t/2m}\left(\frac{1-2m}{\sqrt{1-4m}}\ \mathrm{senh}\ \frac{\sqrt{1-4m}}{2m}\ \omega_2 t + \cosh \frac{\sqrt{1-4m}}{2m}\ \omega_2 t\right)\right] \quad (4\text{-}97)$$

Per m>0,25, i poli sono complessi coniugati, e la risposta assume la forma:

$$A_{vH}(t) = \frac{-g_m}{C_s}\left[1 - \epsilon^{-\omega_2 t/2m}\left(\frac{1-2m}{\sqrt{4m-1}}\ \mathrm{sen}\ \frac{\sqrt{4m-1}}{2m}\ \omega_2 t + \cos \frac{\sqrt{4m-1}}{2m}\ \omega_2 t\right)\right] \quad (4\text{-}98)$$

che rappresenta un'oscillazione smorzata.

Per m = 0,25, ossia per il valore critico di m, l'induttanza di compensazione risulta:

$$L = \frac{R_1}{4\omega_2} \quad (4\text{-}99)$$

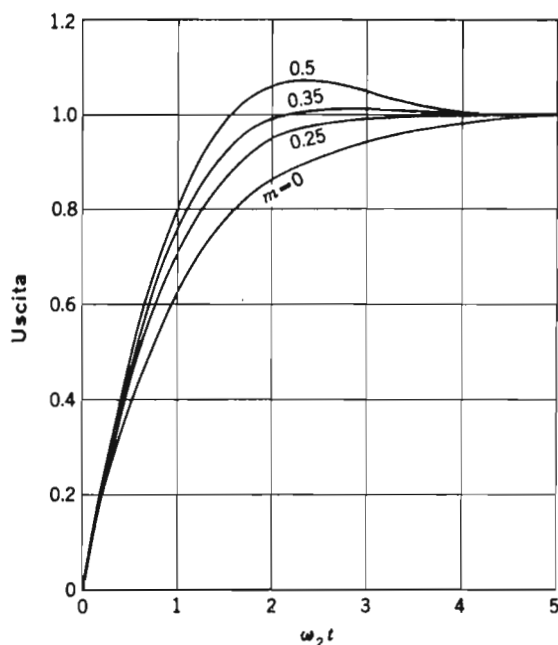



FIG. 4-31. — Effetto di *m* sul tempo di salita.

e questa è la più alta compensazione possibile senza che si produca una sovraelongazione nella risposta.

In fig. 4-31 sono tracciate le risposte per diversi valori di m, in funzione di $\omega_2 t$. Il miglioramento del tempo di salita nei confronti di un amplificatore non compensato, viene mostrato dalla fig. 4-32, dove T_r è paragonato a 2.2 $C_s R_p$, tempo di salita di un circuito non compensato. Valori di $m > 0,4$ aumentano la sovraelongazione considerevolmente senza una corrispondente riduzione del tempo di salita.

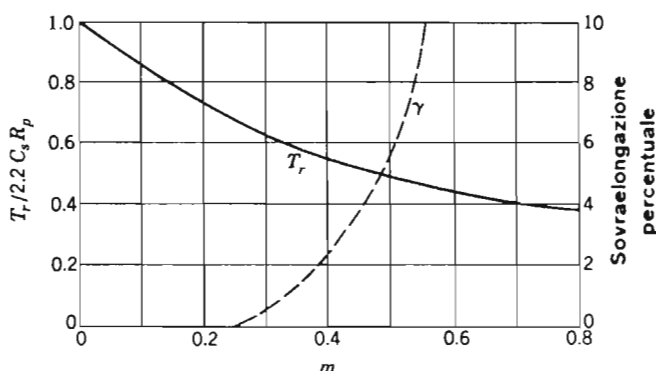



Fig. 4-32. — Confronto tra un amplificatore compensato in parallelo ed uno privo di compensazione.

Il valore di $m = 0,414$, che nel dominio della frequenza dà luogo alla migliore risposta senza picchi al di sopra del valore del guadagno in media frequenza, può portare ad un'eccessiva sovraelongazione nel dominio del tempo, per cui viene utilizzato più spesso il valore di 0,35 che fornisce anche una buona risposta in fase ed una larghezza di banda di 1,62 ω_2.

4-16. Risposta degli amplificatori nel dominio del tempo: la caduta in tensione.

Per lo studio della risposta durante e dopo il massimo valore dell'impulso, si utilizza il circuito equivalente in bassa frequenza del transistore ad emettitore comune o del pentodo a catodo comune. In un primo tempo si eseguirà l'analisi con riferimento all'effetto della capacità di accoppiamento C. Il circuito è indicato in fig. 4-33; le forme d'onda impulsive in fig. 4-34.

Si assuma un tempo di salita breve rispetto alla durata δ in modo da poter trascurare il tempo di salita; l'impulso assume allora la forma rappresentata in figura. La caduta (diminuzione) di tensione durante l'impulso è dovuta alla scarica di C e varia esponenzialmente nel tempo.

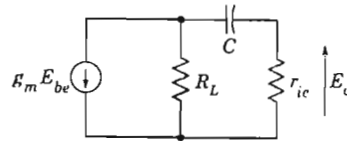



FIG. 4-33. — Circuito equivalente in bassa frequenza.

FIG. 4-34. — Impulso in ingresso ed impulso in uscita con caduta.

La tensione di uscita risulta:

$$E_o(s) = -g_m E_{be} \frac{R_L r_{ie}}{R_L + r_{ie} + 1/sC}$$

$$= -g_m R'_L E_{be} \frac{s}{s + 1/\tau'} \qquad (4\text{-}100)$$

dove

$$R'_L = R_L r_{ei}/(R_L + r_{ie}) \qquad e \qquad \tau' = C(R_L + r_{ie})$$

La tensione di uscita per un ingresso a gradino o impulsivo può essere ricavata ponendo $E_{be} = E_1/s$ e considerando la antitrasformata che conduce a:

$$c_o(t) = -g_m R'_L E_1 \epsilon^{-t/\tau'} \qquad 0 < t < \delta \qquad (4\text{-}101)$$

dove E_1 è l'ampiezza dell'impulso di ingresso. Questa relazione stabilisce la caduta esponenziale dell'uscita durante il periodo δ.

Per $t = \delta-$, l'ampiezza si riduce a:

$$e_o(\delta-) = -g_m R'_L E_1 \epsilon^{-\delta/\tau'} \qquad (4\text{-}102)$$

L'ingresso diminuisce di $-E_1$ volt per $t = \delta$, per cui l'uscita diventa:

$$e_o(t) = -g_m R'_L E_1 (\epsilon^{\delta/\tau'} - 1)\epsilon^{-(\tau-\delta)/\tau'} \qquad t > \delta \qquad (4\text{-}103)$$

In fig. 4-35 sono riportate le forme d'onda calcolate per vari rapporti tra la costante di tempo e la durata δ dell'impulso. Idealmente, il circuito

dovrebbe trasmettere l'impulso senza distorsione o caduta, e dovrebbe presentare uscita nulla dopo t = δ. L'uscita avrà una caduta trascurabile se la costante di tempo τ' è grande rispetto a δ. In questa condizione il termine in parentesi nell'eq. (4-103) risulta piccolo, e così una costante di tempo elevata porta ad una caduta di tensione piccola e ad una uscita trascurabile dopo t = δ, come risulta in fig. 4-35. La costante di tempo dovrebbe essere approssimativamente da 10 a 50 volte δ, per ottenere una forma d'onda in uscita ragionevolmente buona.

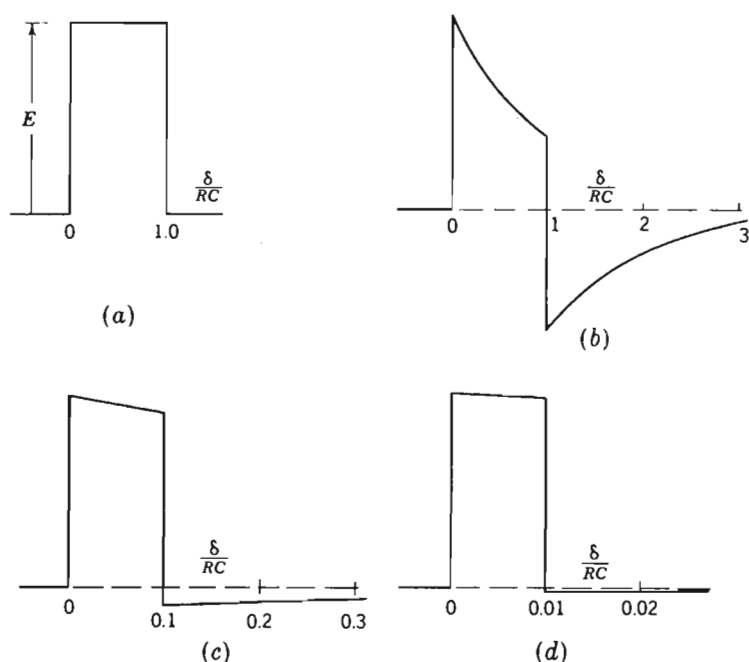



FIG. 4-35. — (*a*) Impulso in ingresso. (*b*) Impulso in uscita con $C(R_L + r_{ie})/\delta = 1{,}0$. (*c*) Impulso in uscita con rapporto uguale a 10. (*d*) Impulso in uscita con rapporto uguale a 100.

L'aumento della costante di tempo è limitato da C, come si è detto prima, ma si è trovato che il circuito di compensazione del par. 4-11, è anche utile per diminuire la caduta per un dato valore di C.

È possibile eseguire il calcolo della forma impulsiva d'uscita in base alle indicazioni di fig. 4-36.

Il valore della caduta viene dato dall'eq. (4-101), sostituendo il termine esponenziale con il suo sviluppo in serie e ponendo t = δ, si ha allora:

$$e_o(t) = -\, g_m R'_L E_i \left[1 - \frac{\delta}{\tau'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\tau'}\right)^2 - \ldots\right] \qquad (4\text{-}104)$$

Per valori di $\delta/\tau' \leq 0{,}15$ o per una costante di tempo al minimo eguale a 6δ, l'esponenziale può essere sostituito dai primi due termini della serie con buona approssimazione. Il termine unitario esprime l'uscita senza caduta; il secondo termine lineare contribuisce alla caduta, ovverossia riduce l'uscita durante l'intervallo δ.

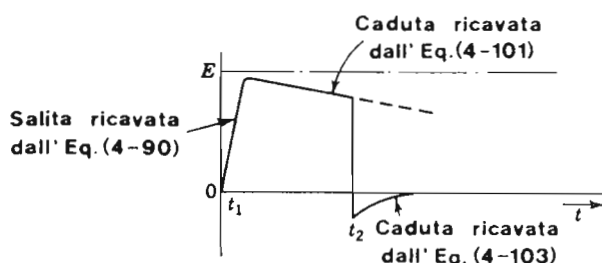



FIG. 4-36. — Forma d'onda impulsiva in uscita.

La caduta percentuale è allora facilmente determinabile:

$$\text{caduta percentuale} = d \cong \frac{\delta}{\tau'} \times 100\% \tag{4-105}$$

In base alla definizione della ω_c del circuito di accoppiamento di un amplificatore, si ha:

$$\text{caduta percentuale} = d = \omega_c \delta \times 100\% \tag{4-106}$$

in tal modo, la diminuzione del valore massimo dell'impulso è legata al valore di ω_c nel dominio della frequenza.

La caduta dovuta al condensatore C_E in parallelo sull'emettitore si somma a quella prodotta da C. La caduta percentuale prodotta da C_E è data da:

$$d = \frac{100\%}{C_E(R_L + r_{ie})(1 + \beta)} \tag{4-107}$$

e per avere una piccola caduta si può rendere necessaria una grande capacità. Spesso risulta economico eliminare C_E ed aumentare opportunamente il guadagno. L'uso di un piccolo condensatore parallelo ($\cong$ 100 pF) può migliorare il tempo di salita dando luogo ad un aumento di guadagno per le frequenze che intervengono nel tempo di salita. Questo procedimento è noto come *compensazione catodica*.

In definitiva le condizioni per una piccola distorsione dell'impulso di ingresso, sono:

1) Piccola capacità C_s in parallelo e piccola resistenza di carico R_L, per una salita rapida.

2) Grande costante di tempo serie τ' rispetto a δ, per una piccola caduta.

3) Alto valore di g_m del dispositivo attivo, per un elevato guadagno ed un piccolo tempo di salita.

4-17. Verifica della risposta ad un'onda rettangolare.

Nel precedente paragrafo si è visto che il tempo di salita dipende dalla risposta in alta frequenza del dispositivo, mentre il comportamento durante la parte piatta dell'impulso dipende dalla sua risposta in bassa frequenza. Un'onda rettangolare fornisce impulsi su base ripetitiva, e quindi applicando in ingresso ad un amplificatore una forma d'onda rettangolare, si ha un mezzo rapido per lo studio degli amplificatori se l'uscita viene visualizzata sullo schermo di un oscilloscopio a raggi catodici.

Per lo studio della risposta in bassa frequenza, si applica una forma d'onda rettangolare di frequenza poco superiore ad f_1, ottenendo un'uscita del tipo di fig. 4-37b. Il salto di tensione è composto di due parti, *a* al di sopra dell'asse e *b* al di sotto, in modo che

$$a + b = E$$

dove E è l'ampiezza dell'impulso applicato al circuito accoppiato ad RC.

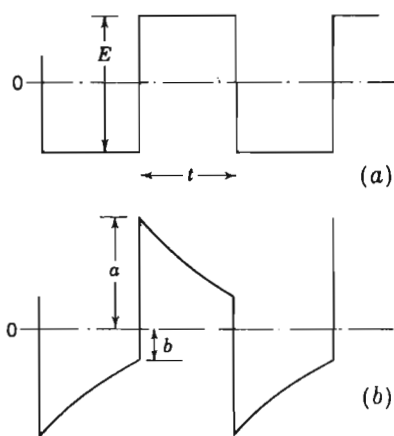



Fig. 4-37. — (*a*) Forma d'onda applicata. (*b*) Uscita di un circuito RC.

Inoltre si ha che

$$b = a\epsilon^{-\delta/\tau'} = a\epsilon^{-1/2f\tau'}$$

dove δ è il semiperiodo dell'onda rettangolare. Ne segue:

$$a = \frac{E}{1 + \epsilon^{-1/2f\tau'}}. \tag{4-108}$$

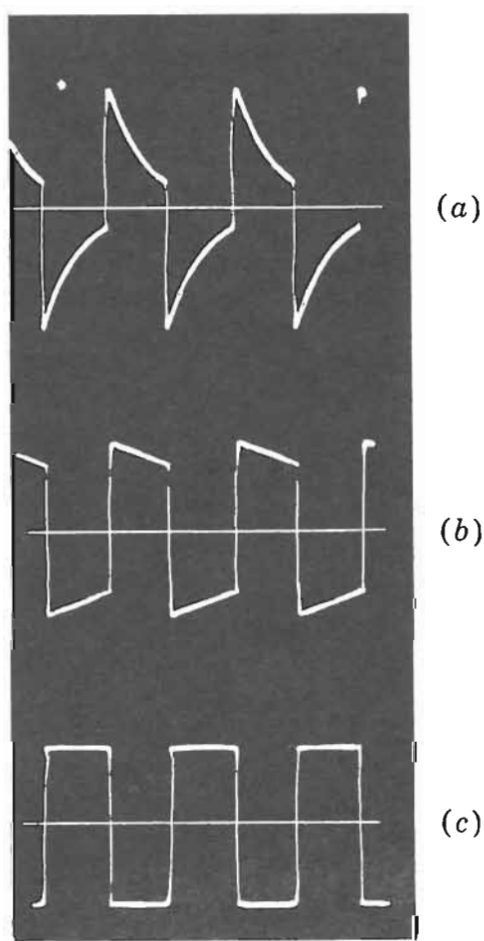



Fig. 4-38. — Metà periodo è pari a $\delta = 1000\ \mu s$. Risposta per (*a*) $RC/\delta = 0{,}5$; (*b*) $RC/\delta = 2$; (*c*) $RC/\delta = 25$.

In fig. 4-38 è riportata la risposta di un amplificatore, accoppiato ad RC, ad un'onda rettangolare a 500 Hz. Le risposte corrispondono a valori del rapporto tra RC e $\delta/2$, pari a 0,5; 2; 25; risulta evidente che per una riproduzione fedele della forma d'onda, la costante di tempo RC deve essere

molto grande rispetto al semiperiodo dell'onda. Queste curve stabiliscono un criterio per un paragone visivo tra le risposte in bassa frequenza degli amplificatori.

Si può osservare la risposta in alta frequenza applicando un'onda rettangolare di frequenza prossima a f_2. La fig. 4-39 indica le forme d'onda

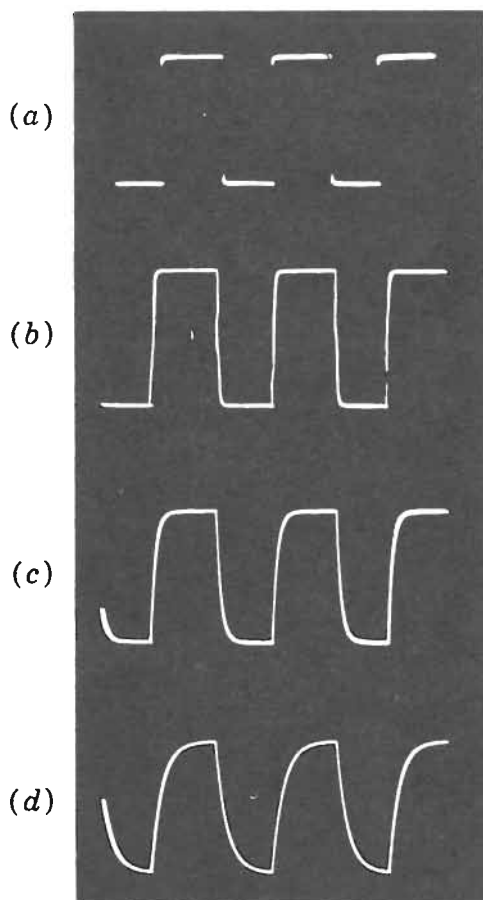



FIG. 4-39. — Tempo di salita di un amplificatore ad RC. (*a*) Forma d'onda applicata; (*b*) $RC_g/\delta = 0{,}01$; (*c*) $RC_g/\delta = 0{,}04$; (*d*) $RC_g/\delta = 0{,}1$.

per vari rapporti tra δ e la costante di tempo del gruppo RC parallelo. Si vede che, per ottenere un tempo di salita accettabile, è opportuna una costante in parallelo C_gR_p molto piccola.

È possibile un secondo tipo di risposta in alta frequenza se si realizza una compensazione induttiva, ovverossia se vi è risonanza. In questo caso,

in dipendenza dello smorzamento del circuito, si può avere o una sovraelongazione o un'oscillazione smorzata in quanto l'equazione caratteristica del circuito risulterà del secondo ordine. All'oscilloscopio si può visualizzare il fenomeno al termine del fronte di salita, ed in fig. 4-40 sono riportati delle risposte tipiche. È possibile fare una stima della frequenza di oscillazione

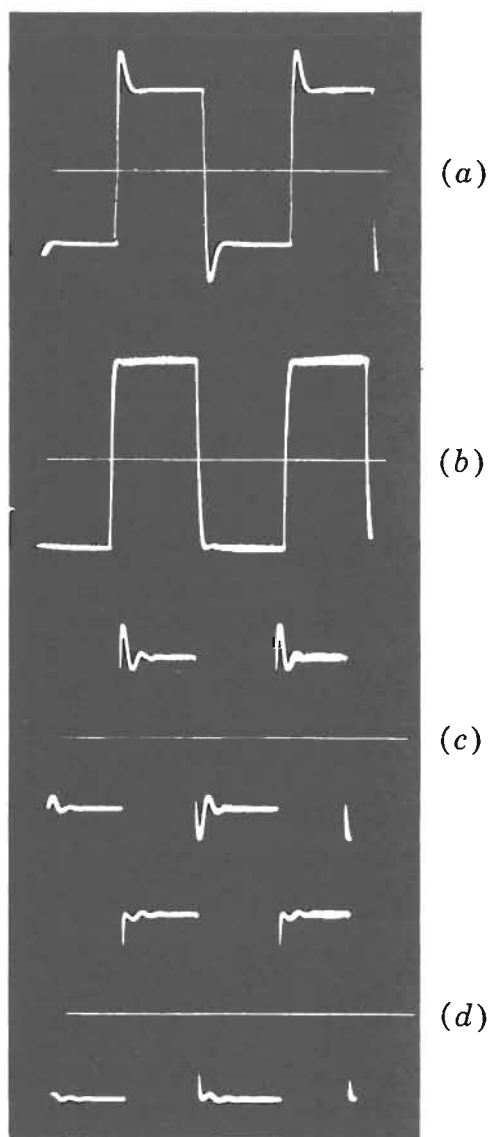



FIG. 4-40. — (*a*, *b*) Risposta di un amplificatore compensato ad una onda rettangolare. (*c*, *d*) Risposta in condizione di oscillazione.

paragonandola al periodo dell'onda rettangolare; tale stima della frequenza è di aiuto nel localizzare gli elementi del circuito ai quali è dovuta l'oscillazione.

4-18. Il rumore negli amplificatori.

La massima amplificazione che si può ottenere mediante stadi amplificatori successivi disposti in cascata, è limitata dal *rumore* elettrico, ovverossia dalle correnti fluttuanti generate nei circuiti o nei componenti attivi. Il guadagno sufficiente a portare il rumore interno fino al normale livello del segnale di uscita, stabilisce così il limite di impiego. Ogni segnale d'ingresso apprezzabilmente più debole del rumore verrà coperto o mascherato e potrà essere rivelato solo mediante l'uso di tecniche particolari.

Il rumore è dovuto ad un certo numero di sorgenti, alcune derivanti dalla natura particolare della corrente elettrica ed altre dai componenti passivi del circuito.

Rumore termico. Questa sorgente ha origine dal moto casuale delle cariche libere presenti in ogni conduttore. L'energia del rumore è uniformemente distribuita su tutte le frequenze e si pensa che sia causata dall'impatto delle cariche con le molecole e che ciascun impatto produca un impulso molto breve. L'attività termica in un resistore R è funzione della temperatura, e la tensione di rumore presente agli estremi del resistore può esprimersi come:

$$E_{rumore} = \sqrt{4kTR\,\Delta f} \qquad (4\text{-}109)$$

dove
- k = costante di Boltzmann = $1{,}38 \times 10^{-23}$ joule/^{0}K
- T = temperatura in gradi Kelvin
- R = resistenza in ohm
- Δf = larghezza di banda del circuito in Hertz; è questa la differenza tra le frequenze corrispondenti ai punti a metà potenza sulla curva del guadagno in decibel.

Una sorgente di rumore dovuto all'agitazione termica, può essere considerata equivalente ad un generatore di tensione di rumore E_{rumore} in serie con una resistenza R priva di rumore. Il rumore termico è presente in ogni componente di un circuito, in quanto in ciascuno di essi è presente una resistenza. Risultando la tensione di rumore proporzionale a $\sqrt{T}$, i circuiti che richiedono condizioni di funzionamento con rumore molto basso, lavorano alle temperature dell'azoto o dell'elio liquido.

Nei componenti a semiconduttore, il rumore termico è importante solo quando le giunzioni sono polarizzate direttamente o quando R è piccola.

Rumore mitraglia. È presente nei tubi a vuoto per la casualità dell'emissione degli elettroni dal catodo. Il funzionamento in regime di carica spaziale, riduce considerevolmente il rumore mitraglia in quanto il serbatoio di elettroni, che costituisce il catodo virtuale, tende a livellare l'emissione. Il rumore è uniformemente distribuito su tutto lo spettro di frequenze utili.

È conveniente rappresentare questa sorgente di rumore con una resistenza equivalente R_{eq}, la quale, se disposta in serie alla griglia di un tubo privo di rumore, generi una corrente di rumore nel circuito di uscita uguale a quella causata dall'effettivo rumore del tubo.

Un'espressione approssimata per questa resistenza, nel caso dei *triodi*, è:

$$R_{eq} \cong \frac{2,5}{g_m} \quad \text{ohm}$$

La maggior parte dei triodi ha una resistenza equivalente di rumore che si aggira tra i 200 e i 1500 ohm. Per i *pentodi*, la resistenza equivalente di rumore, è espressa da:

$$R_{eq} \cong \frac{2,5}{g_m} + \frac{20 I_s}{g_m I_k}$$

dove I_s ed I_k sono rispettivamente le correnti di griglia schermo e del catodo. Il valore di R_{eq} per i pentodi varia da 700 ad oltre 13.000 ohm.

Rumore di ripartizione. Nei pentodi la possibilità che un particolare elettrone giunga sulla griglia schermo invece che sull'anodo, è un evento del tutto casuale. Questa ripartizione casuale della corrente da istante a istante aggiunge un ulteriore rumore a quello mitraglia, rendendo il pentodo più rumoroso del triodo. Questo effetto dà luogo, nei pentodi, al secondo termine della relazione precedentemente scritta.

Nei componenti a semiconduttore, l'effetto mitraglia è molto più complesso a causa dei vari tipi di portatori di cariche presenti; inoltre dei portatori che attraversano una giunzione, alcuni si ricombinano, altri vengono raccolti. Anche in questo caso è presente un fattore di smorzamento in quanto molti di questi fenomeni sono in relazione tra di loro o meglio non sono indipendenti.

Rumore microfonico. È questa un'importante sorgente di rumore per i tubi a vuoto ed è dovuta alle vibrazioni meccaniche; nei tubi, infatti, la corrente dipende dalla distanza tra gli elettrodi interni, per cui vibrazioni di elementi del tubo producono variazioni di corrente o rumore. Si realizzano tubi speciali per applicazioni particolarmente delicate.

Rumore indotto da campi elettrici e magnetici. Per eliminare questa sorgente di rumore, si realizza uno schermaggio elettrico e magnetico; tuttavia

a 50 Hz la schermatura o è molto costosa o inefficace. Le tensioni indotte possono venire ridotte isolando o orientando opportunamente l'apparecchiatura ed eliminando le capacità parassite con il circuito di potenza.

Ronzio di alimentazione. Generalmente si può ridurre, con un adeguato filtraggio, il livello delle correnti alternative residue nelle tensioni di alimentazione ad un valore opportunamente basso, sebbene la riduzione al di sotto del livello di pochi millivolt richieda notevoli precauzioni.

Rumore catodico. I tubi con riscaldatori del catodo alimentati in alternata, possono presentare un ronzio dovuto alla frequenza di alimentazione del riscaldatore. Per evitare l'emissione di elettroni dal riscaldatore, il che può causare ronzio, il riscaldatore stesso viene fatto funzionare a 10 o 20 volt positivi rispetto al catodo.

La capacità tra riscaldatore e catodo può produrre ronzio quando il catodo funziona ad un potenziale superiore a quello di terra. Ponendo a terra il punto centrale del circuito del riscaldatore si può ridurre questo ronzio.

Rumore « flicker » o inversamente proporzionale alla frequenza. Un'altra componente del rumore varia inversamente con la frequenza e diventa importante a frequenze al di sotto di 1.000 Hz. Sembra che tale componente sia dovuta alla distribuzione irregolare di cariche. Tale rumore può essere opportunamente ridotto mediante un opportuno controllo di produzione.

Il rumore viene individuato mediante « *la cifra di rumore* » definita come il rapporto tra la potenza di rumore all'uscita del dispositivo e la potenza di rumore che vi sarebbe stata qualora il dispositivo in oggetto fosse stato senza rumore.

Se si suppone che l'ingresso sia costituito da una sorgente di tensione con una resistenza interna R_s, e se l'uscita è applicata ad un carico R_L, la cifra di rumore risulta:

$$\text{N.F.} = \frac{P_{\text{rumore in uscita}}}{P_{\text{rumore della sorgente}}} \quad \text{db} \tag{4-110}$$

dove la potenza di rumore della sorgente è il rumore che si avrebbe in uscita del dispositivo se la resistenza della sorgente R_s fosse la sola sorgente di rumore. In modo più generale la cifra di rumore può essere definita come:

$$\text{N.F.} = \frac{P_{IS}/P_{IN}}{P_{OS}/P_{ON}} \quad \text{db}$$

dove P_S/P_N è il rapporto segnale-rumore in corrispondenza dell'ingresso e dell'uscita del circuito o del dispositivo, e indica la diminuzione del rapporto S/N dovuta al dispositivo.

La cifra di rumore è definita generalmente in una data banda di frequenze in quanto alcuni rumori variano con la frequenza.

PROBLEMI

1. Un transistore presenta $h_{ie} = 130$ ohm, $h_{oe} = 2 \times 10^{-6}$ mho, e $h_{fe} = 80$, con h_{re} trascurabile. La capacità di diffusione è 150 pF, $C_{eb} = 10$ pF. Qualora venga impiegato nel circuito di fig. 4-41, determinare il guadagno in media frequenza e le frequenze limiti della banda di T_1 e del circuito ad esso associato.

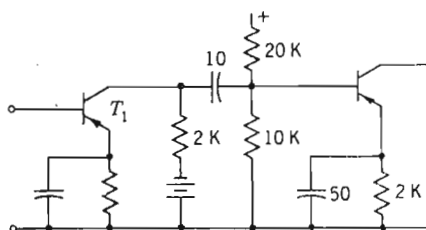



FIG. 4-41

1-2. Tracciare la curva del guadagno in decibel per l'amplificatore del problema 4-1, tracciando l'andamento in corrispondenza delle frequenze d'angolo.

4-3. I triodi di fig. 4-42 presentano $g_m = 2000$ μmhos, $r_p = 30.000$ ohm, $C_{pk} = 7,0$ pF e $C_{in} = 70$ pF. *a*) Determinare il valore al quale il condensatore di 0,01 μF limita la banda in bassa frequenza. *b*) Determinare il valore che dovrebbe avere il condensatore di 0,01 μF se f_1 fosse portata a 20 Hz. *c*) A che valore dovrebbe essere portato R_L per avere una $f_2 = 400.000$ Hz? *d*) Quale dovrebbe essere allora il guadagno in media frequenza del primo stadio?

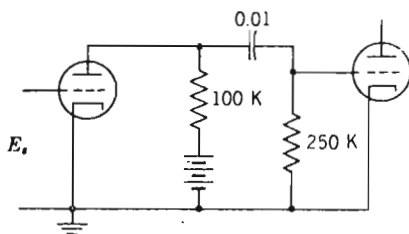



FIG. 4-42

4-4. Scrivere l'espressione di E_o/E_s per il circuito di fig. 4-43. Ricavare inoltre le espressioni di A_{vL}/A_{vM} e A_{vM}/A_{vH} in funzione del rapporto ω/ω_x.

4-5. Per il circuito di fig. 4-43, determinare f_1 ed f_2 e tracciare la curva del guadagno in decibel; mostrare le inclinazioni degli asintoti nelle varie regioni e valutare gli angoli di fase.

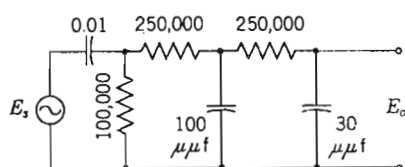



FIG. 4-43

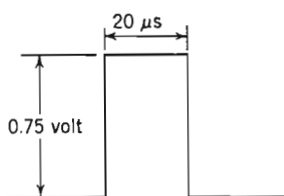



FIG. 4-44

4-6. Un amplificatore a tre stadi accoppiati ad RC, deve avere il guadagno costante entro 0,5 db fino a 50 kHz. Valutare il valore di f_2 per ogni singolo stadio supposti tutti identici.

4-7. Quale guadagno complessivo è possibile con un amplificatore a sei stadi in cascata, adoperando il transistore del problema 4-1, se il valore complessivo di f_2 deve essere di 200 kHz? Quale dovrà essere f_2 per ciascun singolo stadio?

4-8. Un pentodo con r_p = 0,8 megaohm e g_m = 3000 μmho è utilizzato in un amplificatore RC con R_L = 25.000 ohm, R_g = 250.000 ohm, C = 0,01 μF, C_{pk} = 8 pF e C_{in} = 27 pF. *a*) Trovare f_1 ed f_2. *b*) Compensare la risposta in bassa frequenza almeno fino ad $f_1/2$ e specificare i componenti.

4-9. Provvedere ad una compensazione parallelo per la risposta in alta frequenza del circuito del problema 4-8, in modo da realizzare un aumento del 5% sul valore A_{vM}; specificare le costanti del circuito e determinare il nuovo valore di f_2.

4-10. Ciascun stadio di un amplificatore a transistori a tre stadi ha un guadagno di corrente in media frequenza di 30 ed un valore di f_2 di 375 kHz. L'amplificatore completo deve essere modificato riducendo il valore di R_L in modo da avere un valore globale di f_2 pari a 600 kHz. Se g_m = 0,5 mho, quale valore di R_L si deve utilizzare e quale guadagno per stadio e globale sarà allora ottenibile?

4-11. Il primo stadio di un amplificatore a due stadi accoppiati ad RC ha un guadagno di tensione di 40 ed un valore di f_1 = 60 Hz e di f_2 = 38 kHz. Il secondo stadio ha un guadagno di 78, un valore di f_1 = 82 Hz e di f_2 = 37.000 Hz. Tracciare la curva della risposta globale in decibel.

4-12. Un amplificatore a larga banda con compensazione parallelo adopera transistori che hanno h_{fe} = 80, h_{ie} = 30 ohm, C_d = 80 pF, C_{cb} = 25 pF, h_{oe} = $0{,}4\times10^{-6}$ mho, per ottenere un guadagno globale di corrente di 16.000 con una banda di 3,75 MHz. Trovare il numero di stadi utilizzati se m = 0.41.

4-13. Un impulso rettangolare come in fig. 4-44 è applicato all'ingresso di un amplificatore accoppiato ad RC, realizzato con un pentodo con g_m = 4500 μmho, r_p = 0,8 megaohm. Se R_g = 1 megaohm e la capacità complessiva in parallelo al circuito anodico è C_g = 25 pF: *a*) Trovare il valore di R_a per un tempo di salita di 0,20 μ s. *b*) Che tensione di picco si otterrà in uscita? *c*) Stabilire il valore del condensatore

di accoppiamento C che limiti la caduta della tensione di uscita, alla fine dell'impulso, al 10%.

4-14. Scrivere i primi sei termini della serie di Fourier per l'onda periodica di fig. 4-45b. La frequenza di ripetizione dell'onda è di 2000 Hz.

4-16. Il treno di impulsi ricorrenti di fig. 4-45c, ha una durata dell'impulso di 50 μ s, con una frequenza di ripetizione di 4000 Hz. Tracciare un diagramma dello spettro di frequenza per tutte le frequenze comprese nei primi tre lobi della figura. Qual è l'ampiezza della 67ma armonica?

4-17. Tracciare l'ampiezza, l'andamento, in funzione della frequenza, dei primi 10 termini della serie di Fourier che rappresentano le espressioni nel dominio del tempo di ciascuna delle onde di fig. 4-46.

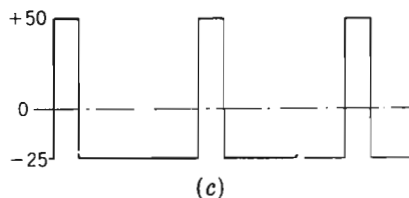
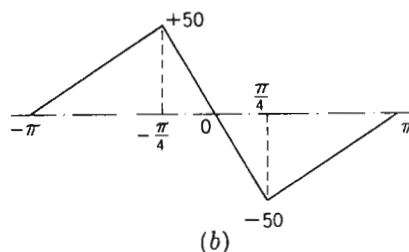
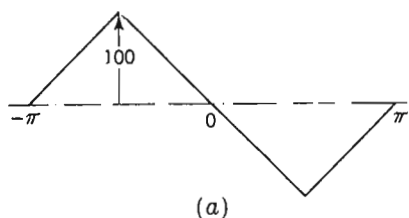



FIG. 4-45

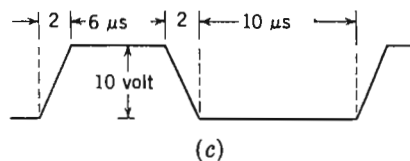
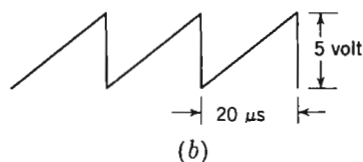
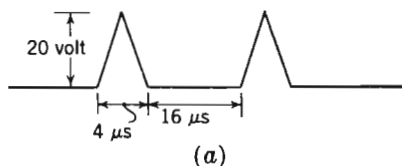



FIG. 4-46

4-18. Tracciare gli spettri di frequenza per i seguenti treni di impulsi rettangolari: *a)* f_r = = 10.000 Hz, δ = 50 μ s; *b)* f_r = 5000 Hz, δ = 50 μ s; *c)* f_r = 1.000 Hz, δ = 50 μ s.

4-19. Un determinato amplificatore a due stadi ad RC, ha un guadagno di tensione in media frequenza di 220 ed un valore di f_2 di 16.000 Hz. Sacrificando metà del gua-

dagno, progettare un'unica rete RC che estenda il limite superiore della banda di frequenze. Quale sarà il nuovo valore di f_2?

BIBLIOGRAFIA

1. Valley G. E. Jr., e H. Wallman: "Vacuum Tube Amplifiers", McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
2. Herold E. W.: High-frequency Correction in Resistance-coupled Amplifiers, *Communications (NY)*, **18**: 11 (August, 1938).
3. Freeman R. L., e Schautz J. D.: Vido-amplifier Design, *Electronics*, **10**: 22 (August, 1937).
4. Larsen M. J.: Low-frequency Compensation of Video Amplifiers, *Proc. IRE*, **33**: 666 (1954).
5. MacLean W. R.: Ultimate Bandwidth in High-gain Multistage Video Amplifiers, *Proc. IRE*, **32**: 12 (1944).
6. Muller F. A.: High-frequency Compensation of RC Amplifiers, *Proc. IRE*, **42**: 1271 (1954).
7. Frank E.: "Pulsed Linear Networks", McGraw-Hill Book Company, New York, 1943.
8. Mulligan J. H. Jr.: Effect of Pole and Zero Locations on Transient Response, *Proc. IRE*, **37**: 516 (1949).
9. Pettit J. M., e McWhorter M. M.: "Electronic Amplifier Circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
10. Middlebrook R. D.: "An Introduction to Junction Transistor Theory", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
11. Glasford G. M.: "Linear Analysis of Electronic Circuits", Addison-Wesley Pubblishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
12. Van Valkenburg M. E.: "Network Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1955.

CAPITOLO V

LA REAZIONE

La reazione, o confronto fra il segnale in uscita e quello in ingresso di un dispositivo, allo scopo di rendere più stabile la relazione fra questi due segnali viene applicata da tempo nel controllo dei processi industriali, ma una comprensione precisa dei suoi effetti, se applicata agli amplificatori elettronici, si è avuta solo nel 1934 a seguito dei lavori pubblicati da H. S. Black il quale diede una formulazione matematica al principio della reazione.

L'impiego di questa analisi ha reso possibile il controllo di molti processi fisici.

Un transistore o un tubo a vuoto, sono dispositivi elettronici che se posti in un circuito con reazione negativa diventano strumenti precisi di controllo, dotati di un alto grado di affidabilità.

5-1. Fondamenti della reazione.

Il guadagno **A** dell'amplificatore mostrato in fig. 5-1a, o rapporto fra le tensioni di uscita e di ingresso è stato definito come:

$$A = \frac{E_o}{E_s}$$

Introduciamo ora la reazione come in fig. 5-1b, che è un semplice schema a blocchi di amplificatore reazionato. Si noti che è stato aggiunto un circuito il quale riporta una parte β dell'uscita in ingresso all'amplificatore, eventualmente dopo averne variata l'ampiezza e la fase.

Il grado di reazione β, che può essere anche un numero complesso, è definito da:

$$\beta = \frac{\text{Tensione di reazione } \underline{/\ \theta_1}}{\text{Tensione di uscita } \underline{/\ \theta_2}} \tag{5-1}$$

Dalla figura si vede che la tensione totale in ingresso all'amplificatore reazionato è data da:

$$E_i = E_s + \beta E'_o \tag{5-2}$$

dove $\mathbf{E'}_0$ è la tensione di uscita dell'amplificatore con reazione. Se il guadagno interno è **A**, allora $\mathbf{AE}_i = \mathbf{E'}_0$; è possibile eliminare $\mathbf{E}_i$ e scrivere:

$$E'_0 = (E_s + \beta E'_0)A$$

da cui si ricava il guadagno **A'** con reazione:

$$A' = \frac{E'_0}{E_s} = \frac{A}{1 - A\beta} \tag{5-3}$$

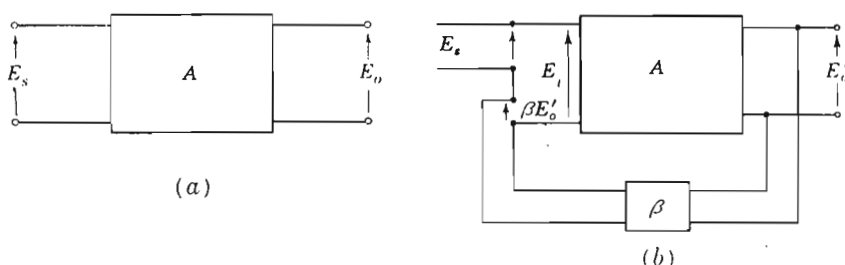



FIG. 5-1. — Schema a blocchi di un sistema reazionato.

Il guadagno varia secondo il rapporto $1/(1-\mathbf{A}\beta)$ quando parte della uscita è riportata in ingresso, cioè quando l'amplificatore viene reazionato. Poichè il circuito β forma un cappio intorno all'amplificatore, si definisce **A'** come *guadagno a ciclo chiuso*. Quando invece non c'è reazione, cioè il ciclo di reazione è aperto si ha il guadagno **A** detto *a ciclo aperto*.

In generale sia **A** che β saranno numeri complessi; nel progetto dei circuiti si cerca di renderli reali, positivi o negativi. Si distinguono tre casi, secondo il segno di **A** e di β o, più in generale, secondo il valore del denominatore della eq. (5-3).

1. Se $|1 - \mathbf{A}\beta|$ è *minore dell'unità* (**A** e β entrambi positivi o negativi, limitandoci al caso dei numeri reali); allora $|\mathbf{A'}|$ è più grande di $|\mathbf{A}|$. La tensione $\beta\mathbf{E'}_0$ riportata in ingresso aggiunge una componente in fase con $\mathbf{E}_s$ e quindi aumenta $\mathbf{E}_i$. In questo caso la reazione è detta *positiva*, il circuito è *rigenerativo*. La reazione positiva aumenta il guadagno, aumenta la distorsione e porta ad instabilità e pertanto, di solito, si cerca di evitarla.

2. $|1 - \mathbf{A}\beta| = 0$ il guadagno è infinito ed è presente un'uscita senza che vi sia un segnale di ingresso esterno. Il circuito è allora detto oscillatore; questa condizione verrà studiata nel prossimo capitolo.

3. $|1 - \mathbf{A}\beta|$ è maggiore dell'unità; in tal caso $|\mathbf{A'}|$ è minore di $|\mathbf{A}|$ (nel caso di numeri reali, sia **A** che β possono essere negativi ma non

possono esserlo entrambi). Allora la tensione $\beta \mathbf{E'}_o$ è in opposizione di fase rispetto ad $\mathbf{E}_s$ ed $\mathbf{E}_i$ viene diminuito. La reazione è chiamata *negativa*, il circuito è *degenerativo*.

5-2. Reazione negativa e stabilità di guadagno.

Perchè vi sia lo stesso segnale di uscita, $\mathbf{E'}_o$ deve essere uguale ad $\mathbf{E}_o$. Dalla definizione di guadagno si ha:

$$AE_s = A'E'_s \tag{5-4}$$

e poichè:

$$A' = \frac{A}{1 - A\beta}$$

si ottiene:

$$E'_s = (1 - A\beta)E_s \tag{5-5}$$

la quale mostra che, in presenza di reazione negativa, occorre aumentare il segnale di ingresso rispetto al valore $\mathbf{E}_s$ a ciclo aperto, se si vuole avere la stessa uscita.

L'equazione (5-2) si può scrivere:

$$E_s - (-\beta E'_o) = E_i \tag{5-6}$$

La quale paragona $\mathbf{E}_s$ e $-\beta \mathbf{E'}_o$ ed indica con $\mathbf{E}_i$ la loro differenza; se $\mathbf{E}_s$ e $-\beta \mathbf{E'}_o$ sono quasi uguali, allora $\mathbf{E}_i$ sarà piccolo. Ma se l'ingresso ed una parte della uscita sono istante per istante quasi uguali, ciò indica che le variazioni interne delle forme d'onde sono state piccole e quindi che si è ottenuta una amplificazione lineare. Poichè si cerca di ottenere questa condizione, cercheremo ora di determinare in quali condizioni il segnale in ingresso allo amplificatore, $\mathbf{E}_i$, è piccolo.

Poichè $\mathbf{E'}_o = \mathbf{AE}_i$, dall'eq. (5-6) si ottiene:

$$\frac{E_s}{E_i} = 1 - A\beta \tag{5-7}$$

e per rendere grande questo rapporto, cioè $\mathbf{E}_i \ll \mathbf{E}_s$, occorre che $|1 - \mathbf{A}\beta|$ sia grande, cioè che sia grande $|\mathbf{A}\beta|$. Il fattore di reazione $\mathbf{A}\beta$ è in generale funzione della frequenza; si cerca tuttavia, in sede di progetto, di fare in modo che il suo angolo di fase sia 0^0 o 180^0, nel campo di frequenze in cui il sistema deve lavorare, cosicchè esso sia un numero reale.

Se $|\mathbf{A}\beta| \gg 1$ l'equazione (5-3) si può scrivere:

$$A' = -\frac{1}{\beta} \tag{5-8}$$

La quale mostra che il guadagno non è influenzato dalle variazioni dei parametri del dispositivo, dalla tensione di alimentazione e dalle variazioni della posizione del punto di lavoro Q. Poichè β di solito dipende da parametri fissi del circuito, come ad esempio una rete di resistori, la stabilità nel guadagno dell'amplificatore sarà prossima a quella che ci si può aspettare da parte di resistori fissi.

Evidentemente, non è sempre possibile rendere $|\mathbf{A}\beta|$ molto grande rispetto all'unità; tuttavia è possibile migliorare la stabilità di guadagno con dei ragionevoli coefficienti di reazione.

È utile calcolare questo miglioramento della stabilità, cioè la variazione di **A'** in corrispondenza di una certa variazione di **A**; dall'equazione (5-3) si può calcolare la sensibilità di **A'** a piccole variazioni di **A**:

$$dA' = \frac{(1 - A\beta)\, dA + A\beta\, dA}{(1 - A\beta)^2}$$

da cui:

$$\frac{dA'}{A'} = \left[\frac{1}{A} + \frac{\beta}{1 - A\beta}\right] dA = \frac{1}{1 - A\beta} \frac{dA}{A} \qquad (5\text{-}9)$$

ossia la variazione relativa del guadagno con reazione **A'** è $1/(1 - \mathbf{A}\beta)$ volte la variazione relativa del guadagno interno **A**. Se $|1 - \mathbf{A}\beta|$ è grande, la stabilità di guadagno sarà buona.

Il guadagno interno, o guadagno a ciclo aperto **A**, è funzione del carico dell'amplificatore, come si è visto nel precedente capitolo; la reazione riduce la dipendenza dal carico esterno. Molti strumenti di misura elettronici, ad esempio, hanno la taratura che è stabilizzata a mezzo di una reazione negativa, il che rende la loro precisione quasi indipendente dalle variazioni dei parametri degli amplificatori.

Esempio — *Un amplificatore presenta un guadagno a cliclo aperto di* 100; *lo si reaziona con* $\beta = -0{,}15$; *calcolare la variazione del guadagno con reazione, corrispondente ad un aumento del guadagno a ciclo aperto da* 100 *a* 110.

$$dA/A = (110 - 100)/100 = -0{,}1; \qquad \text{inoltre } A\beta = -15$$

allora:

$$\frac{dA'}{A'} = \frac{1}{1 + 15} \times 0{,}1 = 0{,}00625$$

Il guadagno complessivo con reazione varia allora solo del 0,625%.

5-3. Reazione negativa e distorsione di frequenza.

Se $|\mathbf{A}\beta|$ è così grande che il guadagno dipende quasi esclusivamente da β e se questo non varia con la frequenza, allora la reazione ridurrà la di-

storsione di frequenza e di fase, eventualmente presenti nel funzionamento a ciclo aperto. Talvolta può essere richiesto che β vari con la frequenza secondo una certa legge; dalla (5-8), si vede che il guadagno varierà allora con la frequenza secondo la funzione inversa di quella secondo cui varia β.

Nello schema di fig. 5-2, si è aggiunta una reazione ad un amplificatore a due stadi ad accoppiamento RC (cioè con una rete RC fra gli stadi).

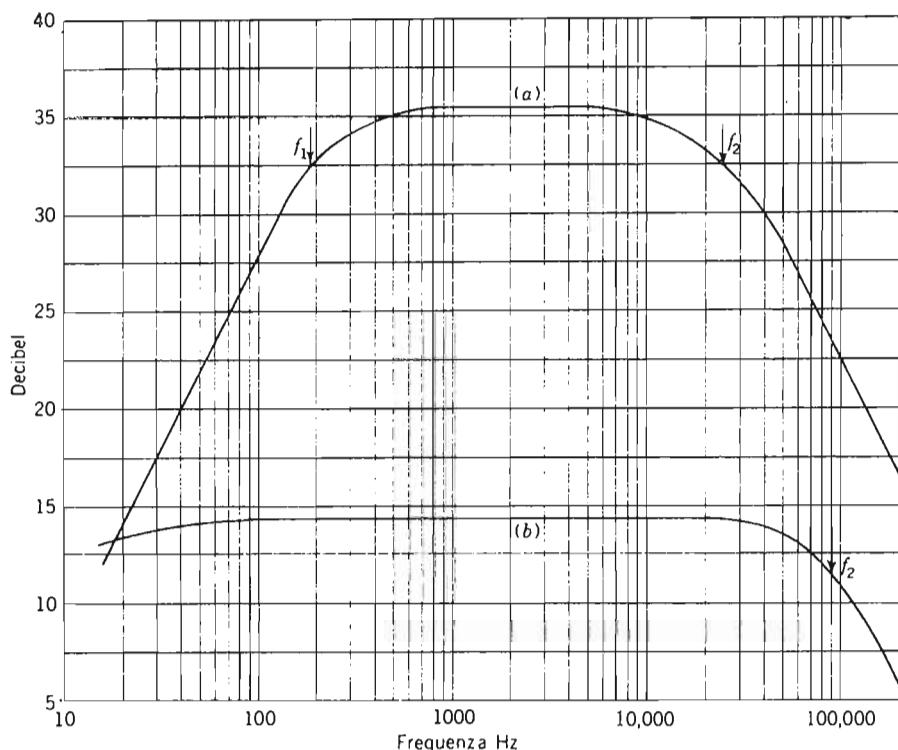



FIG. 5-2. — Risposta di un amplificatore RC: (*a*) senza reazione; (*b*) con β = 0,1.

In assenza di reazione, dalla curva di fig. 5-2a si vede che il guadagno è di 35,5*db* alla frequenza intermedia di 1000 Hz, mentre la banda passante, secondo la definizione precedentemente data, va da 190 a 25.000 Hz. Se si aggiunge una reazione con β = 0,1, si ottiene la curva di fig. 5-2b con un guadagno a centro banda di 14,3 *db* ma con f_1 inferiore ai 15Hz ed f_2 che raggiunge i 90.000Hz.

Nella zona delle basse frequenze, si vede che da una variazione di fase introdotta dal circuito di reazione, consegue una certa rigenerazione. La tensione continua di alimentazione è stata infatti bloccata mediante un con-

densatore il quale, a frequenze inferiori ai 100Hz, produce una variazione nella fase di β che riduce l'ampiezza di $1 - \mathbf{A}\beta$ sicchè il guadagno diventa più grande di quello che si sarebbe avuto in assenza di variazione di fase.

È possibile giustificare analiticamente la ragione per cui la reazione allarga la banda passante. Il guadagno in alta frequenza di un amplificatore ad accoppiamento RC è dato da:

$$A_H = \frac{A_M}{1 + j\omega/\omega_2} \qquad (5\text{-}10)$$

ricordando l'eq. (5-3), si ottiene:

$$A'_H = \frac{A_M}{1 - \beta A_M + j\omega/\omega_2} \qquad (5\text{-}11)$$

Quando la reazione è negativa, è $| 1 - \mathbf{A}\beta | > 1$ ed è negativo o $\mathbf{A}_M$ o β; la nuova frequenza di taglio superiore sarà:

$$f'_2 = f_2(1 - \beta A_M) \qquad (5\text{-}12)$$

In modo simile, si vede che la frequenza di taglio inferiore dipende dalla sola costante di tempo ω_1, e si ha pertanto:

$$f'_1 = f_1/(1 - \beta A_M) \qquad (5\text{-}13)$$

Le equazioni (5-12) e (5-13) sono state entrambe ricavate facendo l'ipotesi che β non vari di fase in prossimità dei limiti della banda.

5-4. Reazione negativa e linearità.

Con la reazione negativa è possibile ridurre la distorsione non lineare che ha origine quando un tubo o un transistore funziona nella parte curva della caratteristica mutua dinamica. Nei circuiti reazionati la componente di distorsione è infatti riportata in ingresso in opposizione di fase ed aggiunta al segnale d'ingresso; la sua fase è perciò tale da compensare una parte della distorsione che si produce all'interno dell'amplificatore. Questo fatto è mostrato in fig. 5-3: nella parte (b) è riportata l'uscita che si ha con reazione, nella parte (a) quella senza reazione, che risulta distorta; la tensione di ingresso in presenza di reazione è mostrata nella fig. 5-3c, si vede che $\mathbf{E}_i$ ha un picco al quale corrisponde un aumento dell'uscita, come occorre, dato che dalla fig. (a) si vede che, senza reazione, l'amplificatore ha un tempo di salita troppo lungo.

Si può analizzare quantitativamente questo risultato supponendo che

la componente di distorsione armonica E_h sia legata all'uscita da una relazione del tipo:

$$E_h = f(E_0) \tag{5-14}$$

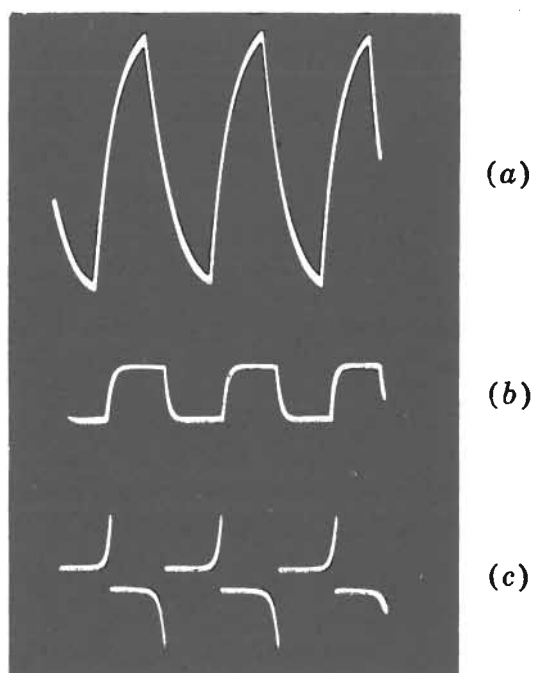



FIG. 5-3. — (*a*) Uscita senza reazione; (*b*) uscita con reazione; (*c*) tensione griglia-catodo con reazione.

poichè, in generale, la distorsione non lineare cresce con la zona non lineare di caratteristica dinamica utilizzata. In assenza di reazione:

$$E_0 = AE_s + E_h \tag{5-15}$$

Se si aggiunge la reazione mantenendo l'uscita costante, $\mathbf{E'}_0 = \mathbf{E}_0$ ed inoltre:

$$E'_i = E'_s + \beta E'_0) + E_h \tag{5-16}$$

la tensione di distorsione E_h rimane invariata dato che il livello di uscita è lo stesso. Per avere $E'_0 = E_0$ si è però dovuto aumentare l'ingresso dell'amplificatore reazionato portandolo al valore:

$$E'_s = (1 - A\beta)E_s$$

per cui:

$$E'_o = AE_s + \frac{E_h}{1 - A\beta} \qquad (5\text{-}17)$$

Confrontando la (5-17) e la (5-15) si vede che la tensione di distorsione si è ridotta del rapporto $1/(1 - A\beta)$ rispetto al segnale. Ovviamente è stato necessario aumentare il livello del segnale di ingresso del fattore $1 - A\beta$ per cui occorre modificare il progetto in modo da avere il guadagno supplementare in qualche altro modo.

La distorsione non lineare, si presenta quando si hanno ampie escursioni sulla caratteristica dinamica come avviene negli stadi finali degli amplificatori con forti potenze di uscita. La reazione riduce la distorsione in questi stadi, mentre si può ottenere il guadagno supplementare nei primi stadi che lavorano con piccoli segnali d'ingresso.

Una uscita indesiderata E_h può anche dipendere da un ronzio o da un rumore generati nell'interno dell'amplificatore. Se il rumore è proporzionale ad E'_o come nella eq. (5-14), allora con un ragionamento analogo a quello svolto si vede che il rumore in uscita sarà ridotto secondo il fattore $1/(1 - A\beta)$.

5-5. Misura del grado di reazione in decibel.

Una misura del grado di reazione di un amplificatore è data dal rapporto, espresso in decibel, tra le potenze di uscita con e senza reazione, ad ingresso costante, si ha allora:

$$\text{Grado di reazione in decibel} = 10 \log \frac{P'_o}{P_o} = 20 \log \frac{E'_o}{E_o} \qquad (5\text{-}18)$$

Il funzionamento di un amplificatore reazionato si comprende meglio attraverso un esempio.

Esempio. *Un amplificatore ha un guadagno di* -400, *una distorsione dell'*8% *ed un segnale di ingresso di* 0.5 *volt. Calcolare l'effetto di una reazione negativa con* $\beta = 0{,}05$.

Il fattore di reazione sarà $A\beta = -400 \times 0{,}05 = -20$; *il guadagno si riduce allora a*:

$$A' = \frac{-400}{1 + 20} = -19$$

e la stabilità dell'amplificatore nei riguardi delle variazioni di guadagno è migliorata di 21 *volte. La distorsione è ridotta a*:

$$D' = \frac{0{,}08 \times 100}{21} = 0{,}38\%$$

Se si vuole che l'amplificatore fornisca, quando è reazionato, la stessa uscita che fornisce senza reazione, cioè che sia $E'_o = E_o = A'E'_s = AE_s$. *allora la tensione di ingresso deve essere:*

$$E'_s = E_s(1 - A\beta) = 0{,}5 \times 21 = 10{,}5 \text{ volt}$$

L'uscita, con e senza reazione è:

$$E_o = AE_s = -400 \times 0{,}5 = -200 \text{ volt}$$
$$E'_o = A'E'_s = -19 \times 10{,}5 = -200 \text{ volt}$$

La effettiva tensione di ingresso in presenza di reazione, E'_i *è:*

$$E_i = E_s + \beta E'_o = 10{,}5 - 0{,}05 \times 200 = 0{,}5 \text{ volt}$$

Benchè la tensione esterna di ingresso E_s *debba aumentare da* 0,5 *a* 10,5*V a causa della reazione, l'amplificatore funziona come se avesse in ingresso un segnale di* 0,5*V. Se si mantenesse la tensione di ingresso a* 0,5*V, le uscite sarebbero:*

$$\text{senza reazione} = E_o = 0{,}5 \times (-400) = -200 \text{ volt}$$
$$\text{con reazione} = E'_o = 0{,}5 \times (-19) = -9{,}5 \text{ volt}$$

La riduzione di potenza di uscita prodotta dalla reazione vale, espressa in decibel:

$$\text{Decibel} = 20 \log \frac{9{,}5}{200} = -20 \times 1{,}324 = -26{,}5$$

si dice allora che sono stati applicati all'amplificatore 26,5 *decibel di reazione.*

5-6. Tipi fondamentali di circuiti.

La tensione di reazione può essere prelevata da elementi in serie o in parallelo all'uscita dell'amplificatore e può essere applicata in ingresso, in serie o in parallelo al segnale esterno. Queste quattro possibilità sono mostrate in fig. 5-4 ed in fig. 5-5. La scelta del circuito in ingresso è indipendente dalla scelta di quello in uscita; secondo il tipo di reazione variano le impedenze di ingresso e di uscita dell'amplificatore ed è quindi importante nel progetto di un circuito scegliere l'opportuna reazione.

Se la tensione di reazione viene prelevata direttamente ai capi dell'uscita dell'amplificatore, come in fig. 5-4a, allora la tensione di reazione sarà *proporzionale alla tensione di uscita* per cui si ha la cosidetta *reazione di tensione.*

Il circuito agisce come un regolatore di tensione, tende cioè a mantenere E'_0 costante, ad ingresso costante, indipendentemente dalle variazioni della impedenza di carico.

Il circuito in uscita può essere invece del tipo mostrato in fig. 5-4b Qui la tensione di reazione è $I_0 R_F$, *proporzionale alla corrente di carico* I_0; questo circuito realizza quindi una *reazione di corrente*. Se la impedenza di carico diminuisce, aumenterà la corrente di uscita; aumenterà allora la tensione riportata in ingresso il che ridurrà la tensione di ingresso e quindi la corrente di uscita. In tal modo si è stabilizzata la corrente di uscita nei riguardi delle variazioni di carico.

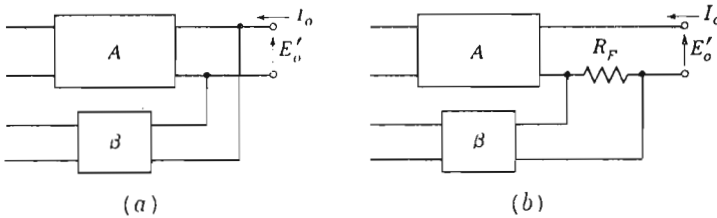



Fig. 5-4. — (*a*) Circuito di uscita di un amplificatore con reazione di tensione; (*b*) circuito di uscita di un amplificatore con reazione di corrente.

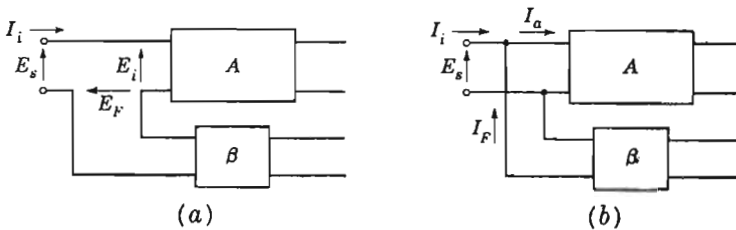



Fig. 5-5. — (*a*) Tensione di reazione applicata in serie all'ingresso; (*b*) tensione di reazione applicata in parallelo.

La tensione di reazione può venire applicata in serie o in parallelo al segnale di ingresso E_s come in fig. 5-5. L'impedenza di ingresso dipende dal modo in cui è stata applicata la reazione e non è influenzata dal tipo di reazione scelto in uscita.

L'impedenza di uscita dell'amplificatore è influenzata solo dalla tensione e dalla corrente del circuito di uscita: cioè, l'impedenza di uscita dipende da se si usa una reazione di tensione o di corrente, non dipende invece dal tipo di circuito scelto per introdurre in ingresso la tensione di reazione.

Mostreremo in seguito che si sceglie in uscita la reazione di corrente o di tensione ed in ingresso il circuito serie o parallelo, tenendo presente soprattutto la loro proprietà di elevare o ridurre le impedenze di ingresso e di uscita.

5-7. Effetto della reazione negativa sulla impedenza di ingresso.

Nel circuito ad emettitore comune di fig. 5-6a, l'impedenza di ingresso è:

$$Z_{in} = \frac{E_i}{I_i} \tag{5-19}$$

se ora si fa una reazione di corrente con ingresso in serie, sfruttando la resistenza di emettitore R_E, fig. 5-6b, l'impedenza di ingresso diventa:

$$Z'_{in} = \frac{E_s}{I_i} \tag{5-20}$$

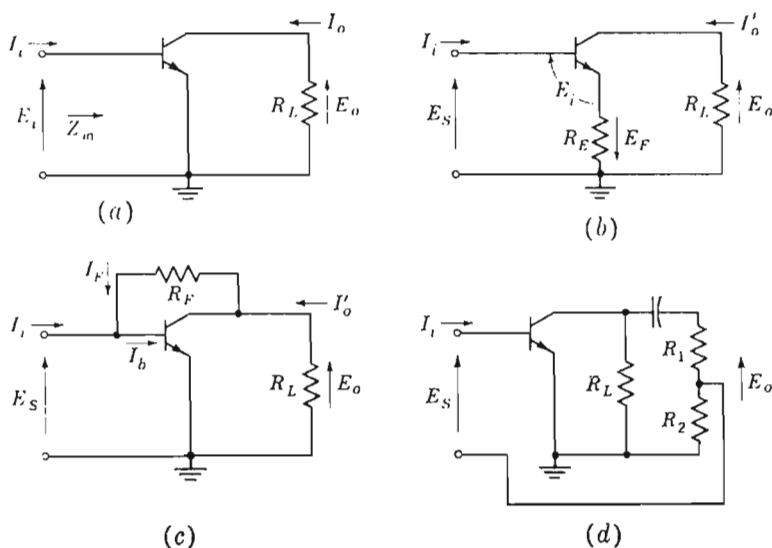



FIG. 5-6. — (a) Circuito non reazionato; (β) reazione di corrente, ingresso in serie; (c) reazione di tensione, ingresso in parallelo; (d) reazione di tensione, ingresso in serie.

La corrente di ingresso è:

$$I_i = \frac{E_s + E_F}{Z_{in}} \tag{5-21}$$

Se $\mathbf{I'_e} \cong \mathbf{I'_o}$, allora $\mathbf{E_F} \cong -\mathbf{I'_o R_e}$; inoltre $\mathbf{E'_o} = -\mathbf{I'_o R_L}$ per cui:

$$\beta = \frac{E_F}{E'_o} = \frac{R_E}{R_L} \tag{5-22}$$

ed

$$E_F = \frac{R_E}{R_L} E'_o = \beta E'_o$$

con questa definizione di $\mathbf{E_F}$, sfruttando la (5-21) e la (5-3) si può scrivere:

$$I_i = \frac{E_s + E_s[A_v\beta/(1 - A_v\beta)]}{Z_{in}} \qquad (4\text{-}23)$$

da cui:

$$Z_{in} = \frac{E_s}{I_i}\,\frac{1}{1 - A_v\beta}$$

Ne segue allora che:

$$Z'_{in} = Z_{in}(1 - A_v\beta) \qquad (5\text{-}24)$$

Quindi l'introduzione di una tensione di reazione negativa in serie all'ingresso *eleva la impedenza di ingresso* dell'amplificatore.

Consideriamo ora il caso che la tensione di reazione venga riportata in parallelo alla tensione d'ingresso (o più correttamente reazione di corrente), fig. 5-6c. In assenza di reazione, l'impedenza di ingresso sarebbe:

$$Z_{in} = \frac{E_s}{I_b}$$

mentre con una reazione riportata in parallelo al generatore di ingresso, l'impedenza di ingresso diventa:

$$Z'_{in} = \frac{E_s}{I_i} \qquad (5\text{-}25)$$

Il resistore $\mathbf{R_F}$ sarà grande rispetto ad $\mathbf{R_L}$ in modo da non abbassare la resistenza di carico, per cui la corrente $\mathbf{I_F}$ appare erogata da un generatore di corrente. Se $\mathbf{E_o} \gg \mathbf{E_s}$, si ha:

$$I_F = \frac{E_o - E_s}{R_F} \cong \frac{E_o}{R_F} = -\frac{R_L}{R_F} I'_o = -\beta I'_o \qquad (5\text{-}26)$$

e

$$I_i = I_b - I_F = I_b - \frac{R_L}{R_F} I'_o = I_b(1 - A_i\beta)$$

dividendo per $\mathbf{E_s}$, si ottiene con semplici passaggi:

$$Z_{in} = \frac{Z_{in}}{1 - A_i\beta} \qquad (5\text{-}27)$$

Dalla quale si deduce che introducendo la tensione di reazione in parallelo, si ottiene una *riduzione della impedenza di ingresso.*

È facile controllare questi risultati, considerando l'impedenza di ingresso dell'amplificatore ad emettitore comune, calcolata con i parametri *r*, eq. (3-66):

$$R_{ie} = r_b + \frac{r_e(1 + R_L/r_e)}{1 - \alpha + R_L/r_c} \cong r_b + \frac{r_e}{1 - \alpha} \qquad (5\text{-}28)$$

l'ultima espressione si ha per $R_L \ll r_c$. Se si aggiunge R_E al circuito, si ottiene

$$R_{ie} \cong r_b + \frac{r_e + R_E}{1 - \alpha} \tag{5-29}$$

da cui si vede che si ha un aumento della resistenza di ingresso dovuta alla introduzione, in serie all'ingresso, della caduta di tensione su R_E.

Un risultato simile si ottiene per l'inseguitore catodico studiato al paragrafo 3-22; in questo caso, $\beta = -1$.

5-8. Effetto della reazione negativa sull'impedenza di uscita.

Aggiungiamo al circuito generale di un amplificatore reazionato l'equivalente secondo Thevenin dell'amplificatore, dato da un generatore controllato $\mathbf{AE}_i$ di impedenza interna $\mathbf{Z}_o$, fig. 5-7a; nella figura è indicato che la tensione di reazione è prelevata in derivazione. Il valore della impedenza

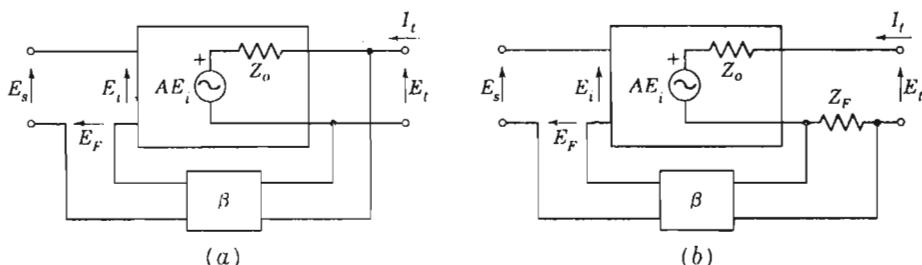



FIG. 5-7. — (*a*) Amplificatore con reazione di tensione; (*b*) con reazione di corrente.

di uscita con reazione, $\mathbf{Z'}_o$, si può calcolare cortocircuitando il generatore del segnale $\mathbf{E}_s$. Allora $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_F = \beta\mathbf{E}_t$. La tensione di prova $\mathbf{E}_t$ è applicata ai morsetti di uscita, ed è:

$$Z'_o = \frac{E_t}{I_t} \tag{5-30}$$

Intanto si può scrivere:

$$I_t = \frac{E_t - A\beta E_t}{Z_o}$$

ed è allora chiaro che:

$$Z'_o = \frac{Z_o}{1 - A\beta} \tag{5-31}$$

La presenza di una reazione di tensione *abbassa l'impedenza interna* dell'amplificatore secondo il fattore $1/(1 - \mathbf{A}\beta)$.

Si può fare una reazione di corrente, come è mostrato in fig.

5-7b; in tal caso l'impedenza di uscita $\mathbf{Z'_o}$ si può calcolare ancora applicando all'uscita una tensione $\mathbf{E_t}$ e ponendo $\mathbf{E_s} = 0$. Dal circuito, si trova:

$$I_t = \frac{E_t - AE_i}{Z_o + Z_F} \tag{5-32}$$

$$E_i = -\beta Z_F I_t \tag{5-33}$$

e risulta quindi:

$$Z'_o = \frac{E_t}{I_t} = Z_o + Z_F(1 - A\beta) \tag{5-34}$$

La presenza di una reazione di corrente *eleva la impedenza di uscita* dell'amplificatore della quantità $\mathbf{Z_F}(1 - \mathbf{A}\beta)$.

Per dimostrare quanto si è ora affermato, si farà uso degli amplificatori a triodo. In fig. 5-8 è mostrato un amplificatore con catodo a massa con una reazione di tensione ottenuta a mezzo della rete R_1, R_2. Normalmente $(R_1 + R_2) \gg R_a$, in modo che il circuito di reazione non altera apprezzabilmente l'impedenza di carico. Il valore di β è:

$$\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{5-35}$$

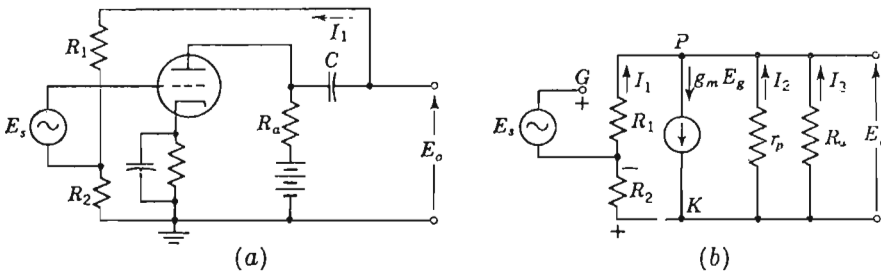



FIG. 5-8. — Amplificatore con reazione di tensione e relativo circuito equivalente.

Se si vogliono usare le equazioni del guadagno con reazione, occorre determinare il guadagno a ciclo aperto A supponendo $R_2 = 0$; si ha allora:

$$A = \frac{-\mu R_a}{r_p + R_a} \tag{5-36}$$

Ne segue che è:

$$A' = \frac{A}{1 - A\beta} = \frac{-[\mu/(1 + \mu\beta)]R_a}{[r_p/(1 + \mu\beta)] + R_a} \tag{5-37}$$

Le quantità in parentesi, possono essere considerate come μ' e r'_p del triodo reazionato. Si vede che entrambi questi parametri sono stati ridotti nella stessa misura, per cui il valore di g_m non varia. L'equazione (5-37)

mostra che la reazione di tensione ha ridotto la resistenza interna del triodo al valore $r_p/(1 + \mu\beta)$, come si era già visto prima.

In fig. 5-9 è disegnato un circuito a reazione di corrente, ottenuta non cortocircuitando con il condensatore il resistore R_k. La tensione di reazione è $-\mathbf{I}_p R_k$, la tensione di uscita è $-\mathbf{I}_p R_a$, per cui:

$$\beta = \frac{R_k}{R_a} \tag{5-38}$$

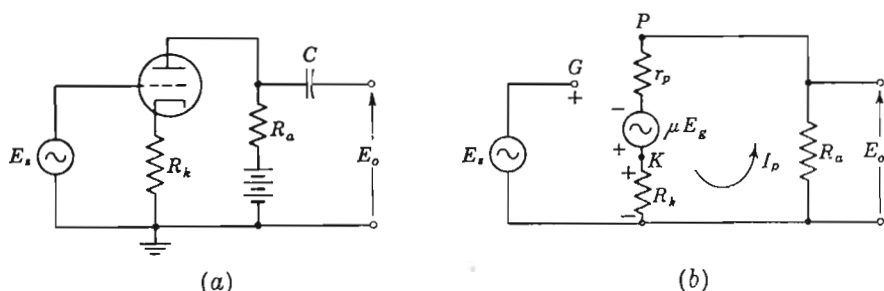



FIG. 5-9. — Amplificatore con reazione di corrente e relativo circuito equivalente.

Il guadagno a ciclo aperto si ottiene connettendo il generatore E_s direttamente al catodo K; in tal caso si ha:

$$A = \frac{-\mu R_a}{r_p + R_k + R_a} \tag{5-39}$$

Il guadagno con reazione è allora:

$$A' = \frac{A}{1 - A\beta} = \frac{-\mu R_a}{r_p + (1 + \mu)R_k + R_a} \tag{5-40}$$

Come era da attendersi, l'impedenza di uscita è data da r_p più il termine $(1 + \mu)R_k$ dovuto alla presenza della reazione di corrente.

In fig. 5-10 sono mostrati un esempio di reazione di tensione ed uno di reazione di corrente per amplificatori a più stadi. In fig. 5-10a, il guadagno di corrente è dato dall'equazione (5-3) con $A = A_I$ che rappresenta il guadagno complessivo a ciclo aperto dell'amplificatore. Si trova che:

$$\beta = \frac{R_L}{R_F} \tag{5-41}$$

Ordinariamente occorre includere nel ciclo di reazione un numero dispari di stadi in modo da ottenere la giusta relazione di fase.

In fig. 5-10b, si suppone che sia $I_{e3} \gg I_{e1}$; si può dimostrare che allora $\beta = R_E/R_L$. Il guadagno a ciclo chiuso è dato ancora dall'eq. (5-3), con $A = A_V$.

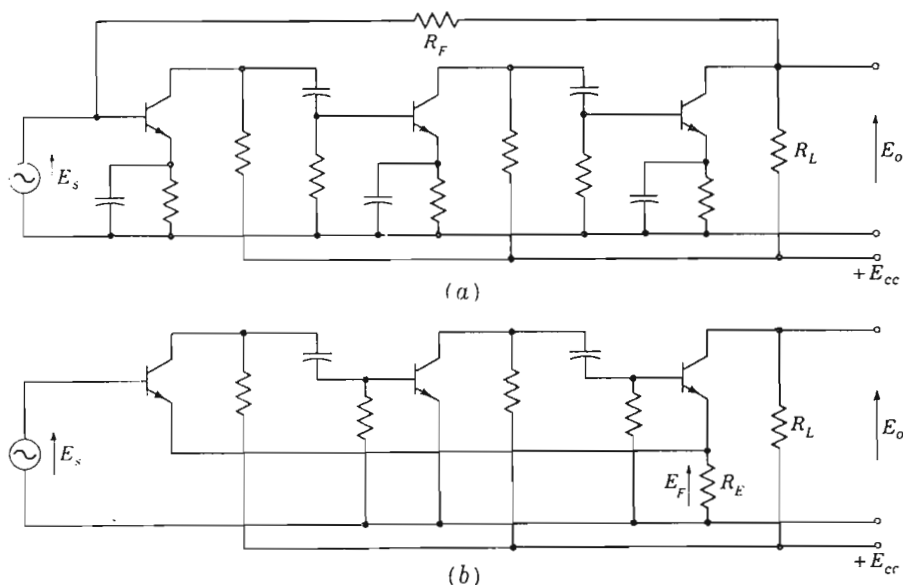



FIG. 5-10. — (a) Reazione di tensione; (b) reazione di corrente.

Quando c'è reazione di tensione si riduce l'impedenza di uscita dell'amplificatore che tende a comportarsi come un generatore a tensione costante per segnale di ingresso costante. Con la reazione di corrente, l'impedenza di uscita dell'amplificatore aumenta e questo si comporta come un generatore a corrente costante, per un segnale di ingresso costante.

5-9. Altri circuiti di reazione.

Gli amplificatori con un numero dispari di stadi simili presentano uno sfasamento a centro banda pari ad un multiplo dispari di 180° per cui il guadagno sarà negativo. In tal caso il circuito β potrà introdurre direttamente in ingresso una parte dell'uscita ed il fattore di reazione sarà $-\mathbf{A}\beta$.

In circuiti con un numero pari di stadi uguali, si avrà invece uno sfasamento multiplo pari di 180° e quindi il guadagno sarà positivo. Il circuito β dovrà allora produrre un ulteriore sfasamento di 180° nel riportare il segnale in ingresso; questo sfasamento si realizza spesso introducendo il segnale nell'emettitore o nel catodo del primo stadio.

Nei circuiti di fig. 5-11, le reazioni sono state realizzate prelevando il segnale sul secondario del trasformatore di uscita. In tal modo il trasformatore si trova all'interno del ciclo di reazione per cui viene ridotta la distorsione di frequenza e della forma d'onda cui esso dà origine. Si può avere una reazione sia positiva che negativa secondo il verso degli avvolgimenti che determina il segno di β. Il trasformatore introduce uno sfasamento in prossimità delle sue frequenze limite; questo altera la fase di $\mathbf{A}\beta$ e può alterare la reazione facendola passare da negativa a positiva.

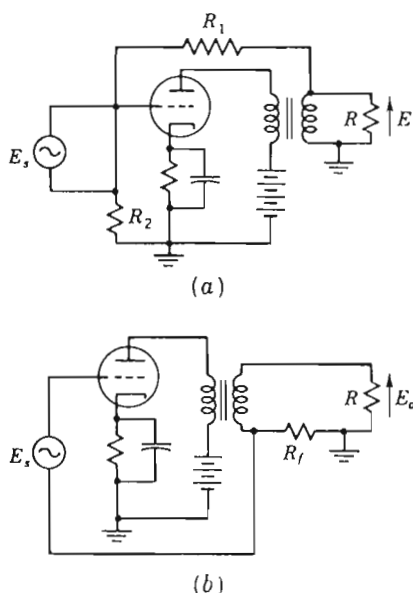



FIG. 5-11. — Circuiti reazionati.

5-10. La reazione positiva; disaccoppiamento.

Di solito si cerca di evitare la reazione positiva poichè questa peggiora la stabilità degli amplificatori. Tuttavia, in qualche caso, si applica una reazione positiva all'interno di un ciclo di reazione negativa sufficiente a rendere il sistema stabile. La reazione positiva è allora utile per aumentare il guadagno interno.

In fig. 5-12 è mostrata una realizzazione di questo tipo; il resistore R_p accoppia i catodi di due stadi successivi e dà origine alla reazione positiva; la reazione negativa è prelevata dal trasformatore di uscita.

Possono verificarsi delle reazioni positive o negative non previste e dovute ad accoppiamenti elettrici o magnetici fra i circuiti di ingresso e di uscita;

accoppiamenti attraverso fili comuni a più stadi ed accoppiamenti dovuti all'impedenza interna di alimentatori comuni a più stadi. A queste reazioni accidentali si deve imputare l'instabilità nel guadagno di un amplificatore, molto più alto o più basso del previsto, la presenza di oscillazioni ad alta o bassa frequenza. Caratteristica degli amplificatori per segnali audio, è la possibilità che si verifichi un'oscillazione a bassa frequenza di pochi cicli al secondo.

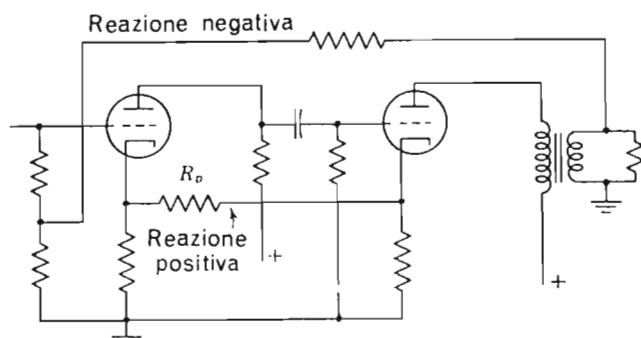



FIG. 5-12. — Reazione positiva e negativa inserita in uno stesso circuito.

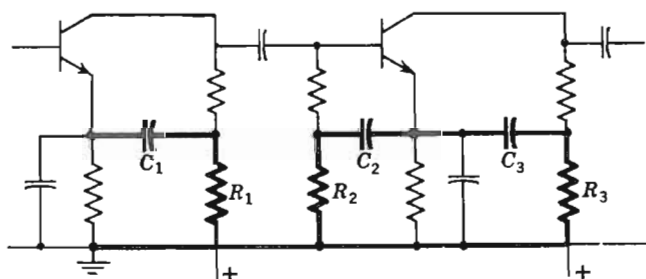



FIG. 5-13. — Circuiti di disaccoppiamento di un amplificatore.

Di solito è possibile eliminare questi accoppiamenti indesiderati, salvo quelli dovuti alla alimentazione, a mezzo di schermi. Spesso sono necessari dei *circuiti di disaccoppiamento* sui fili di ritorno in modo da evitare che il segnale passi attraverso l'impedenza dell'alimentatore comune agli altri stadi; con i filtri RC indicati in fig. 5-13 le correnti variabili di ciascuno stadio sono riportate direttamente al relativo catodo. Le resistenze *R* si scelgono il più grande possibile ma non tanto da produrre delle forti cadute di tensioni. La costante di tempo dei filtri sarà almeno dieci volte il periodo della più bassa frequenza da amplificare.

L'entità ed il tipo di instabilità prodotto da queste reazioni parassite dipende dal numero di stadi e dai punti in corrispondenza dei quali il segnale di reazione viene prelevato ed immesso nel circuito. Per le ragioni già esaminate in precedenza, la reazione, attraverso l'alimentatore comune, fra il circuito di uscita e quello di ingresso, sarà negativa se il numero di stadi è dispari, positiva se è pari.

5-11. Stabilità degli amplificatori reazionati.

Si è già visto che nel caso di reazione negativa e quindi di amplificatore stabile, sarà $| 1 - A\beta | > 1$. Poichè $A\beta$ sarà in generale un numero complesso, funzione della frequenza, occorre studiare l'andamento del suo modulo e della sua fase, in funzione della frequenza per essere sicuri che sia sempre $| 1 - A\beta | > 1$. Può accadere infatti che, per alcune frequenze, sia $| 1 - A\beta | < 1$ o che sia uguale a zero. Se si verifica il primo caso, l'amplificatore sarà reazionato positivamente, mentre se è vero il secondo, l'amplificatore oscillerà.

È possibile studiare rapidamente l'andamento di $A\beta$ facendone un diagramma nel piano complesso. Si calcolano ampiezza e fase di $A\beta$ a tutte le frequenze fra $f = 0$ ed $f = \infty$, e quindi si riportano i valori calcolati come una curva polare sul piano complesso con un asse reale ed uno immaginario.

A titolo di esempio, si è riportato, in fig. 5-14 il diagramma relativo ad un amplificatore ad accoppiamento RC con un guadagno a centro banda di -14 e $\beta = 0{,}25$ a tutte le frequenze. Nel paragrafo 4-8 ci sono tutti i dati necessari per preparare una tabella dei valori di $A\beta$. Si trova che il diagramma polare di un amplificatore RC è una circonferenza che va percorsa in senso orario per frequenze crescenti. Lungo la circonferenza sono indicati i punti a diverse frequenze; la zona centrale della banda passante dell'amplificatore si trova in corrispondenza del punto a 180°. La circonferenza rappresenta il luogo di $A\beta$ a tutte le frequenze; nello stesso diagramma è stato disegnato il vettore $1 \underline{/0^\circ}$, sicchè si può determinare per via grafica il vettore $1 - A\beta$ come è indicato in figura.

Frequenza	$A\beta$	*Frequenza*	$A\beta$
$0{,}1 f_1$	$0{,}35 \underline{/264^\circ}$	$0{,}5 f_2$	$3{,}11 \underline{/153^\circ}$
$0{,}5 f_1$	$1{,}57 \underline{/243^\circ}$	f_2	$2{,}47 \underline{/135^\circ}$
f_1	$2{,}47 \underline{/225^\circ}$	$2 f_2$	$1{,}57 \underline{/117^\circ}$
$2 f_1$	$3{,}11 \underline{/207^\circ}$	$8 f_2$	$0{,}35 \underline{/96^\circ}$
Media freq.	$3{,}50 \underline{/180^\circ}$		

Inoltre è stata disegnata una circonferenza di raggio unitario con centro nel punto 1,j0 (tratteggiata in figura); il valore di $| 1 - \mathbf{A}\beta |$ sarà inferiore all'unità solo se l'estremo del vettore $1 - \mathbf{A}\beta$ si trova all'interno di questa circonferenza di raggio unitario. Ma perchè ciò avvenga, occorre che il diagramma polare di $\mathbf{A}\beta$ passi all'interno della circonferenza unitaria; in conclusione, la condizione di stabilità e di assenza di reazione positiva è che il luogo di $\mathbf{A}\beta$ non attraversi la circonferenza di raggio unitario e centro 1,j0. Ovviamente, l'amplificatore reazionato, a cui si riferisce la fig. 5-14, presenta reazione negativa a tutte le frequenze.

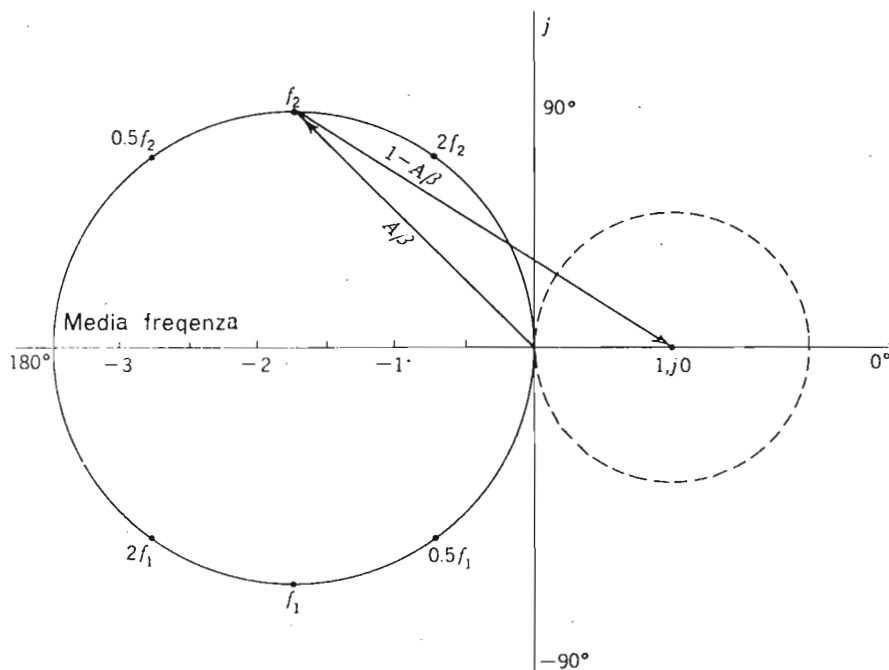



FIG. 5-14. — Diagramma polare di AB per un amplificatore RC.

Se il luogo dei punti $\mathbf{A}\beta$ attraversa la circonferenza unitaria, l'amplificatore avrà reazione positiva; se il luogo $\mathbf{A}\beta$ passa per il punto 1,j0, l'amplificatore oscilla. In effetti Nyquist ha dimostrato che *l'amplificatore oscilla se il punto* 1,j0 *è contenuto all'interno del luogo dei punti* $\mathbf{A}\beta$.

Per chiarire meglio questo fatto, in fig. 5-15 si è riportato il diagramma di un amplificatore reazionato in cui il trasformatore di uscita è interno al ciclo di reazione. *A* frequenze inferiori a quella centrale esso si comporta in maniera analoga ad un amplificatore RC. All'aumentare della frequenza, aumentano sia lo sfasamento che il guadagno a causa di fenomeni di riso-

nanza dell'avvolgimento; a frequenze ancora più alte lo sfasamento è praticamente zero ed il guadagno è piccoıo; in questa zona, il luogo di **A**β attraversa la circonferenza unitaria e quindi la reazione sarà positiva.

In generale non si ha oscillazione se il modulo di **A**β diventa inferiore all'unità quando l'angolo di fase raggiunge i 360⁰. Questo richiede che si controlli il guadagno dell'amplificatore su di un campo di frequenze molto più ampio di quello di ordinario funzionamento.

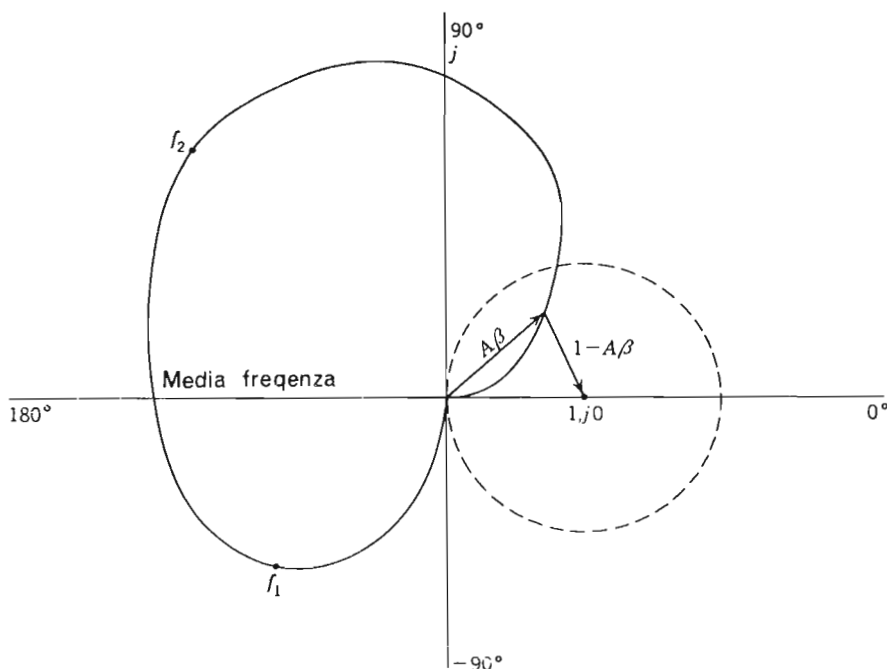



FIG. 5-15. — Diagramma polare di AB per un amplificatore comprendente un trasformatore.

5-12. Ancora sulle condizioni di stabilità.

È molto laborioso tracciare un diagramma completo della quantità **A**β relativa ad un certo amplificatore; in questo paragrafo verranno illustrati dei metodi i quali permettono di evitare questo lavoro e che sono utili per chiarire il concetto di stabilità.

Una rete costituita da pure reattanze, mostra una successione di risonanze ed antirisonanze al variare della frequenza. I punti di risonanza ed antirisonanza, sono detti zeri e poli rispettivamente e si trovano sull'asse delle frequenze. La reattanza, funzione della frequenza, che descrive la rete è espressa dal rapporto di due polinomi di pulsazione ω, ciascuno dei quali

può essere espresso come prodotto di fattori dati dalle sue radici; le radici del numeratore indicano gli zeri, quelle del denominatore i poli. Una tale funzione sarà del tipo

$$F(\omega) = j\omega H_{\omega 2} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega - \omega_3^2) \ldots}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega - \omega_4^2) \ldots} \tag{5-42}$$

in cui il fattore $j\omega H_{\omega 2}$ è una costante nota come *fattore di scala.* Questa funzione presenterà degli zeri in ω_1^2 ed ω_3^2; poli in ω_2^2 ed ω_4^2.

La funzione di trasferimento, o guadagno, di un amplificatore è un rapporto di polinomi dello stesso tipo. Considerandolo nella forma più generale, usando la notazione della trasformata di Laplace, sostituendo s al posto di $j\omega$ si ottiene una forma matematica simile a quella scritta precedentemente. Per esempio, la risposta alle alte frequenze di un amplificatore RC si può scrivere come:

$$A_H = -g_m R \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

e se sostituiamo s a $j\omega$ si ottiene:

$$A_H = \frac{-g_m}{C} \frac{1}{s + 1/RC} \tag{5-43}$$

$$= \frac{-g_m}{C} \frac{1}{s + s_1}$$

Il polinomio al denominatore dà luogo ad un polo in corrispondenza di $s = -1/RC$; il fattore di scala, è $-g_m/C$. In un amplificatore, comprendente un certo numero di stadi di questo tipo, gli zeri ed i poli dei diversi stadi rappresentano, nel piano complesso, il diagramma dell'amplificatore completo.

Per chiarire meglio come si determinano gli zeri ed i poli, consideriamo l'espressione del guadagno dell'amplificatore a larga banda con compensazione in derivazione, mostrato nel paragrafo 4-12. Il guadagno è:

$$A(\omega) = -g_m \frac{(R + j\omega L)(1/j\omega C)}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \tag{5-44}$$

dove $C = C_s$ è la capacità parallelo dello stadio.

Trascrivendo questa formula in termini di s, si ottiene:

$$A(s) = -g_m \frac{(R + sL)(1/sC)}{R + sL + 1/sC}$$

che si può scrivere:

$$A(s) = \frac{-g_m}{C} \frac{s + R/L}{s^2 + sR/L + 1/LC} \tag{5-45}$$

$$= \frac{-g_m}{C} \frac{s + s_0}{(s + s_1)(s + s_2)} \tag{5-46}$$

in cui s_0 è lo zero che si ha per $s = - R/L$ ed i due poli del denominatore saranno reali o complessi coniugati secondo il valore di R.

Benchè s sia il corrispondente di una frequenza, dalla teoria della trasformata di Laplace si trova che in generale s è un numero complesso del tipo $s = \sigma + j\omega$. Poichè ω, da solo, è una pulsazione reale positiva, s è detta pulsazione complessa. Questa è un'utile generalizzazione perchè, se si considera l'esponenziale:

$$\varepsilon^{st} = \varepsilon^{(\sigma + j\omega)t} = \varepsilon^{\sigma t}\varepsilon^{j\omega t}$$

si vede che esso corrisponde ad una sinusoide di ampiezza crescente o decrescente, il che indica che la pulsazione complessa è utile per descrivere sia la risposta transitoria che quella a regime della rete considerata. La componete σ indica lo smorzamento e controlla la velocità con cui l'ampiezza aumenta o diminuisce, mentre la componente immaginaria indica la pulsazione. È possibile fare un diagramma dei valori di s nel piano complesso, con σ sull'asse reale ed ω su quello immaginario. Gli zeri ed i poli di s possono essere contrassegnati rispettivamente da punti e croci nel tracciare l'andamento della funzione. In fig. 5-16 sono riportati i diagrammi delle funzioni (5-43) e (5-46).

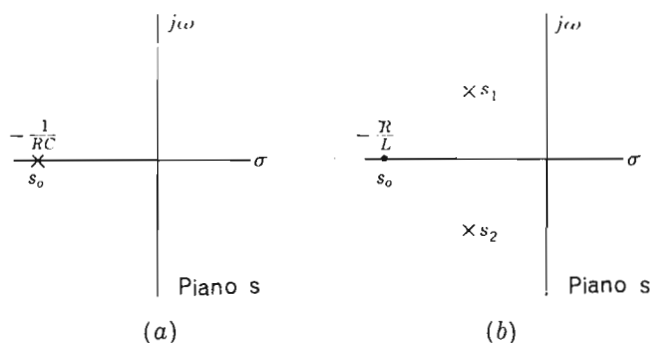



FIG. 5-16. — Posizione dei poli e degli zeri: (*a*) per l'eq. (5-43); (*b*) per l'eq. (5-46).

Per localizzare i poli e gli zeri occorre decomporre in fattori i polinomi che compaiono nella espressione del guadagno scritto in funzione di s. È da notare che gli zeri ed i poli devono essere reali e devono trovarsi sullo asse σ, oppure devono essere coppie complesse coniugate. Ogni zero o polo, da un lato dell'asse reale, deve avere il suo coniugato. I poli complessi coniugati rappresentano sinusoidi crescenti o decrescenti, secondo che σ sia positivo o negativo. I poli immaginari coniugati rappresentano una risposta sinusoidale di ampiezza costante e si trovano sull'asse immaginario.

Un valore positivo di σ, cioè la presenza di un polo nel semipiano a destra, indica una sinusoide crescente illimitatamente e quindi instabilità dell'amplificatore; un valore negativo di σ indica una sinusoide smorzata che eventualmente si annulla dopo un certo tempo. Solamente un sistema ideale, privo di perdite, sarà rappresentato da un polo con $\sigma = 0$; questa situazione non si verifica mai in sistemi fisicamente realizzabili.

Si trova allora che condizione necessaria e sufficiente *perchè un amplificatore reazionato sia stabile è che il guadagno, o funzione di trasferimento, espresso in funzione di s, non presenti poli nel semipiano di destra del piano delle s.*

Alla luce di questo risultato, esaminiamo l'espressione generale del guadagno di un amplificatore reazionato, espressa in funzione di s:

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 - A\beta(s)} \tag{5-47}$$

Si vede che il problema della stabilità riguarda gli *zeri* del denominatore $1 - \mathbf{A}\beta$ che capitano nel semipiano a destra. Se il denominatore presenta degli zeri in questa regione, allora la quantità $G(s)$ avrà dei poli nel semipiano a destra e quindi si ha instabilità. Se non vi sono zeri del denominatore nel semipiano a destra, l'amplificatore è stabile. Questo risultato è una delle forme del criterio di Nyquist.

Come esempio di questo metodo, consideriamo un amplificatore a due stadi, ad accoppiamento RC, con i due stadi identici. Sia dato il valore di β, la cui fase sia zero a tutte le frequenze. Per $R_g \gg R_a$, l'espressione del guadagno ad alta frequenza è:

$$A(\omega) = \frac{-g_m R_a}{1 + jf/f_2} \cdot \frac{-g_m R_a}{1 + jf/f_2}$$

$$A(s) = \frac{(g_m R_a)^2}{(1 + s/\omega_2)^2}$$

Scrivendo la $G(s)$ in base all'eq. (5-47) si ha:

$$G(s) = \frac{g_m{}^2 R_a{}^2}{(1 + s/\omega_2)^2 - g_m{}^2 R_a{}^2 \beta} \tag{5-48}$$

che si può scrivere:

$$G(s) = \frac{g_m{}^2 R_a{}^2 \omega_2{}^2}{s^2 + 2\omega_2 s + \omega_2{}^2(1 - g_m{}^2 R_a{}^2 \beta)} \tag{5-49}$$

Occorre esaminare ora gli zeri del denominatore della (5-49) che si trovano nel semipiano di destra. Si trova che le radici del denominatore sono:

$$s_1 = -\omega_2(1 + g_m R_a \sqrt{\beta})$$
$$s_2 = -\omega_2(1 - g_m R_a \sqrt{\beta})$$

per $g_m R_a \sqrt{\beta} > 1$, la radice s_2 è uno zero situato nel semipiano di destra; i due zeri sono localizzati nel piano delle s come in fig. 5-17. Poichè $g_m R_a$ è il guadagno a centro banda dell'amplificztore, ne segue che, quando il guadagno a centro banda è uguale o maggiore di $1/\sqrt{\beta}$, l'amplificatore con reazione su due stadi è instabile, come era da aspettarsi in base alla trattazione precedentemente svolta.

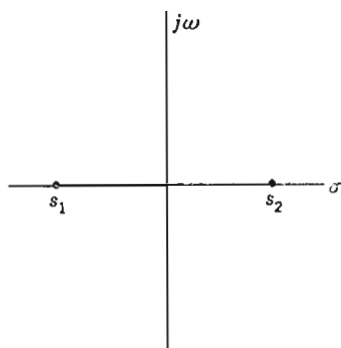



FIG. 5-17. — Diagramma relativo all'eq. (5-49).

PROBLEMI

5-1. Un amplificatore con reazione negativa presenta un guadagno di 41. Si sa che in assenza di reazione occorre un segnale di 0,15v per ottenere una certa uscita, mentre l'ingresso deve essere 3,2v per ottenere la stessa uscita con reazione. Calcolare il valore di β impiegato ed il guadagno a ciclo aperto.

5-2. Un amplificatore ad un solo stadio presenta un guadagno di — 20 ed un'uscita di 105v con l'8% di distorsione. Se si applica una controreazione tale da ridurre la distorsione al 2% quale valore di β bisogna adottare? quale tensione di uscita si ottiene applicando un segnale di ingresso il quale, in assenza di reazione, dà un'uscita di 27 volt?

5-3. (a) Disegnare una rete di reazione β per effetto della quale si abbia un aumento del guadagno dell'amplificatore alle basse frequenze; (b) disegnare un circuito β il quale aumenti il guadagno alle alte frequenze rispetto a quello a bassa frequenza.

5-4. Un amplificatore genera un volt di rumore quando il segnale in uscita è 125V. Determinare il valore di β necessario perchè il rapporto segnale-rumore in uscita diventi 1.000 : 1 con la medesima uscita. Il guadagno con reazione è +220.

5-5. Un amplificatore ad accoppiamento R-C ha $f_1 = 60$Hz ed $f_2 = 15.500$Hz. Il guadagno a centro banda è — 127; calcolare f_1 ed f_2 quando si aggiunge una reazione con $\beta = 0,1$.

5-6. Calcolare il guadagno del circuito di fig. 5-8a, con $\mu = 70$, $r_p = 77.000\,\Omega$, $R_a = 100.000\,\Omega$, $R_1 = 150.000\,\Omega$ ed $R_2 = 10.000\,\Omega$.

5-7. In fig. 5-11b, $R = 8\,\Omega$. Supponendo che il trasformatore abbia un rapporto $n_1/n_2 = 23$, che $\mu = 19$ ed $r_p = 5.000\,\Omega$, calcolare il valore di R_f necessario perchè venga applicata una controreazione di 10db.

5-8. In fig. 5-11a, il tubo è un tetrodo con $g_m = 5.000\mu$mho, $r_p = 46.000\,\Omega$, il carico è $R = 10\,\Omega$, il trasformatore ha un rapporto di 20/1 in discesa verso il carico; (a) determinare i valori di R_1 ed R_2 necessari perchè si applichi una controreazione di 12db; (b) calcolare la potenza che si dissipa su R se $E_s = 1{,}0$V.

5-9. Riferendosi al problema 5-8, calcolare l'impedenza di uscita del tubo quando è applicata la reazione. Determinare inoltre il rapporto di trasformazione necessario perchè si abbia adattamento di impedenze.

5-10. Un amplificatore di precisione deve essere reazionato e deve avere un guadagno totale di 100. Deve essere garantita una precisione del $\pm$ 0,5% ma ci si aspetta che nella produzione si possano avere delle variazioni del $\pm$ 6% del guadagno a ciclo aperto. Determinare il valore di β necessario perchè si abbia la precisione richiesta ed il guadagno a ciclo aperto occorrente.

5-11. Un transistore in cui $h_{fe} = 47$, $r_{ie} = 130\,\Omega$, $r_{oe} = 1{,}8$M Ω, è montato nel circuito di fig. 5-6c. La resistenza del generatore è di $200\,\Omega$, $R_L = 10.000\,\Omega$. Calcolare il valore di R_F tale che si abbia una reazione di 16db e determinare il guadagno di corrente.

5-12. Nella fig. 5-9a, il tubo è una sezione della valvola 12AUT, con $g_m = 2.500\ \mu$mho, $r_p = 7.000\,\Omega$, $R_k = 2.000\,\Omega$, $R_a = 25.000\,\Omega$. Calcolare β ed il guadagno; calcolare inoltre la resistenza di uscita ed il valore di Z_o in assenza di reazione.

5-13. Un amplificatore non reazionato presenta i seguenti guadagni complessivi: $A_i = 8.000$ ed $A_v = -30.000$ quando $R_L = 2.000\,\Omega$. L'impedenza di ingresso è $2.000\,\Omega$. (a) Calcolare R_F, A'_i, A'_v e Z'_i quando si applica una reazione $\beta = 0{,}1$ in derivazione; (b) ripetere i calcoli nel caso che la stessa reazione sia introdotta in serie a mezzo di un resistore catodico.

5-14. Calcolare A'_i, Z'_i e Z'_o, per il transistore di fig. 5-18 con $h_{ie} = 2.200\,\Omega$, $h_{oe} = 2 \times 10^{-6}$ mho, $h_{fe} = 39$.

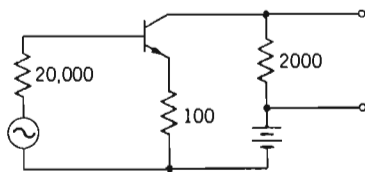



FIG. 5-18.

5-15. Calcolare il valore di R_F necessario per inserire una reazione in derivazione all'ingresso del circuito di fig. 5-18 in modo da ottenere $\beta = 0,15$; il transistore sia quello del problema 5-14.

5-16. Un amplificatore ad accoppiamento RC con tre stadi identici, presenta $f_1 = 23$Hz ed $f_2 = 92$KHz per ciascuno stadio. Il guadagno complessivo a centro banda è 230; tracciare il diagramma del guadagno di tensione, complesso, dell'amplificatore, indicando le frequenze effettive.

5-17. Si aggiunga, all'amplificatore del problema 5-16, una reazione $\beta = -0,1$; tracciare il diagramma di Nyquist del circuito.

5-18. Un amplificatore reazionato con $\beta = 0,1$ presenta un guadagno a centro banda di $14 \underline{/180^0}$. All'interno al ciclo di reazione si trova un trasformatore le cui caratteristiche sono indicate nella tabella seguente:

f, Hz	*rapporto α*	*f, Hz*	*rapporto α*
20	$0,6\underline{/80^0}$	12.000	$4,5\underline{/-20^0}$
50	$1,35\underline{/63^0}$	16.000	$6,8\underline{/-40^0}$
100	$2,1\underline{/45^0}$	20.000	$9,0\underline{/-90^0}$
800	$3,0\underline{/10^0}$	30.000	$2,1\underline{/-156^0}$
1000-7000	$3,1\underline{/0^0}$	40.000	$1,2\underline{/-164^0}$
8000	$3,6\underline{/-8^0}$		

Tracciare il luogo dei punti $A\beta$ e discutere il funzionamento dell'amplificatore supponendo che le variazioni di $A\beta$ siano dovute al solo trasformatore.

5-19. Un amplificatore reazionato presenta un fattore di reazione dato da:

$$A\beta = \frac{-40(1 + 0,02s)}{1 + 0,25s + 0,01s^2}$$

Tracciare i poli e gli zeri, nel piano complesso, e dire se l'amplificatore è stabile.

5-20. Determinare la stabilità per ciascuno degli amplificatori seguenti, trovandone i poli e gli zeri.

(*a*) $$A\beta = \frac{45}{s^2 + 2s + 1}$$

(*b*) $$A\beta = \frac{12}{s^2(0,4s^2 + 1,3s + 1)}$$

(*c*) $$A\beta = \frac{1 + 3s}{-s(1 + 0,3s)}$$

BIBLIOGRAFIA

1. BLACK H. S.: Stabilized Feedback Amplifiers, *Elec. Eng.*, **53:** 114 (1934).
2. NYQUIST H.: Regeneration Theory, *Bell System Tech., J.*, **11:** 126 (July, 1932).
3. BODE H. W.: "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Company, Inc., Princton, N.J., 1945.
4. TERMAN F. E.: Feedback Amplificrs, *Electronics*, **10:** 15 (Juanary, 1937).
5. MAYER H. F.: Control of the Effective Internal Impedance of Amplifiers by Means of Feedback, *Proc. IRE*, **27:** 213 (1939).
6. LEARNED V.: Corrective Networks for Feedback Circuits, *Proc. IRE*, **32:** 403 (1944).
7. LYNCH W. A.: The Stability Problem in Feebdack Amplifiers, *Proc. IRE*, **39:** 1000 (1951).
8. NIXON F. E.: "Principles of Automatic Control", Pre tice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.. 1953.

CAPITOLO VI

AMPLIFICATORI DI POTENZA PER BASSA FREQUENZA

I transistori e i tubi che debbono fornire una potenza relativamente grande ad un dato carico, funzionano con grandi escursioni del punto di lavoro sulle caratteristiche di trasferimento. In molte applicazioni in cui il segnale in uscita è la voce umana o la musica, o nel campo della strumentazione elettronica e dei controlli, è importante che gli amplificatori siano lineari. Questi amplificatori vengono chiamati *amplificatori lineari per grandi segnali.* Tale denominazione crea un parallelo con gli amplificatori lineari per piccoli segnali, per i quali il funzionamento è ristretto ad una piccola regione della caratteristica di trasferimento. Nel caso dei grandi segnali, è più importante ottenere una certa potenza di segnale in uscita, con una distorsione limitata, che amplificazione solo di tensione o solo di corrente, come nel caso di amplificatori per piccoli segnali.

Le considerazioni sulla distorsione sono importanti in questo caso, poiché il funzionamento con grandi segnali implica l'utilizzazione di tutta la caratteristica di trasferimento e tale curva in generale non è lineare; in conseguenza di ciò, poiché il dispositivo funziona in regime non lineare, i i metodi analitici sono applicabili solo limitatamente; di solito, se si vuole ottenere un alto rendimento o conoscere la distorsione introdotta, vengono impiegati nel progetto metodi grafici od empirici.

Poiché il transistore ed il tubo sono dei dispositivi il cui funzionamento è limitato dalla massima dissipazione tollerabile, è importante che il rendimento di potenza sia elevato. Il progettista deve quindi imporre le condizioni necessarie ad un alto rendimento, scegliere il punto Q e l'ampiezza del segnale di ingresso in modo da limitare la dissipazione e la temperatura di funzionamento del componente, scegliere una resistenza di carico che dia luogo ad una distorsione accettabile, e fissare delle adatte tensioni di alimentazione.

6-1. Considerazioni generali.

Nel funzionamento in *classe A* la corrente anodica o di collettore circola sempre; esso è di solito utilizzato quando si desideri avere una distorsione

minima delle forme d'onda in gioco. Tuttavia il rendimento di potenza è basso, e la dissipazione nel dispositivo attivo, per unità di potenza in uscita, è relativamente alta.

Nel funzionamento in *classe B* l'uscita ed il rendimento di potenza sono più elevati, a spese di un aumento della distorsione. In questo caso la polarizzazione è posta all'interdizione, e la corrente anodica o di collettore circola solo per un semiperiodo. Questi impulsi di corrente di uscita hanno una forma simile a quella dei corrispondenti semiperiodi dell'onda di ingresso, ma il contenuto di armoniche è alto a causa della mancanza dell'altro semiperiodo. Si può però ricorrere ad un circuito, detto *controfase*, per ridurre la distorsione prodotta dalla conduzione durante un solo semiperiodo.

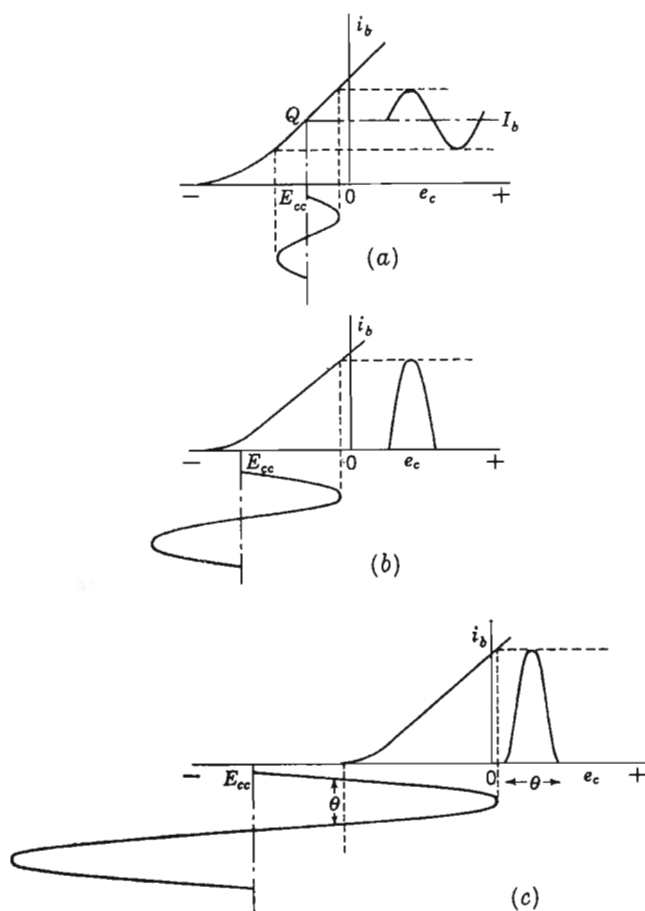



FIG. 6-1 — *a*) Funzionamento in classe A. *b*) Funzionamento in classe B. *c*) Funzionamento in classe C.

Nel funzionamento in *classe AB* la polarizzazione è intermedia tra quella delle classi A e B, e la corrente anodica o di collettore circola per più di un semiperiodo ma per meno di un intero periodo della forma d'onda d'ingresso. In questo tipo di funzionamento si ha un rendimento di potenza maggiore di quello ottenibile in classe A ed una distorsione minore di quella che si ha nel funzionamento in classe B.

Un ulteriore aumento della tensione di contropolarizzazione porta al funzionamento in *classe C*, con distorsione notevolmente elevata, per cui gli amplificatori in classe C non possono essere considerati lineari nel caso di segnali analogici. Tuttavia con essi si raggiungono rendimenti molto elevati.

Le escursioni del punto di lavoro sulle caratteristiche di trasferimento per le varie classi di funzionamento sono riportate in fig. 6-1.

6-2. Circuiti di uscita.

Il circuito di uscita alimentato in serie, riportato in fig. 6-2a non è quasi mai impiegato quando si desideri una certa potenza in uscita; infatti la dissipazione di potenza nel carico dovuta alla componente continua della corrente è elevata e la tensione continua di collettore, o anodica, è bassa; inoltre, fatto ancor più importante, il carico effettivo raramente ha il valore più opportuno per ottenere la massima potenza in uscita e per mantenere la distorsione entro i limiti prefissati.

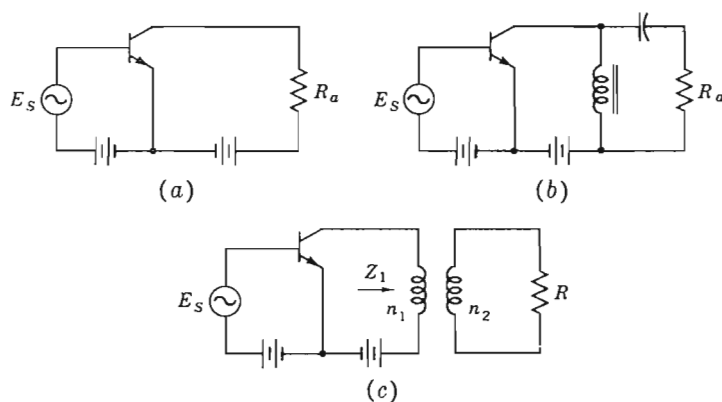



FIG. 6-2 — Circuiti di uscita degli amplificatori di potenza.

Anche il circuito di fig. 6-2b richiede un carico di valore adatto, mentre l'accoppiamento a trasformatore, riportato in fig. 6-2c, fa sì che il carico in regime dinamico possa assumere qualsiasi valore. Con un rapporto di spire tra primario e secondario $n_1/n_2 = a$ la resistenza di carico riportata al pri-

mario, R′, può essere variata, pur rimanendo bassa la resistenza in continua. Le tensioni e le correnti sono date dalle relazioni:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} = a \qquad (6\text{-}1)$$

L'impedenza vista dal primario è:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2 I_2}{I_1^2}\,\frac{I_2}{I_2} = \frac{a^2 V_2}{I_2}$$

Poiché il carico del circuito secondario è V_2/I_2 si ha:

$$Z_1 = a^2 Z_2 \qquad (6\text{-}2)$$

dove Z_1 è il carico in alternata visto dal lato del primario e dovuto ad un carico Z_2 posto nel secondario.

Ad esempio si supponga di dover impiegare un carico di 16 ohm con un transistore il cui carico ottimo sia stato calcolato di 500 ohm. Perché Z_1 valga 500 ohm il rapporto del trasformatore deve essere:

$$a = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{500}{16}} = 5{,}6$$

Un tale *trasformatore ideale* varia il modulo di un'impedenza ma non ne altera l'angolo di fase. Per essere considerato ideale, un trasformatore deve avere perdite trascurabili, corrente di magnetizzazione minima e reattanza di dispersione trascurabile. I trasformatori effettivi che si avvicinano alle caratteristiche ideali sono costosi, sicché molti trasformatori di uscita si allontanano notevolmente da queste caratteristiche.

In fig. 6-3a è rappresentato un trasformatore ideale, in fig. 6-3b è invece riportato il circuito equivalente di un trasformatore effettivo; in esso R_1 e R_2 sono le resistenze degli avvolgimenti, L_1 e L_2 le induttanze di dispersione, R_c è una resistenza equivalente che tien conto delle perdite nel nucleo, L_p è l'induttanza primaria in cui fluisce la corrente magnetizzante e le capacità sono quelle parassite degli avvolgimenti. Nella fig. 6-3c tutte queste grandezze sono state riportate al circuito primario applicando l'eq. 6-1.

La capacità C′ congloba C_1, C_2/a^2 e la capacità C_m tra gli avvolgimenti. Quest'ultima è connessa tra i punti a potenziale $+E_1$ e $\pm E_2$; la differenza di potenziale ai capi di C_m è $E_1(1 \pm 1/a)$. Di conseguenza l'energia immagazzinata in C_m è la stessa di quella immagazzinata in una capacità Cm (1 ±

$\pm$ 1/a)^2 a cui sia applicata la differenza di potenziale E_1. Quindi questa capacità può essere conglobata in C', e si ha:

$$C' = C_1 + C_2/a^2 + (1 \pm 1/a)^2 C_m \tag{6-3}$$

riportando così tutte le capacità ai capi del primario.

L'impedenza di ingresso in fig. 6-3c dovrebbe essere $R' = a^2R$ a tutte le frequenze, ma in effetti varia per la presenza degli elementi parassiti in serie e in parallelo.

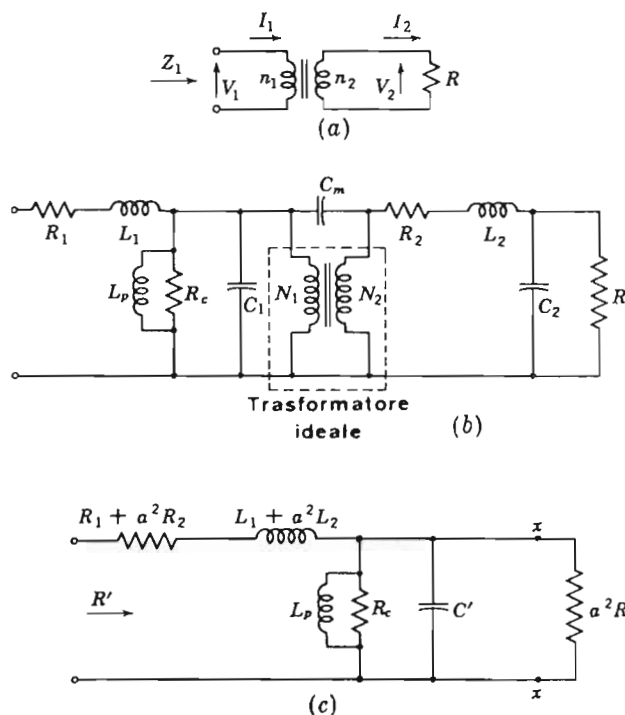



FIG. 6-3 — *a*) Trasformatore ideale. *b*) Circuito equivalente effettivo di *a*. *c*) Circuito equivalente con tutte le grandezze riferite al primario

Si osservi che l'induttanza primaria L_p abbassa l'impedenza effettiva alle basse frequenze e che a causa di L_p e R_c sarà necessario un valore del rapporto *a* superiore a quello teorico. Inoltre alle alte frequenze vi è un effetto di risonanza serie a causa dell'induttanza di dispersione e della capacità C'.

La fig. 6-4 mostra quale sia lo scostamento, rispetto ai valori teorici, che si ha in pratica nei trasformatori d'uscita.

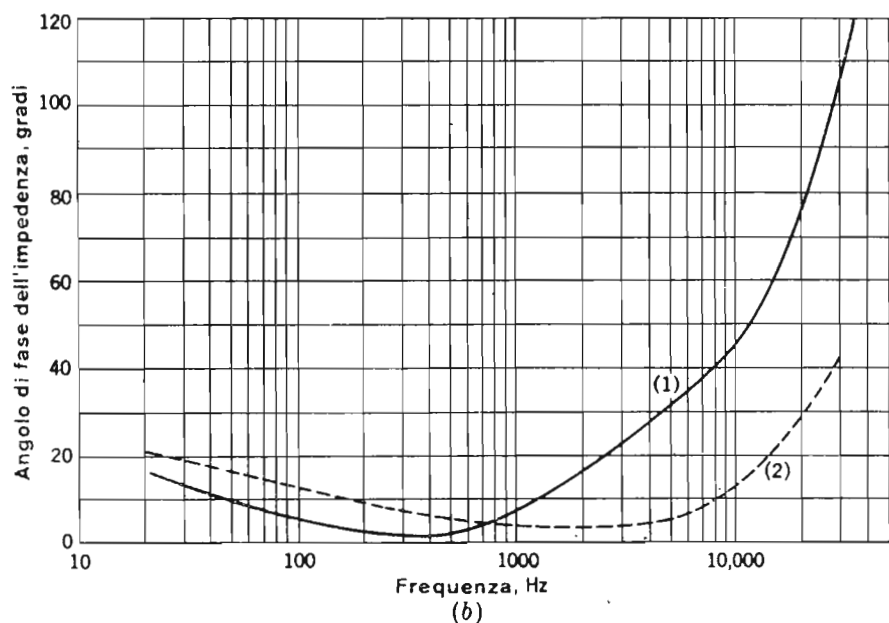
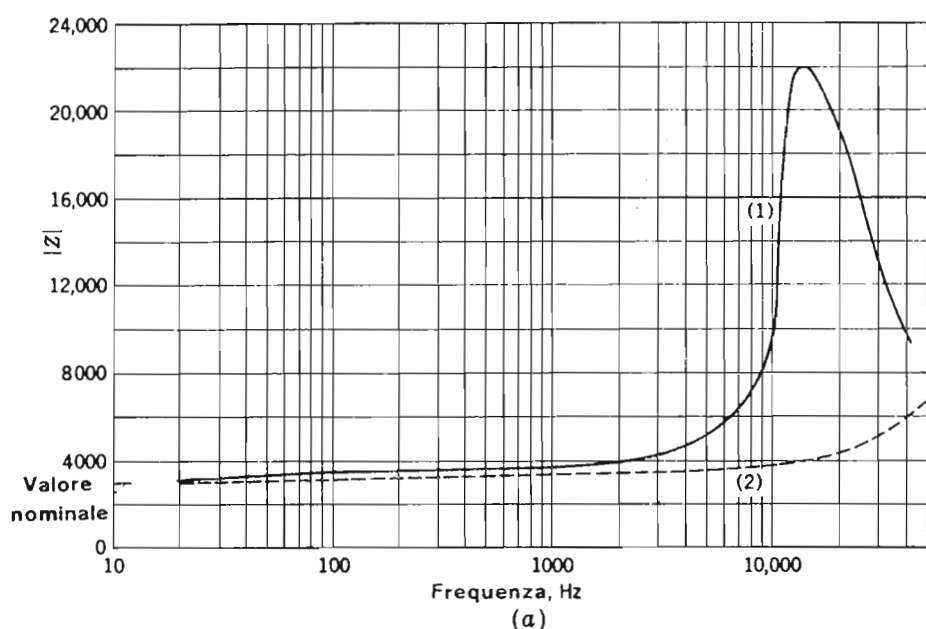



FIG. 6-4 — *a*) Andamento del modulo della impedenza di ingresso *a*; (1) un trasformatore da 8 watt di basso costo, con rapporto di trasformazione 3000/8, che lavora alla potenza di un watt; (2) un trasformatore da 15 watt di elevata qualità con rapporto di trasformazione 3000/60, sempre ad una potenza di 1 watt. *b*) Andamento della fase dell'impedenza di (1) e (2).

Le impedenze riflesse hanno normalmente il valore previsto fino a frequenze dell'ordine di 5.000 Hz, dove le unità a basso costo presentano un notevole effetto di risonanza. La reattanza di dispersione diventa non trascurabile a frequenze superiori a 5.000 Hz per le piccole unità e superiori a 10.000 Hz per i trasformatori più grandi, il chè indica una maggiore accuratezza nel progetto di questi ultimi.

Il rendimento dei trasformatori è compreso tra il 50 e l'80 per cento e le perdite alterano il valore del carico riflesso rispetto a quello calcolato in base al rapporto di trasformazione ideale. Il carico R' comprende a^2R e una resistenza parallelo che rappresenta le perdite, come si vede in fig. 6-5. L'effettivo rapporto di spire che è allora richiesto perchè si abbia un dato carico R' al primario è:

$$a = \sqrt{\frac{R'}{\eta R}} \tag{6-4}$$

dove η è il rendimento del trasformatore.

Come nel caso degli amplificatori RC, si possono impiegare delle onde rettangolari per avere indicazioni sulle prestazioni di un trasformatore di uscita. In fig. 6-6 è riportata la risposta ad una onda quadra del trasformatore di maggior potenza di fig. 6-4, per una uscita di un watt.

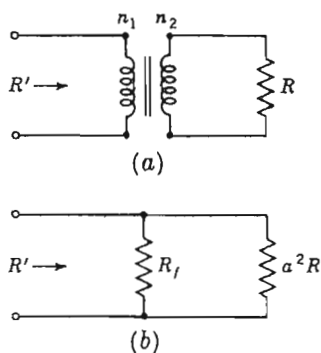



FIG. 6-5 — *a*) Trasformatore ideale *b*) Circuito equivalente per un rapporto *a* e un rendimento n

La distorsione in corrispondenza del massimo dell'onda quadra indica un'insufficiente costante di tempo serie, e cioè un'induttanza primaria piccola.

La distorsione di fig. 6-6*d* ed *e* è dovuta alla risonanza tra la reattanza di dispersione e le capacità del trasformatore. L'unità di maggior costo risponde in generale in una maniera soddisfacente, anche se non ideale.

La notevole variazione dell'angolo di fase alle frequenze prossime a quella di risonanza, in alta frequenza, crea dei problemi di stabilità, quando si pongono i trasformatori all'interno di reti di reazione; d'altra parte trasformatori la cui frequenza di risonanza cada molto al di là della frequenza

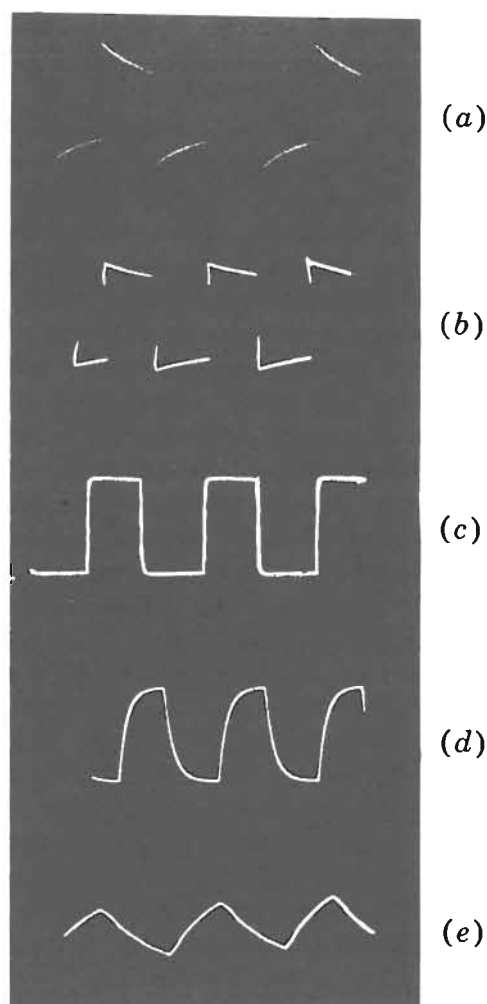



FIG. 6-6 — Risposta ad un'onda quadra di tensione del trasformatore (2) di fig. 6-4. *a*) 20 Hz, *b*) 100 Hz, *c*) 1000 Hz, *d*) 10000 Hz, *e*) 20000 Hz.

limite di banda sono molto costosi. Alla luce di queste difficoltà si giustifica il frequente impiego di alcuni circuiti a transistori che evitano il trasformatore d'uscita. Per i circuiti a tubi, a causa della notevole differenza, tra i valori di

carico desiderati e quelli effettivi, l'adattamento è possibile solo con un trasformatore; rimane dunque, per tali circuiti, il problema della stabilità.

6-3. Relazioni tra le potenze in gioco per la classe A.

Per ragioni di economia, di solito, si desidera ottenere la maggiore potenza in uscita da un dato tubo o transistore, compatibilmente con la dissipazione interna e la distorsione tollerabile nel segnale di uscita. La potenza in uscita dipende dalla scelta del punto Q ed è inoltre limitata dalla massima tensione ammissibile di collettore o anodica. Per i transistori, la tensione di collettore non può raggiungere valori troppo elevati perchè può verificarsi l'effetto valanga o la perforazione della base. Quest'ultimo fenomeno dipende dal fatto che una eccessiva tensione annulla la larghezza della regione di base, come si può vedere dalle eq. (2-32) o (2-34). Per i tubi, la massima tensione anodica è determinata dall'isolamento interno. Anche la distorsione dipende dalla posizione del punto Q e dalla scelta della impedenza di carico. L'impedenza di uscita più adatta è di norma scelta sperimentalmente, integrando le misure della potenza in uscita con misure di ampiezza delle varie armoniche.

Si possono adottare dei metodi grafici per prevedere le condizioni di funzionamento; questi metodi verranno impiegati anche in questo capitolo per ottenere ulteriori informazioni sul funzionamento in classe A.

La sorgente continua applicata ad un dispositivo amplificatore, sia esso un transistore o un tubo, deve fornire la potenza alternativa del segnale in in uscita, la potenza continua dissipata nel circuito e nel trasformatore di uscita, nonché quella dissipata nel dispositivo attivo per vincere la sua resistenza interna o per accelerare le cariche nel vuoto, come nel caso dei tubi.

Nel transistore questa potenza viene dissipata principalmente sul collettore, ed è data da $E_{cE}I_c$. Per valori elevati della corrente, quando la tensione di collettore è bassa, anche le perdite nella resistenza di emettitore possono contribuire al riscaldamento del componente. Il transistore ha di norma una piccola costante di tempo termica sicché la sua temperatura di giunzione dipende dal valore istantaneo della corrente.

Nei tubi, la potenza ceduta all'anodo e allo schermo deve essere dissipata per irraggiamento e conduzione; benché le temperature interne possano essere anche elevate, non debbono mai raggiungere valori tali da liberare i gas occlusi negli elettrodi interni.

È importante conoscere le perdite complessive: per il circuito di uscita si ha:

$$\text{Potenza di alimentazione} = \text{potenza in uscita} + \text{perdite}$$

$$E_{dc}I_{dc} = I_{ac}^2R' + \text{perdite} \qquad (6\text{-}5)$$

La potenza di alimentazione in presenza di segnale può essere indicata con $E_{cE} I_{cs}$ per un transistore e con $E_{bb} I_{bs}$ per un tubo a vuoto. Nel caso del transistore, si ha:

$$\text{Perdite} = E_{CE}I_{CS} + I_{CS}^2 R_{dc} - I_{ac}^2 R'$$

dove R_{dc} è la resistenza in continua, di solito quella del primario del trasformatore e del resistore di polarizzazione. Trascurando queste perdite esterne, la perdita interna al dispositivo, cioè la dissipazione che in esso si ha è data da:

$$\text{Dissipazione di collettore} = P_d = E_{CE}I_{CS} - I_{ac}^2 R' \quad \text{watt} \qquad (6\text{-}6)$$

Le perdite, o la dissipazione nel dispositivo, sono date quindi dalla potenza di alimentazione meno quella di uscita; nel funzionamento in classe A, le perdite interne sono più piccole in presenza di segnale di uscita che nel funzionamento al punto Q. Il progetto del circuito e la scelta del transistore nel funzionamento in classe A vanno perciò effettuati in base alla condizione di riposo che è la condizione di massima dissipazione. È di solito necessaria una certa stabilizzazione di corrente nel punto di riposo per evitare la distruzione del dispositivo per effetto termico; inoltre particolare cura va posta nel montaggio del transistore sul supporto e nel raffreddamento dello stesso.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per le perdite in un tubo a vuoto, in cui si ha:

$$\text{Dissipazione anodica} = P_d = E_b I_{bs} - I_p^2 R' \quad \text{watt} \qquad (6\text{-}7)$$

Una prima determinazione della potenza ottenibile in uscita può essere effettuata in base alle caratteristiche di collettore tracciando la retta di carico; questa tecnica è stata esaminata nel Cap. 1 per i tubi; essa è analogamente applicabile ai transistori.

Come primo passo nella determinazione delle condizioni di funzionamento più adatte, bisogna tracciare la curva di massima dissipazione ammissibile sulle caratteristiche di collettore: linea tratteggiata nelle fig. 6-7 e 6-8. Questo luogo può essere tracciato per punti in base alla relazione:

$$E_{CE}I_C = P_d = \text{massima potenza dissipabile} \qquad (6\text{-}8)$$

Ogni retta di carico che porti il punto Q sull'iperbole o sotto di questa, darà luogo a perdite uguali o minori al massimo valore ammissibile e pertanto il dispositivo sarà in condizione di sicurezza. Se si desidera una grande potenza in uscita si deve raggiungere il valore della massima tensione di collettore o anodica ammissibile; questa tensione è individuata dall'intercetta della retta di carico in regime dinamico, tangente alla curva di massima dissipazione. D'altra parte il coefficiènte angolare della retta di carico

rappresenta l'inverso della resistenza di carico cambiata di segno, e quindi, come altro metodo per tracciare la retta di carico, si può far passare per un determinato punto Q una retta di pendenza data. Questo ultimo metodo è stato impiegato nel caso del tetrodo di fig. 6-8.

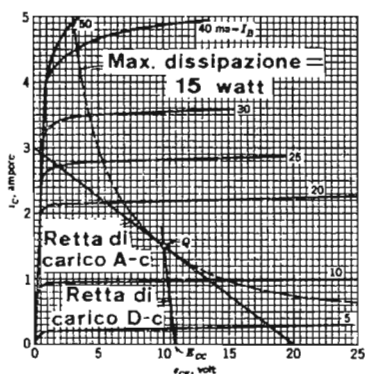



FIG. 6-7 — Soluzione grafica delle condizioni di funzionamento del transistore.

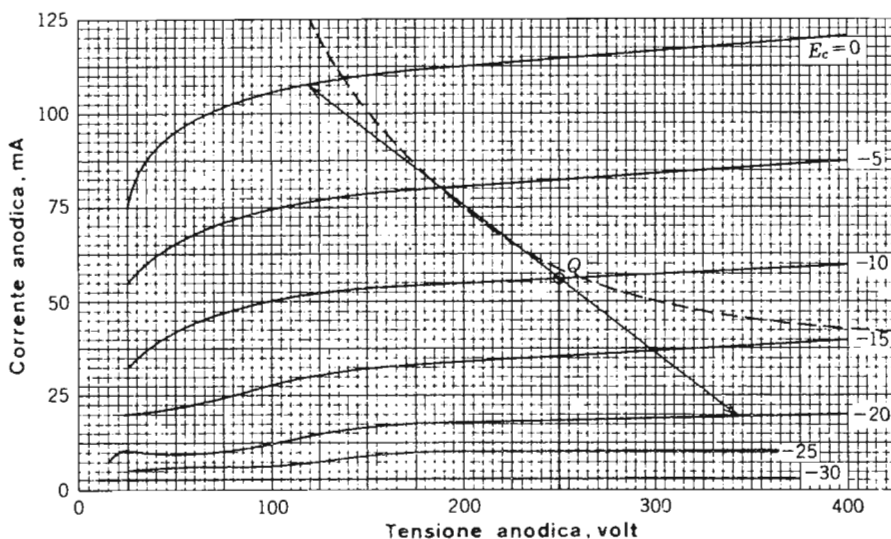



FIG. 6-8 — Caratteristiche e retta di carico per il tetrodo a fascio; P_d = 15 watt.

Il transistore di fig. 6-7 ha una tensione massima di collettore di 20 volt, e la dissipazione di collettore ammissibile è di 15 watt alla temperatura di lavoro di 80°C. Si è tracciata una retta di carico di tentativo con 20 volt come intercetta sulle ascisse; nel punto di tangenza alla curva di massima dissipa-

zione si ha un possibile punto Q, con $I_c = 1{,}5\ A$, $E_{cc} = 10$ volt, e una dissipazione, nel punto Q, pari al massimo valore ammissibile di 15 watt. L'ampiezza del segnale può ora essere scelta arbitrariamente, ma si possono avere variazioni simmetriche positive e negative fino a $i_b = 25$ mA e 5 mA rispettivamente; se il segnale porta il punto di lavoro oltre questi limiti sulla retta di funzionamento, aumenta la distorsione a causa dell'avvicinamento alla regione di saturazione nel picco positivo e alla zona di interdizione nel picco negativo del segnale di ingresso.

Il valore di questa resistenza di carico di tentativo è dato dall'inverso della pendenza della retta di carico. Dalle intercette sugli assi si ha:

$$R' = {}^{20}/_{3} = 6{,}7 \text{ ohm}$$

Il resistore di polarizzazione potrà essere di circa 0,5 ohm e il trasformatore potrà avere una resistenza in continua all'incirca uguale.

Di conseguenza si è tracciata una retta di carico in continua per $R_{dc} = 1$ ohm, dalla quale si vede che è necessaria una tensione E_{cc} di 11,5 volt (in pratica 12 volt).

Se il valore picco-picco del segnale sinusoidale di ingresso è tale da portare la corrente di base a un valore massimo di 25 mA e ad un minimo di 5 mA, si ha una variazione della corrente di uscita, ricavata dalla retta di carico, da 2,7 a 0,3 ampere. Supponendo trascurabile la distorsione, la potenza in uscita è:

$$P_o = \left(\frac{i_{max} - i_{min}}{2\sqrt{2}}\right)^2 R' = \frac{(2{,}4)^2}{8} \times 6{,}7 = 4{,}8 \text{ watt}$$

La potenza fornita al circuito di collettore è data da:

$$E_{cc}I_c = 11{,}5 \times 1{,}5 = 17{,}3 \text{ watt}$$

Il rendimento di potenza è quindi:

$$\eta = \frac{P_o}{P_{in}} = 0{,}28 \quad \text{o} \quad 28\%$$

Un metodo analogo può essere impiegato per il tetrodo di fig. 6-8; per questo tubo la massima dissipazione ammissibile è di 16 watt ed è stato fissato come carico 5.000 ohm; la tensione anodica inoltre deve essere minore di 400 volt.

Come nel caso precedente, per limitare la distorsione la griglia non deve essere portata a valori di tensione superiori a $E_{cc} = 0$, e non si deve far lavorare il tubo vicino all'interdizione, ossia al di sotto del valore $E_c = -20$ volt. Va quindi fissato per l'ingresso un segnale simmetrico di ± 10 volt di picco.

La maggior parte dei circuiti di carico sono progettati in modo da essere resistivi, o possono essere resi tali, tuttavia il trasformatore d'uscita alle frequenze limiti di banda può introdurre delle reattanze. Per la presenza di un certo angolo di fase tra corrente e tensione la curva di funzionamento non sarà in generale una retta ma un'ellisse, riducendosi ad un cerchio nel caso di una pura reattanza. Questa curva di carico reattiva potrebbe portare il tubo a funzionare in regioni non lineari delle caratteristiche, pertanto i carichi reattivi vanno evitati.

6-4. Determinazione della distorsione di ampiezza.

La distorsione di ampiezza, o distorsione armonica, all'uscita di un amplificatore è di solito indesiderabile; è importante quindi, durante il progetto di un amplificatore, determinare l'entità di questa distorsione nelle varie condizioni di funzionamento. Si può analizzare il contenuto di armoniche delle forme d'onda distorte mediante delle relazioni che legano tra loro le ampiezze di alcune ordinate prefissate. Una caratteristica mutua dinamica come quella riportata in fig. 6-9 dà un legame tra ingresso e uscita e può quindi fornire i dati per il calcolo senza che si debbano tracciare le effettive forme d'onda.

Negli amplificatori a transistori, la distorsione è funzione delle impedenze e delle relazioni tensione-corrente sia del circuito di ingresso che di uscita, perciò saranno necessarie ulteriori considerazioni per comprendere in che modo si debbano ottenere le relazioni relative alle ordinate prescelte. Per i tubi a vuoto, nel funzionamento in classe A con tensioni di griglia negative, non vi è corrente di griglia e si avrà distorsione solo nel circuito anodico. I valori delle ordinate richiesti per il calcolo della distorsione possono quindi essere ricavati direttamente dalla retta di carico.

Per analizzare quantitativamente il problema, supponiamo che la caratteristica dinamica sia descritta da una serie di Taylor, scritta nell'intorno di un dato punto Q di funzionamento e cioè:

$$i_0 = a_0 + a_1 e_i + a_2 e_i^2 + a_3 e_i^3 + a_4 e_i^4 + \dots \qquad (6\text{-}9)$$

Per successive differenziazioni si ricavano i valori dei coefficienti che valgono:

$$a_1 = \frac{\partial i_o}{\partial e_i} = g_d$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 i_o}{\partial e_i^2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial g_d}{\partial e_i}$$

$$a^3 = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 i_o}{\partial e_i^3} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^2 g_d}{\partial e_i^2}$$

e così via. Quindi a_1 è uguale alla tangente g_d alla caratteristica dinamica, e a_2 è proporzionale alla variazione della tangente; arrestandosi ai primi due termini la caratteristica dinamica viene approssimata ad una linea retta; arrestandosi ai primi tre termini, la caratteristica dinamica viene approssimata ad una retta più una parabola.

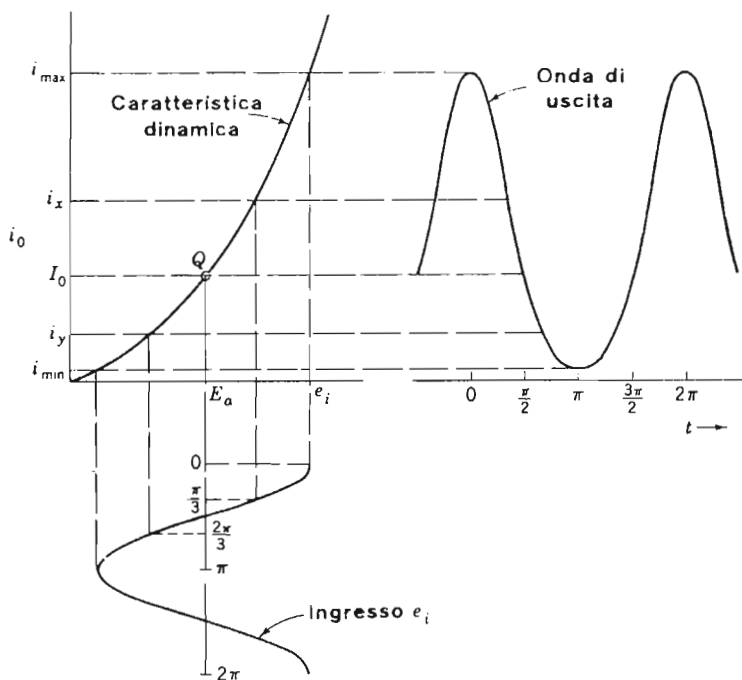



FIG. 6-9. — Utilizzazione della caratteristica di trasferimento dinamica per ricavare la forma d'onda in uscita da un transistore.

Si può ottenere una approssimazione della curva spinta quanto si vuole arrestandosi ai termini della serie di ordine superiore. Poiché le caratteristiche mutue dei dispositivi effettivi non sono curve di ordine elevato, i coefficienti di ordine più alto del terzo sono di solito trascurabili.

Se si applica all'ingresso un segnale del tipo:

$$e_i = E_{im} \cos \omega t \tag{6-10}$$

si ha:

$$i_o = a_0 + a_1 E_{im} \cos \omega t + a_2 E_{im}^2 \cos^2 \omega t + a_3 E_{im}^3 \cos^3 \omega t + a_4 E_{im}^4 \cos^4 \omega t + \ldots \tag{6-11}$$

Facendo uso delle identità trigonometriche tra angoli multipli, e combinando tra loro i coefficienti dei termini simili, si ottiene:

$$i_0 = a_0 + A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + A_4 \cos 4\omega t + \dots \quad (6\text{-}12)$$

Dalla eq. (6-9) e dalla fig. 6-9 si può vedere che per $e_i = 0$, $a_0 = i_0 = I_0$, cioè a_0 rappresenta il valore della corrente nel punto Q. Approfondendo quest'analisi ulteriormente si può vedere che nell'equazione (6-12) compare la frequenza originaria $\cos \omega t$, ma vi è anche una componente continua addizionale A_0 e delle frequenze più elevate che non erano presenti nell'ingresso, e che sono state introdotte dalla non linearità della caratteristica di trasferimento.

I valori dei cinque coefficienti dell'eq. (6-12) possono essere determinati prendendo cinque ordinate di corrente sulla curva di trasferimento (o sulla retta di carico del tubo, come in fig. 6-10) per cinque istanti di tempo ugualmente distanziati tra loro sulla elongazione positiva e negativa della tensione di griglia. Questi punti sono individuati lungo l'asse delle ordinate nelle figg. 6-9 e 6-10 dai valori I_{max} quando la tensione d'ingresso è al suo massimo positivo per $\omega t = 0$, I_x quando la tensione di ingresso è a metà del suo valore massimo per $\omega t = \frac{\pi}{3}$, I_0 quando la tensione di ingresso è zero per $\omega t = \frac{\pi}{2}$, I_y quando la tensione di ingresso è a metà del suo valore negativo massimo per $\omega t = \frac{2\pi}{3}$, e I_{min} quando la tensione di ingresso è al suo massimo negativo per $\omega t = \pi$.

Sostituendo i valori di queste ordinate nell'eq. (6-12) si hanno cinque relazioni:

$$\begin{aligned}
\omega t = 0: &\quad i_{max} = I_0 + A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
\omega t = \frac{\pi}{3}: &\quad i_x = I_0 + A_0 + \tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2 - A_3 - \tfrac{1}{2}A_4 \\
\omega t = \frac{\pi}{2}: &\quad i_0 = I_0 + A_0 - A_2 + A_4 \\
\omega t = \frac{2\pi}{3}: &\quad i_y = I_0 + A_0 - \tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2 + A_3 - \tfrac{1}{2}A_4 \\
\omega t = \pi: &\quad i_{min} = I_0 + A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4
\end{aligned} \quad (6\text{-}13)$$

La soluzione di queste cinque equazioni dà le espressioni delle ampiezze delle componenti armoniche:

$$A_0 = \frac{i_{max} + i_{min} + 2(i_x + i_y)}{6} - I_0 \quad (6\text{-}14)$$

$$A_1 = \frac{i_{max} - i_{min} + i_x - i_y}{3} \quad (6\text{-}15)$$

$$A_2 = \frac{i_{max} + i_{min} - 2I_0}{4} \quad (6\text{-}16)$$

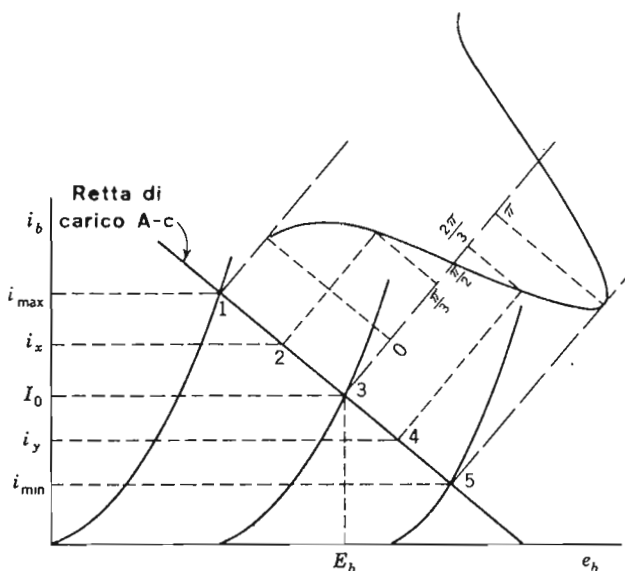
$$A_3 = \frac{i_{max} - i_{min} - 2(i_x - i_y)}{6} \qquad (6\text{-}17)$$

$$A_4 = \frac{i_{max} + i_{min} - 4(i_x + i_y) + 6I_0}{12} \qquad (6\text{-}18)$$

Il valore medio della corrente in uscita in presenza di segnale è $I_{0s}(I_{cs}, I_{bs})$, che è dato dal valore di riposo I_0 più il contributo di A_0:

$$I_{0s} = \frac{i_{max} + i_{min} + 2(i_x + i_y)}{6} \qquad (6\text{-}19)$$

Questo risultato indica che la corrente continua di alimentazione varia col segnale in condizione di non linearità; questo può implicare un aumento della dissipazione di collettore o anodica per grandi segnali di ingresso. Nell'analisi dell'amplificatore in classe B si esamineranno i metodi per determinare questo aumento di dissipazione.

FIG. 6-10 — Calcolo della distorsione con la retta di carico.

La percentuale delle varie armoniche può essere definita come rapporto delle ampiezze delle varie componenti rispetto a quella della fondamentale, ossia:

$$D_2 = \frac{A_2}{A_1} \times 100\% \qquad D_3 = \frac{A_3}{A_1} \times 100\% \qquad \text{ecc.}$$

La distorsione armonica totale è il rapporto del valore efficace di tutte le armoniche rispetto a quello della fondamentale, cioè:

$$D = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + \ldots} \qquad (6\text{-}20)$$

Se in un amplificatore a transistore si elimina la distorsione del circuito di ingresso con un segnale ottenuto da un generatore di corrente ideale, la determinazione della distorsione per un amplificatore a emettitore comune e per un tetrodo si effettua allo stesso modo impiegando la retta di carico. Il procedimento può essere spiegato con un esempio.

Esempio — *Calcolare le ampiezze della fondamentale e delle armoniche per il tetrodo di fig.* 6-8, *con* $E_{bb} = 250$ *volt*, $E_{cc} = -10$ *volt*, $R' = 2500$ *ohm*, $R_{dc} = 0$, *e con una tensione di ingresso sinusoidale di ampiezza* 10 *volt.*

La retta di carico in continua è verticale e passa per $E_{bb} = 250$ *volt, e il punto Q si trova all'intersezione della retta di carico con la caratteristica a* $E_c = -10$ *volt. Le ordinate corrispondenti ai punti della retta di carico di nostro interesse sono*:

$i_{max} = 107{,}5$ mA $\qquad i_x = 80{,}0$ mA per $E_c = -5$ volt

$i_{min} = 19{,}0$ mA $\qquad i_y = 37{,}0$ mA per $E_c = -15$ volt

$I_b = 56$ mA

Quindi:

$$A_0 = 4{,}1 \text{ mA}$$
$$A_1 = 43{,}8 \text{ mA}$$
$$A_2 = 3{,}6 \text{ mA}$$
$$A_3 = 0{,}45 \text{ mA}$$
$$A_4 = -0{,}5 \text{ mA}$$

La distorsione armonica è allora:

$$D_2 = \frac{3{,}6}{43{,}8} \times 100\% = 8{,}2\%$$
$$D_3 = 1{,}0\%$$
$$D_4 = 1{,}1\%$$
$$D = \sqrt{(8{,}2)^2 + (1{,}0)^2 + (1{,}1)^2} = 8{,}3\%$$

6-5. Distorsione di intermodulazione.

Quando si applicano dei segnali aventi numerose componenti sinusoidali ad un amplificatore con caratteristica dinamica non lineare, si ha un altro tipo di distorsione detto di *intermodulazione*. Questo tipo di distorsione è indesiderabile perché le frequenze addizionali create non sono delle armoniche delle frequenze contenute nel segnale e ne risulta un rumore di fondo in uscita.

Una semplice analisi del fenomeno indica il tipo di uscita che è da attendersi. Supponiamo che un segnale del tipo:

$$e_i = E_a \cos \omega_a t + E_b \cos \omega_b t \qquad (6\text{-}21)$$

sia applicato ad un amplificatore che ha una caratteristica dinamica non lineare data da:

$$i = I_0 + a_1 e_i + a_2 e_i^2$$

la corrente di uscita sarà data da:

$$i = I_0 + a_1(E_a \cos \omega_a t + E_b \cos \omega_b t) + a_2(E_a \cos \omega_a t + E_b \cos \omega_b t)^2 \qquad (6\text{-}22)$$

Sviluppando e tenendo conto delle relazioni:

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2x$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos (x + y) + \cos (x - y)]$$

l'eq. (6-22) può essere scritta:

$$i_o = I_0 + \frac{a_2}{2}\left(E_a^2 + E_b^2\right) + a_1 E_a \cos \omega_a t + a_1 E_b \cos \omega_b t$$
$$+ a_2 E_a E_b [\cos(\omega_a + \omega_b)t + \cos (\omega_a - \omega_b)t]$$
$$+ \frac{a_2 E_a^2}{2} \cos 2\omega_a t + \frac{a_2 E_b^2}{2} \cos 2\omega_b t \qquad (6\text{-}23)$$

Sono quindi presenti in uscita oltre le frequenze originarie del segnale di ingresso, anche dei termini le cui frequenze rappresentano la somma e la differenza delle frequenze di ingresso; questi sono i *termini dovuti alla distorsione di intermodulazione*; sono anche presenti le seconde armoniche delle frequenze di ingresso che rappresentano i normali termini della distorsione di ampiezza.

Un maggior numero di frequenze di ingresso e dei termini di ordine superiore nello sviluppo in serie della caratteristica di trasferimento avrebbero prodotto un insieme più complesso delle frequenze d'uscita; tuttavia l'esempio precedente è abbastanza indicativo. Si noti che i termini di intermodulazione contengono il coefficiente a_2 e sono quindi presenti a causa della non linearità della caratteristica dinamica. Questi termini di distorsione sono di solito piccoli ma possono essere evidenziati esaminando l'uscita con un analizzatore d'onda.

6-6. Analisi grafica dell'amplificatore di potenza in classe A ad emettitore comune.

È ora possibile iniziare una analisi completa della potenza in uscita e della distorsione dell'amplificatore a transistore ad emettitore comune.

Il transistore, le cui caratteristiche sono riportate in fig. 6-11, ha una dissipazione ammissibile di collettore di 25 watt alla temperatura ambiente di 25°C e una tensione massima di collettore di 60 volt. L'iperbole di massima

dissipazione, che può essere facilmente tracciata, è riportata insieme ad una retta di carico (1), disegnata a tratto intero, che intercetta l'asse delle ascisse a $e_c = 60$ volt. Questa retta è tangente alla iperbole nel punto corrispondente ad una corrente di collettore di 0,87 A e ad una tensione $e_c = 28$ volt; dalle sue intercette con gli assi si ricava che il valore corrispondente della resistenza di carico è di 36 ohm.

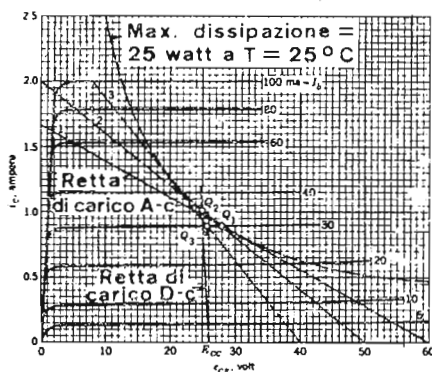



FIG. 6-11 — Determinazione grafica delle condizioni di funzionamento in classe A.

Per esaminare gli effetti di una variazione del carico, si sono tracciate anche le rette di carico (2) e (3), con intercette sull'asse delle ascisse rispettivamente a $e_c = 50$ volt e $e_c = 40$ volt, corrispondenti a resistenze di carico $R' = 25$ ohm e $R' = 16$ ohm.

È necessario conoscere le caratteristiche di trasferimento sia del circuito di ingresso che di quello di uscita per effettuare l'analisi della distorsione ed il calcolo della potenza.

Nel quadrante superiore della fig. 6-12 è riportata a tratto continuo la caratteristica di trasferimento del circuito di uscita, che lega i_c a i_B, per il carico (1). I punti della caratteristica di trasferimento sono determinati dalle coppie di valori i_c e i_B corrispondenti alle intersezioni della retta di carico con le varie caratteristiche a $i_B =$ cost della fig. 6-11. La seconda caratteristica di trasferimento lega e_{BC} a i_B nel circuito di ingresso; essa è riportata a tratto continuo nel quadrante inferiore della fig. 6-12 e si ricava dalle caratteristiche di ingresso del transistore in esame. La curva ha il tipico andamento esponenziale dovuto al diodo emettitore-base direttamente polarizzato con sovrapposta la caduta resistiva dovuta a r_b e r'_b. Questa caratteristica di ingresso è praticamente indipendente dalle condizioni del circuito di collettore.

A causa dell'uniformità delle caratteristiche di collettore, si ha che una

variazione della retta di carico altera la caratteristica di trasferimento del circuito di uscita solamente nella sua parte superiore, perché ci si avvicina alla zona di saturazione del circuito di collettore. In fig. 6-12 sono riportate, a linea tratteggiata, le curve di trasferimento corrispondenti alle rette di carico (2) e (3).

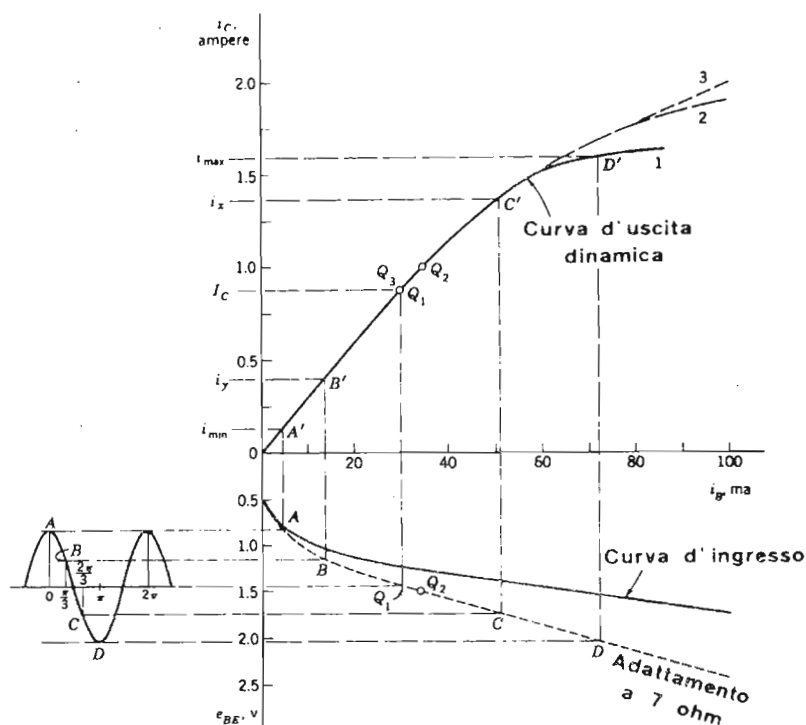



FIG. 6-12 — Calcolo della distorsione per un amplificatore di potenza a transistore in classe A

Si può notare dalla retta di carico o dalla caratteristica di trasferimento di uscita che l'amplificazione di corrente diminuisce all'aumentare della corrente di collettore. Ciò dipende dall'aumento della *larghezza di base* alle basse tensioni di collettore e dalla diminuzione del *rendimento di emettitore* alle forti correnti. Per la retta di carico (1) è necessario evitare la probabile distorsione nella zona delle correnti di base prossime all'interdizione; si può fissare arbitrariamente un valore minimo $i_B = 5$ mA, che corrisponde il punto A sulla caratteristica di trasferimento di ingresso. D'altra parte la corrente di collettore non può superare il valore di 1,6 A per la retta di carico (1), a causa della saturazione di collettore. Sembra logico quindi scegliere come punto Q il punto a $i_c = 0{,}87$ A, $e_c = 28$ volt

che è all'incirca a metà del segmento determinato sulla retta di carico dai limiti precedentemente considerati.

L'amplificatore che pilota il circuito di ingresso deve essere chiuso su di una impedenza finita per poter fornire un guadagno di potenza; dal punto di vista del trasferimento di potenza è utile l'adattamento del circuito di ingresso. Nel nostro caso si vede che la parte lineare della caratteristica di trasferimento di ingresso ha una pendenza corrispondente ad una resistenza di 7 ohm; si è riportata quindi nel quadrante in basso la curva dinamica, a linea tratteggiata, per una resistenza interna del generatore di segnale pari a 7 ohm. In questo modo si è anche migliorata la linearità del circuito di ingresso.

La massima elongazione positiva della tensione di ingresso per la retta di carico (1) è fissata dalla differenza di tensione tra A e Q_1, e cioè 0,6 volt di picco. Il massimo valore negativo dell'onda sinusoidale è anche esso 0,6 volt e porta il punto di funzionamento al punto D della curva di trasferimento. La polarizzazione di base deve essere quindi di 1,45 volt. Con B e C si sono indicati i punti corrispondenti ad un valore della tensione di ingresso metà di quello massimo; i punti A, B, Q_1, C e D sono stati riportati sulla caratteristica di trasferimento di uscita ed infine sull'asse i_c, fornendo così i valori di i_{max}, i_{min}, i_x, i_y e I_c, necessari per il calcolo della potenza d'uscita e della distorsione. I valori ricavati dalle caratteristiche per la retta di carico (1) sono stati riportati nella tabella 11. Si è trovato così, facendo uso delle relazioni che forniscono la distorsione, un valore della distorsione totale del 10,1%.

Il segnale di ingresso ha un valore efficace di $0,6/\sqrt{2} = 0,42$ volt, e la potenza fornita dal generatore al circuito di ingresso supposto adattato è:

$$P_i = \frac{0,42^2}{4 \times 7} = 0,0064 \text{ watt} = 6,4 \text{ mw}$$

La potenza in uscita relativa alla fondamentale su un carico di 36 ohm è:

$$P_o = 0,57^2 \times 36 = 11,7 \text{ watt}$$

quindi il guadagno di potenza è:

$$G_p = \frac{11,7}{0,0064} = 1830 \qquad (G_p)\text{db} = 32,6 \text{ db}$$

Per le rette di carico (2) e (3) i punti di riposo Q_2 e Q_3 possono essere posti rispettivamente a $i_B = 1,0$ A e $i_B = 0,87$ A; di conseguenza la polarizzazione di base va fissata rispettivamente a 1,5 e 1,45 V. La retta di carico (2) rappresenta una resistenza di carico di 25 ohm e la retta (3) una resistenza di 16 ohm. Per la retta di carico (2) è stata aumentata la tensione di ingresso

TABELLA 11

VALORI RICAVATI DALLE RETTE DI CARICO DI FIG. 6-11

	(1)	(2)	(3)
Carico, ohm	36	25	16
ingresso tensione di picco, volt	0,6	0,8	0,9
polarizzazione, volt	1,45	1,5	1,45
i_{max}, ampere	1,60	1,85	1,95
i_{min}, ampere	0,15	0,05	0,0
i_x, ampere	1,37	1,55	1,55
i_y, ampere	0,40	0,35	0,25
I_c, ampere	0,87	1,00	0,87
I_1, ampere, valore efficace	0,57	0,71	0,76
D_2, %	0,3	2,5	4,6
D_3, %	10	10	10
D_4, %	1,2	2,5	2,3
D totale, %	10,1	10,6	11,2
segnale d'ingresso, watt	0,0064	0,0116	0,015
potenza di uscita, watt	11,7	12,5	9,25
guadagno di potenza, db	32,6	30,3	28,4

per sfruttare meglio la caratteristica dinamica; nel caso della retta di carico (3) si è aumentato ulteriormente il segnale di ingresso fino a portare i_B all'interdizione. Dalle caratteristiche di trasferimento corrispondenti si sono ricavati i diversi valori delle correnti riportati in tabella 11. In questa sono anche riportati i valori della distorsione e della potenza in uscita; si può vedere che la terza armonica presenta un valore elevato; essa è dovuta allo schiacciamento di una parte della sinusoide nel circuito di ingresso ed allo schiacciamento dell'altra parte a causa della saturazione in uscita. Questa distorsione di armonica dispari diminuisce se si riduce l'ampiezza del segnale in ingresso.

Ne risulta quindi che la distorsione dipende più dalla scelta del transistore che dal carico, il ché è in contrasto con le considerazioni che saranno fatte nel caso del pentodo. Con il carico di 36 ohm si può ottenere una maggiore potenza in uscita con un segnale di ingresso più ampio, ma aumenta anche la distorsione.

Il metodo di calcolo esaminato in questo paragrafo vale in generale per qualsiasi transistore e può essere applicato anche al circuito a base comune. I risultati ottenuti nel caso in esame sono solo qualitativi poiché i vari tipi di transistori di potenza hanno caratteristiche di trasferimento che variano considerevolmente tra loro. Tuttavia si può dire, in via generale, che per ridurre il valore della distorsione al 5 per cento o anche meno, come è di solito richiesto, è necessaria una controreazione.

6-7. Determinazione grafica dei parametri di uscita di un pentodo in classe A.

Le più adatte condizioni di funzionamento per triodi, tetrodi e pentodi dipendono, come per i transistori, dalla massima dissipazione, dalla tensione di alimentazione e dalla distorsione di ampiezza tollerabile in uscita. La condizione $R' = r_p$, ossia la resistenza di carico uguale alla resistenza del tubo, fornisce la massima potenza in uscita ma dà luogo anche ad una distorsione notevole nel caso dei triodi; per questi tubi i carichi usuali hanno valori superiori a r_p da due a quattro volte; al contrario per i tetrodi ed i pentodi il carico deve essere molto minore di r_p se si vuole mantenere bassa la distorsione.

La distorsione tollerabile va stabilita in dipendenza dell'uso cui è destinato il circuito; spesso si impone un valore massimo del 5% per gli amplificatori audio.

Per il progetto va dapprima tracciata l'iperbole di massima dissipazione e su questa va posto il punto Q in corrispondenza della massima tensione anodica di lavoro; nel caso dei tubi questo limite massimo della tensione non è così critico come nel caso dei transistori.

Bisogna scegliere un valore adatto per $i_{b\,min}$, tale che il funzionamento del tubo non interessi i valori bassi della corrente anodica in corrispondenza dei quali le caratteristiche diventano non lineari. Per il funzionamento in classe A, l'altro limite della zona di funzionamento viene posto dalla caratteristica a $e_c = 0$.

Il procedimento di calcolo per un tetrodo a fascio è riportato in fig. 6-13. Dopo aver fissato il punto Q si può tracciare una prima retta di carico che intersechi la caratteristica a $e_c = 0$ presso il ginocchio

Si possono quindi tracciare altre rette di carico che incontrano la caratteristica a $e_c = 0$ sia sopra che sotto il ginocchio ed effettuare i calcoli della potenza in uscita e della distorsione per ogni retta di carico; i risultati dei calcoli, per le rette di carico di fig. 6-13 sono riportati in tabella 12 e graficamente in fig. 6-14. La curva di distorsione totale presenta un minimo, per cui è di solito ben definito il carico che per questo tipo di tubo dà luogo alla minima distorsione: per il tubo in questione, ad esem-

pio, questo carico è di circa 3.800 ohm e fornisce una potenza di uscita di 7 watt con una distorsione totale del 7%.

Il minimo della curva della distorsione totale è dovuto all'annullamento della distorsione di seconda armonica in corrispondenza di quel carico per il quale le variazioni di corrente sono simmetriche intorno al punto Q il che avviene quando:

$$\frac{i_{max} + i_{min}}{2} = I_b \qquad (6\text{-}24)$$

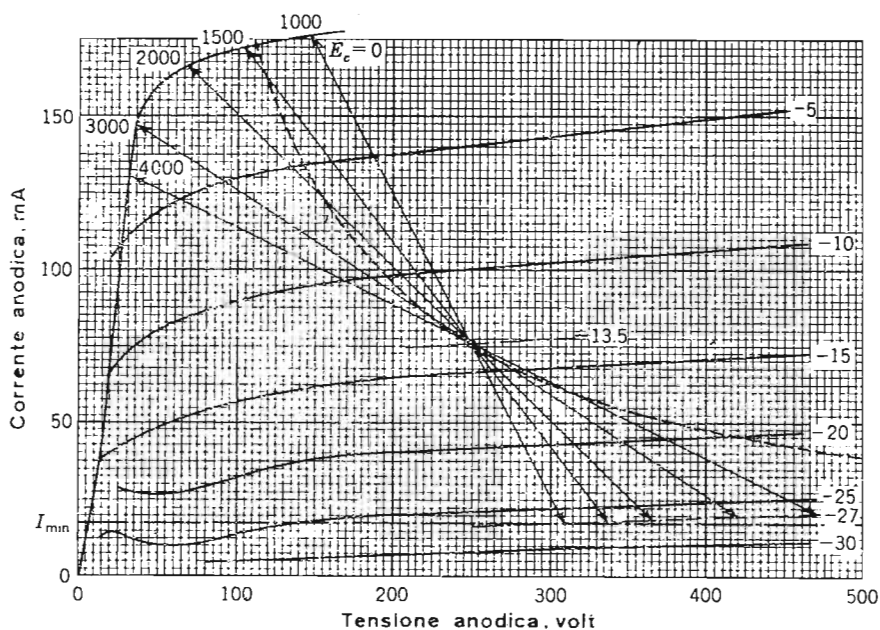



FIG. 6-13 — Rette di carico per il tetrodo 6L6; P_d = 19 watt.

TABELLA 12

DETERMINAZIONE DEL CARICO PIÙ ADATTO PER IL TETRODO; FIG. 6-13

Carico ohm	I_{max}, *mA*	I_{min}, *mA*	I_x, *mA*	I_y, *mA*	A_1	I_p, *mA*	*P*, *watt*	D_2, %	D_3, %	D_4, %	*D totale* %
1000	176	17,5	125	42	80,5	57	3,3	13,0	—1,1	—2,0	13,2
1500	172	17,5	122	42	78,2	55	4,6	12,2	—1,2	—1,1	12,3
2000	166	18	120	43	75,0	53	5,6	10,7	—1,4	—1,3	10,9
3000	147	19	117	43	67,4	48	6,8	5,2	—5,0	—2,2	7,6
4000	131	20	113	44	60,0	42	7,2	—0,4	—7,5	—2,8	8,0

Se non è necessario limitare la distorsione in uscita, si può scegliere il carico con maggiore libertà: per il caso esaminato precedentemente, si può ottenere un leggero aumento di potenza scegliendo una resistenza maggiore di 4.000 ohm, sempre per lo stesso punto di lavoro Q. Su tale carico la variazione massima di tensione risulta 470 volt picco-picco; tale variazione potrà essere aumentata solo fino a 500 volt picco-picco come limite, per qualsiasi altro carico più elevato, con un'alimentazione anodica di 250 volt.

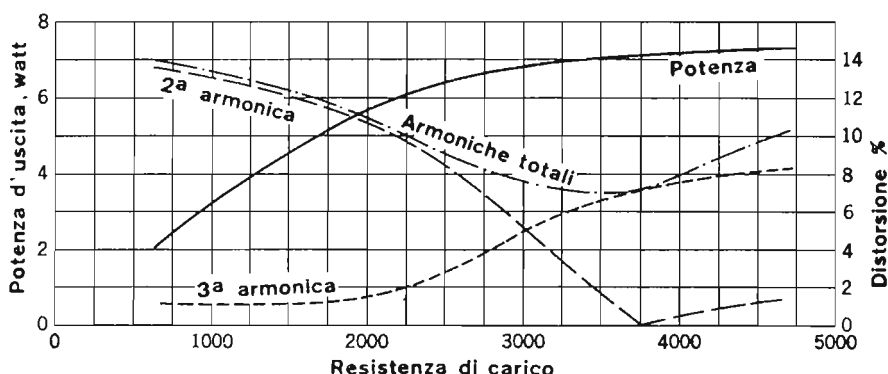



FIG. 6-14 — Potenza di uscita in funzione del carico.

Alle basse tensioni anodiche la corrente di schermo di un tetrodo cresce rapidamente; di conseguenza, impiegando delle resistenze di carico elevate, si può sovraccaricare la griglia schermo durante la parte di ciclo della tensione di ingresso cui corrisponde il minimo della tensione anodica; bisogna quindi ridurre la tensione di griglia schermo.

Per la stessa ragione non bisogna mai disinserire la tensione anodica se non si è prima disinserita la tensione di griglia schermo, altrimenti a causa della bassa dissipazione possibile di griglia schermo può avvenire che l'eccessiva corrente fonda i fili della griglia.

6-8. Limiti teorici del rendimento di potenza in classe A.

Data la notevole linearità, alle basse tensioni, delle caratteristiche sia del transistore che del tetrodo, si può supporre la famiglia di caratteristiche di uscita linearizzate come in fig. 6-15. Se il segnale di ingresso è simmetrico intorno al punto Q si ha:

$$I_{ac} = \frac{i_{max} - i_{min}}{2\sqrt{2}} \tag{6-25}$$

$$I_C = \frac{i_{max} + i_{min}}{2} \cong \frac{i_{max}}{2} \tag{6-26}$$

La potenza alternativa in uscità sarà quindi:

$$P_o = I^2_{ac}R' = \left(\frac{i_{max} - i_{min}}{2\sqrt{2}}\right)^2 R' = \frac{i^2_{max}R'}{8}\left(1 - \frac{2i_{min}}{i_{max}}\right) \qquad (6\text{-}27)$$

dove l'ultima eguaglianza è valida se $i_{min} \ll i_{max}$.

La potenza di alimentazione per un transistore è data da:

$$P_i = E_{cc}I_c \cong \frac{E_{cc}i_{max}}{2}$$

quindi il rendimento di potenza può essere scritto come:

$$\eta \cong \frac{i_{max}R'}{4E_{cc}}\left(1 - \frac{2i_{min}}{i_{max}}\right) \times 100\% \qquad (6\text{-}28)$$

Per il tetrodo si ha un'espressione identica se si pone E_{bb} al posto di E_{cc}.

Il massimo segnale possibile di ingresso sarà quello che porta la tensione anodica o di collettore praticamente a zero, e quindi il massimo valore di picco dell'uscita sarà $i_{max} R'/2 = E_{cc} = E_{BB}$.

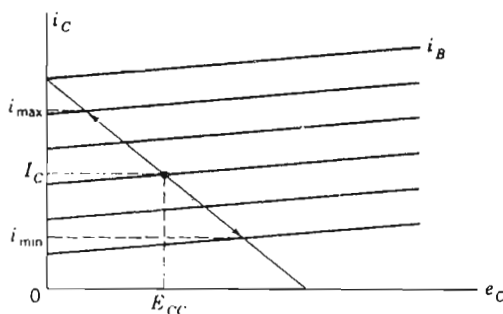



FIG. 6-15 — Caratteristiche di uscita idealizzate del transistore o del pentodo.

In queste condizioni di massima uscita, si vede dall'eq. (6-28) che il *massimo rendimento teorico di potenza per il funzionamento in classe A e del* 50 *per cento.*

In pratica molti amplificatori a transistori si avvicinano a questo limite, mentre gli amplificatori a triodi o a pentodi raramente superano il 25 per cento perchè non è possibile portare a zero il valore della minima tensione anodica senza causare una forte distorsione in uscita.

6-9. L'amplificatore in controfase.

Spesso si desidera una potenza in uscita maggiore di quella che può essere fornita da un dato transistore o tubo. Un'ovvia soluzione del problema sarebbe quella di connettere in parallelo due o più dispositivi; per i tubi ciò può essere fatto a spese di un aumento della capacità di ingresso, per i transistori è invece più difficile ottenere una ripartizione equilibrata del carico.

Nei circuiti esaminati nei paragrafi precedenti si poteva ottenere una maggiore uscita con un aumento della resistenza di carico e del segnale di ingresso, a scapito però di un aumento della distorsione di armoniche pari dovuta al funzionamento del dispositivo in prossimità dell'interdizione. Il funzionamento in controfase (*push-pull*) invece annulla le armoniche pari in uscita e permette quindi l'impiego di carichi più elevati e di segnali di pilotaggio più ampi, con un conseguente aumento del segnale di uscita. Un ulteriore vantaggio del circuito controfase è di eliminare le componenti continue della forza magnetomotrice agente nel trasformatore di uscita, evitando così la saturazione del nucleo. Ciò consente di adoperare trasformatori più piccoli e quindi più economici.

In fig. 6-16 è riportato il circuito di un amplificatore controfase. Le tensioni di ingresso e_1 ed e_2 sono eguali ed opposte, in quanto vengono fornite da un trasformatore a presa centrale.

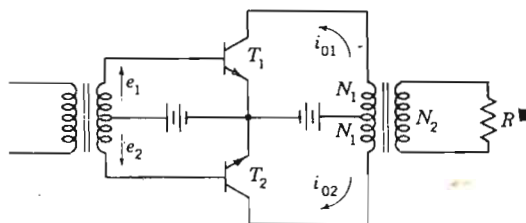



FIG. 6-16 — L'amplificatore in controfase.

Si possono impiegare molti altri circuiti che diano due tensioni uguali in ampiezza ed in opposizione di fase tra loro in tutta la banda delle frequenze in gioco; nel paragrafo 6-16 se ne esamineranno alcuni.

La fig. 6-17 chiarisce il funzionamento del circuito: la caratteristica dinamica e_B-i_C del transistore T_2 è capovolta per verificare le relazioni tra le due tensioni di griglia ed è allineata con l'altra caratteristica in modo da far coincidere le tensioni dei punti Q. Le due caratteristiche non sono lineari e quindi si ha una notevole generazione di armoniche. Dalla figura

si vede però come le armoniche pari si annullino reciprocamente ed il circuito fornisca un'uscita i_{c1}-i_{c2} senza tali armoniche.

Si può verificare quanto detto precedentemente con l'analisi del circuito. Se si suppone che le due caratteristiche dinamiche siano identiche, la corrente in ciascun dispositivo sarà data da:

$$i = I_0 + a_1e_1 + a_2e_1^2 + a_3e_1^3 + a_4e_1^4 + \ldots \qquad (6\text{-}29)$$

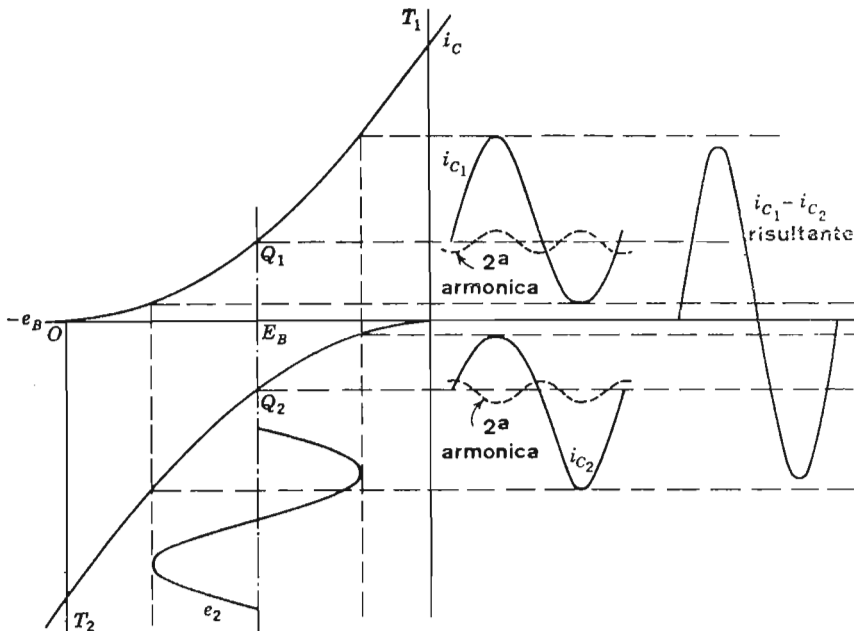



FIG. 6-17 — Eliminazione delle armoniche pari nell'amplificatore in controfase.

Se si applica al primario del trasformatore di ingresso una tensione sinusoidale, le tensioni di ingresso saranno:

$$e_1 = E_2 \text{ sen } \omega t$$
$$e_2 = E_2 \text{ sen } (\omega t + \pi)$$

La corrente del transistore T_1 sarà quindi:

$$i_1 = I_0 + a_1E_2 \text{ sen } \omega t + a_2E_2^2 \text{ sen}^2 \omega t + a_3E_2^3 \text{ sen}^3 \omega t + \ldots \qquad (6\text{-}30)$$

e quella del transistore T_2:

$$i_2 = I_0 + a_1E_2 \text{ sen } (\omega t + \pi) + a_2E_2^2 \text{ sen}^2 (\omega t + \pi) + a_3E_2^3 \text{ sen}^3 (\omega t + \pi) + \ldots \qquad (6\text{-}31)$$

Applicando semplici relazioni trigonometriche si possono trasformare queste relazioni in altre che contengono frequenze armoniche della frequenza di ingresso:

$$i_1 = I_0 + B_0 + B_1 \operatorname{sen} \omega t - B_2 \cos 2\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t - B_4 \cos 4\omega t + \dots \tag{6-32}$$

$$i_2 = I_0 + B_0 + B_1 \operatorname{sen} (\omega t + \pi) - B_2 \cos 2(\omega t + \pi) + B_3 \operatorname{sen} 3(\omega t + \pi) - B_4 \cos 4(\omega t + \pi) + \dots \tag{6-33}$$

Poiché d'altra parte si ha:

$$\operatorname{sen} (\omega t + \pi) = - \operatorname{sen} \omega t$$
$$\cos 2(\omega t + \pi) = \cos 2\omega t$$

la corrente in T_2 può essere scritta come:

$$i_2 = I_0 + B_0 - B_1 \operatorname{sen} \omega t - B_2 \cos 2\omega t - B_3 \operatorname{sen} 3\omega t - B_4 \cos 4\omega t - \dots \tag{6-34}$$

Le correnti i_1 e i_2 si sottraggono agli effetti del circuito magnetico del trasformatore di uscita. La tensione al secondario sarà proporzionale alle amper-spire del primario, e cioè:

$$E_2 = 2k(B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t + B_5 \operatorname{sen} 5\omega t + \dots) \tag{6-35}$$

Perciò la connessione in controfase, con tubi o transistori identici, elimina i termini di armoniche pari dall'uscita.

Anche i termini continui I_0 e B_0 vengono eliminati agli effetti della magnetizzazione del nucleo. Analogamente l'ondulazione presente nella tensione di alimentazione sarà in fase per i due tubi e si annulla. Di conseguenza il filtraggio della tensione di alimentazione è meno critico per un amplificatore in controfase che per un *amplificatore sbilanciato*, come vengono talvolta chiamati i circuiti a un sol tubo.

6-10. Considerazioni sulla polarizzazione degli amplificatori in controfase.

Spesso per la polarizzazione dei tubi nei circuiti controfase si impiega un resistore catodico, come in fig. 6-18. Se il resistore è connesso senza il condensatore di shunt, la corrente in R_k sarà i_1+i_2 e la tensione di polarizzazione ai capi della resistenza sarà:

$$e_k = R_k(2I_0 + 2B_0 - 2B_2 \cos 2\omega t - 2B_4 \cos 4\omega t - \dots) \tag{6-36}$$

dove e_k è positiva rispetto a massa.

Con una capacità in parallelo di valore sufficiente invece:

$$e_k = R_k(2I_0 + 2B_0)$$

e questa tensione è costante solo se B_0 è piccolo. Poiché $B_0 = B_2$, il punto di lavoro Q rimarrà fisso solo se la distorsione di seconda armonica è bassa. Nel funzionamento in classe A questa condizione è soddisfatta e la polarizzazione è costante. Nel funzionamento controfase in classe AB e B la distorsione di armoniche pari è grande e la polarizzazione deve essere effettuata in altri modi.

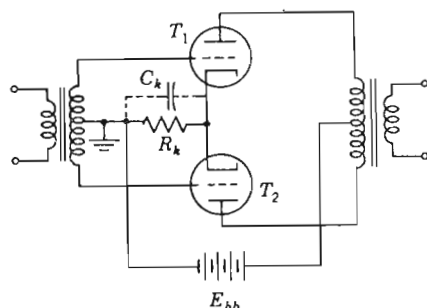



FIG. 6-18 — Polarizzazione catodica nello amplificatore controfase a triodi

Se i transistori o i tubi non sono adattati dinamicamente, può apparire nell'eq. (6-36) un residuo di armonica dispari, dovuto alla diversità dei coefficienti a_3, a_5, ecc. Poichè la fase di queste componenti di tensione su R_k è tale da dar luogo ad una reazione positiva, per evitare un aumento della distorsione di armoniche dispari è buona norma, nel caso di tetrodi e pentodi, shuntare R_k con un condensatore. Per i transistori si impiega di solito un sistema di polarizzazione indipendente per i singoli transistori, per ottenere anche una certa stabilizzazione termica.

Le condizioni di funzionamento del circuito controfase possono essere ricavate con un'analisi grafica simile a quella impiegata precedentemente, ma più complessa, per cui di solito si esegue un progetto sperimentale, usando gli accorgimenti validi per il singolo transistore come guida.

6-11. Tipici circuiti controfase.

Lo schema generale di un amplificatore a transistori con accoppiamento a trasformatore è quello riportato in fig. 6-19a; la versione a tubi si ottiene sostituendo semplicemente i transistori con i tubi. Le tensioni secondarie hanno il verso indicato dai puntini neri. Una sola rete di polarizzazione può fornire l'esatta polarizzazione di base, ma di solito sono da preferirsi due reti separate (fig. 6-19b), che risultano più convenienti dal punto di vista

della stabilizzazione. L'asportazione del calore dal collettore è un problema importante, perché il punto di funzionamento è molto vicino alla iperbole di massima dissipazione se non addirittura su essa; bisogna quindi effettuare un montaggio adeguato per un efficace raffreddamento; di solito si impiegano, quali supporti dei transistori, dei radiatori che favoriscono la dispersione del calore. La protezione contro eventuali sovraccarichi può essere utilmente effettuata mediante fusibili. I circuiti a tubi sono meno critici rispetto alle variazioni delle condizioni ambientali.

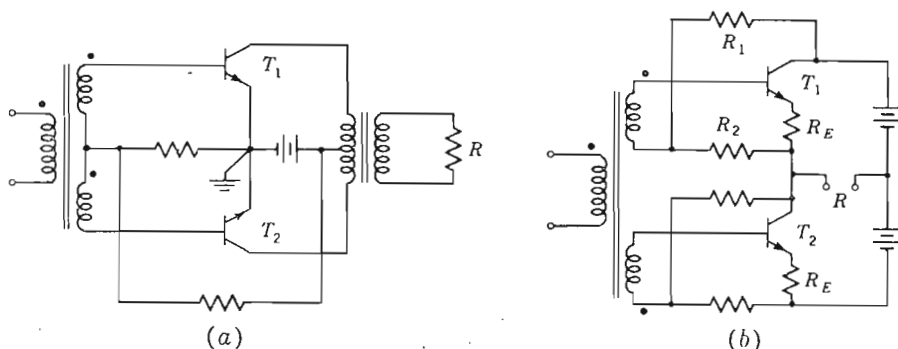



FIG. 6-19 — *a*) Amplificatore controfase a transistori con accoppiamento a trasformatore. *b*) Circuito senza trasformatore di uscita.

Il circuito di fig. 6-19b è molto economico a causa della eliminazione del trasformatore di uscita; la reazione introdotta dalla rete di reazione è utile per diminuire la distorsione. Nella condizione di riposo le correnti nel carico sono uguali ed opposte e quindi si eliminano a vicenda. Quando la base di T_1 è pilotata in modo da aumentare la corrente del proprio collettore, la base di T_2 è pilotata in modo tale che essa tende a ridurre la corrispondente corrente di collettore; nel semiperiodo successivo le condizioni si invertono. La corrente differenza passa nel carico e dà luogo ad una corrente alternativa. L'eliminazione del trasformatore migliora inoltre la risposta in frequenza, e la reazione può essere utilmente impiegata perchè non vi è in uscita alcun sfasamento introdotto dal trasformatore di uscita.

Nel progetto con tubi a vuoto si impiega di solito il trasformatore d'uscita perché la resistenza di uscita R′ deve essere di alcune migliaia di ohm, mentre il carico effettivo R è di solito molto più basso, fino a qualche ohm. Supponendo trascurabile la distorsione, i due tubi possono essere sostituiti dai circuiti equivalenti di fig. 6-20a. Poichè si suppone che il funzionamento sia lineare, nella connessione tra il punto K ed il trasformatore non circola corrente e quindi la si può eliminare (fig. 6-20b). Quindi:

$$I_p = \frac{2\mu E_g}{2r_p + (2N_1/N_2)^2 R} \tag{6-37}$$

dove N_1 è il numero di spire di metà del primario del trasformatore. La potenza in uscita è allora:

$$P_o = \left[\frac{2\mu E_g}{2r_p + (2N_1/N_2)^2 R}\right]^2 \left(\frac{2N_1}{N_2}\right)^2 R \qquad (6\text{-}38)$$

La condizione di adattamento, ossia di massima potenza in uscita si ha quando:

$$\left(\frac{2N_1}{N_2}\right)^2 R = 2r_p \qquad (6\text{-}39)$$

cioè quando il carico tra gli anodi, o l'impedenza del primario, è uguale alla resistenza anodica dei due tubi in serie.

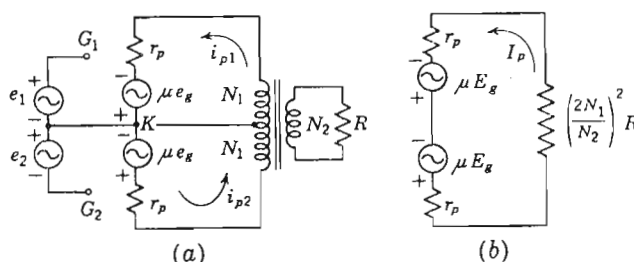



FIG. 6-20 — Semplificazione del circuito equivalente per l'amplificatore controfase lineare.

La condizione ora esposta può essere ben soddisfatta nel caso dei triodi che introducono essenzialmente distorsione di armoniche pari che viene eliminata dalla connessione controfase. Per i tetrodi ed i pentodi invece, che danno luogo prevalentemente a distorsione d'armonica dispari, che non viene cancellata dalla connessione controfase, non si possono usare carichi come quelli suggeriti dalla condizione di adattamento se si vuole evitare una forte distorsione in uscita. Il carico ottimo va quindi determinato sperimentalmente ed è un compromesso tra la potenza di uscita e la distorsione.

6-12. Degenerazione termica degli amplificatori di potenza a transistori.

Come è stato accennato precedentemente, nei transistori si può creare una condizione di riscaldamento rigenerativo, o *rigenerazione termica* che può distruggere il componente. Sebbene sia stato già precedentemente introdotto il fattore di stabilità S di un circuito, il problema della instabilità termica è così critico negli amplificatori di potenza da giustificare ulteriori considerazioni.

Nei circuiti amplificatori per piccoli segnali l'instabilità termica può essere controllata abbastanza bene impiegando delle resistenze di collettore e di emettitore di valore adatto; invece per gli amplificatori di potenza il progetto è più critico perché è necessario impiegare bassi valori di resistenze per ottenere un buon rendimento di potenza.

La massima temperatura di funzionamento della giunzione dipende dal materiale di cui è costituito il transistore e dal valore $I_{co\,max}$ che può essere tollerato senza che la corrente di segnale venga mascherata. Se la temperatura ambiente aumenta, bisogna ridurre la dissipazione di collettore per mantenere costante la temperatura di giunzione. Quindi P_d è una costante solo per determinate condizioni ambiente. La temperatura della giunzione può essere calcolata dalla relazione:

$$T_J = T_A + KP_d \tag{6-40}$$

dove T_A è la temperatura ambiente in ^0C e K è la *resistenza termica* del montaggio, definita come rapporto tra l'aumento in ^0C della temperatura della giunzione di collettore e la potenza di ingresso in watt.

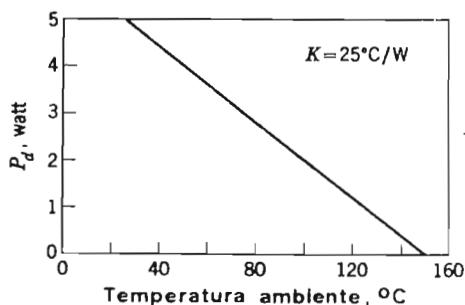



FIG. 6-21 — Caratteristica termica del transistore.

In fig. 6-21 è indicata la diminuzione della dissipazione ammissibile, in funzione dell'aumento della temperatura ambiente o di quella del contenitore, per un transistore avente una dissipazione ammissibile di 5 watt in aria, a 25^0 di temperatura ambiente e una temperatura massima ammissibile di giunzione di circa 150^0C.

La degenerazione termica avviene perché I_{co} e h_{fe} aumentano con la temperatura; un piccolo aumento di temperatura causa un aumento di I_{co} e della dissipazione nella giunzione di collettore; a questo aumento corrisponde un ulteriore aumento della temperatura di giunzione. Il processo diviene rigenerativo quando l'aumento di temperatura risultante per

ogni watt di potenza dissipata è più grande della resistenza termica del transistore e del montaggio. La rigenerazione termica si ha cioè quando:

$$\Delta T_J/\Delta P_d < K \tag{6-41}$$

Si consideri il circuito elementare di fig. 6-22a, in cui

$$P_d = E_{CE}I_C = [E_{CC} - I_C(R_E + R_L)]I_C \tag{6-42}$$

Differenziando rispetto a I_c ed eguagliando a zero l'espressione ottenuta si vede che la massima dissipazione si ha quando $E_{CE} = E_{CC}/2$; ossia una condizione per la stabilità di questo circuito è determinata da un'opportuna distribuzione delle tensioni; ossia deve essere:

$$I_C(R_E + R_L) > \frac{E_{CC}}{2} \tag{6-43}$$

Si può esaminare meglio il problema con un'ulteriore analisi del fenomeno, ad esempio è:

$$\frac{dP_d}{dT_J} = [E_{CC} - 2I_C(R_E + R_L)]\frac{dI_C}{dT_J} < \frac{1}{K}$$

si ha anche:

$$\frac{dI_C}{dT_J} = \frac{dI_C}{dI_{CO}}\frac{dI_{CO}}{dT_J} = S\frac{dI_{CO}}{dT_J} \tag{4-44}$$

quest'ultima relazione discende dalla definizione del fattore di stabilità posta nella eq. (3-77). Quindi dall'equazione (6-41) segue che si può prevenire la rigenerazione termica se:

$$[E_{CC} - 2I_C(R_E + R_L)]S\frac{dI_{CO}}{dT_J} < \frac{1}{K} \tag{6-45}$$

Si può vedere che l'effetto rigenerativo nel circuito elementare di fig. 6-22a può essere controllato riducendo il fattore di stabilità S, migliorando il rendimento termico del montaggio del transistore con l'uso di una piastra di metallo ben raffreddata, o radiatore termico, per diminuire K, o infine aumentando R_E o R_L. Di norma non è conveniente aumentare R_E per la reazione negativa che si introduce e per il costo di un adeguato condensatore di shunt, se si vuole eliminare questa reazione alle frequenze di segnale

Per una valutazione quantitativa del fenomeno bisogna ricorrere ad un metodo di analisi più accurato; contemporaneamante la verifica del progetto va fatta nel caso più sfavorevole cioè con $E_{BE} = 0$ e h_{FE} massimo. Inoltre se vi è un trasformatore di uscita, con una resistenza in continua trascurabile la verifica va anche effettuata con $R_L = 0$.

Il circuito di fig. 6-22a può essere ricondotto a quello di fig. 6-22b applicando il teorema di Thevenin al circuito d'ingresso di fig. 6-22a. La relazione fondamentale dell'eq. (3-76) può essere riscritta come

$$I_B = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} I_C - \frac{I_{CO}}{\alpha}$$

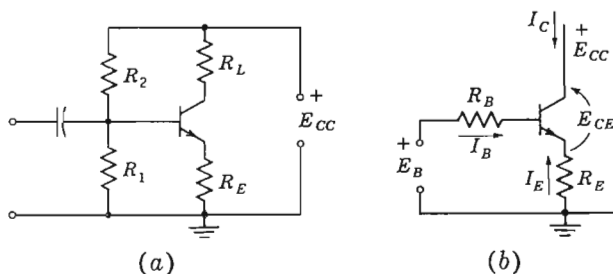



FIG. 6-22 — Circuito impiegato per le considerazioni sulla rigenerazione termica

Se h_{FE} è grande, $\alpha \cong 1$ e quindi:

$$I_B \cong - I_{CO} \tag{6-46}$$

Dal circuito si ha:

$$I_C + I_E + I_B = 0$$
$$I_C = - I_E + I_{CO} \tag{6-47}$$

La tensione base-massa è:

$$E_{BG} = E_B - I_B R_B = E_B + I_{CO} R_B \tag{6-48}$$

tenendo conto dell'eq. (6-46). Supponendo E_{BE} uguale a zero si ha:

$$I_E = \frac{E_B + I_{CO} R_B}{R_E} + I_{CO} \tag{6-49}$$

La dissipazione nel transistore è quindi:

$$P_d = E_{CE} I_C = [E_{CC} - (E_B + I_{CO} R_B)] \left(\frac{E_B + I_{CO} R_B}{R_E} + I_{CO}\right) \tag{6-50}$$

Si raggiunge la condizione critica nel riscaldamento rigenerativo quando:

$$\frac{dP_d}{dT_J} = \frac{dP_d}{dI_{CO}} \frac{dI_{CO}}{dT_J} = \frac{1}{K} \tag{6-51}$$

Per i transistori al silicio a 300°K, $dI_{co}/dt = \delta = 0{,}16$, cioè I_{co} aumenta del 16% per ogni °C di temperatura; per il germanio invece $\delta = 0{,}11$.

Sostituendo l'equazione (6-50) nell'equazione (6-51) e risolvendo rispetto a $I_{co\,max}$ si ha:

$$I_{co,max} = \frac{\left(E_{CC} - E_B \frac{R_E + 2R_B}{R_E + R_B}\right) \pm \sqrt{\left(E_{CC} - E_B \frac{R_E + 2R_B}{R_E + R_B}\right)^2 - \frac{8R_E R_B}{R_E + R_B} \frac{1}{\delta K}}}{4R_B} \qquad (6\text{-}52)$$

in cui il segno meno dà il valore di I_{co} allorché ha inizio la rigenerazione termica.

Se la quantità sotto il segno di radice è zero o negativa la rigenerazione non è possibile. La determinazione di $I_{co\,max}$ ci dà un indice del margine di sicurezza sopra il normale valore di lavoro di I_{co}. La temperatura della giunzione all'istante in cui comincia la rigenerazione può essere ricavata conoscendo K e P_d [Eq. (6-50)].

Esempio — *Per un transistore PNP al germanio tipo 2N301 che lavora in classe A sono assegnati*: $P_{max} = 11$ *watt con radiatore termico*, $K = 2{,}0$°C *per watt*, $E_{CC} = 16$ *volt*, $h_{FE} = 91$.

Nel circuito di fig. 6-22*a* $R_E = 2{,}0$ *ohm*, $R_2 = 470$ ohm, $R_1 = 100$ ohm, *e* $R_L = 0$ *per le componenti continue. Determinare la dissipazione e l'aumento di temperatura e se è possibile la rigenerazione termica.*

$$I_{co\,max} = \frac{12{,}87 - \sqrt{95}}{328} = 0{,}0095 \text{ ampere}$$

$$P_d = (16 - 2{,}36)\,(1{,}18 + 0{,}0095) = 16{,}2 \text{ watt}$$

$$\text{Aumento di temperatura} = 16{,}2 \times 2{,}0 = 32{,}4^\circ\text{C}$$

Il progetto è estremamente critico e bisogna scegliere un punto Q che dia una dissipazione minore degli 11 *watt ammissibili, magari aumentando* R_E.

6-13. L'amplificatore controfase in classe B.

Se il punto di lavoro Q sulla caratteristica di trasferimento della fig. 6-12 viene spostato in basso verso l'interdizione, si rende disponibile una maggiore parte del tratto lineare della caratteristica di trasferimento per la parte positiva della tensione di ingresso. Al contrario la parte negativa del segnale di ingresso porterà il transistore in interdizione e si avrà così una notevole distorsione di armoniche pari, analogamente a quanto avveniva spostando in basso verso l'interdizione il punto Q sulla retta di carico di fig. 6-11.

Se si connettono due transistori in controfase con polarizzazione alla interdizione, cioè in classe B, le armoniche di ordine pari, così create, saranno cancellate, e si rende disponibile una potenza molto più grande in

uscita a causa della maggiore escursione della tensione di ingresso sul tratto lineare della caratteristica di trasferimento.

Si nota dal quadrante superiore della fig. 6-12 che si può raggiungere nella semionda positiva una corrente di picco di 1,5 A senza arrivare alla regione di non linearità dovuta alla saturazione del collettore. La distorsione introdotta dal circuito di ingresso è tuttavia notevole, come si può vedere dalle caratteristiche di trasferimento di ingresso di fig. 6-23, in cui la curva

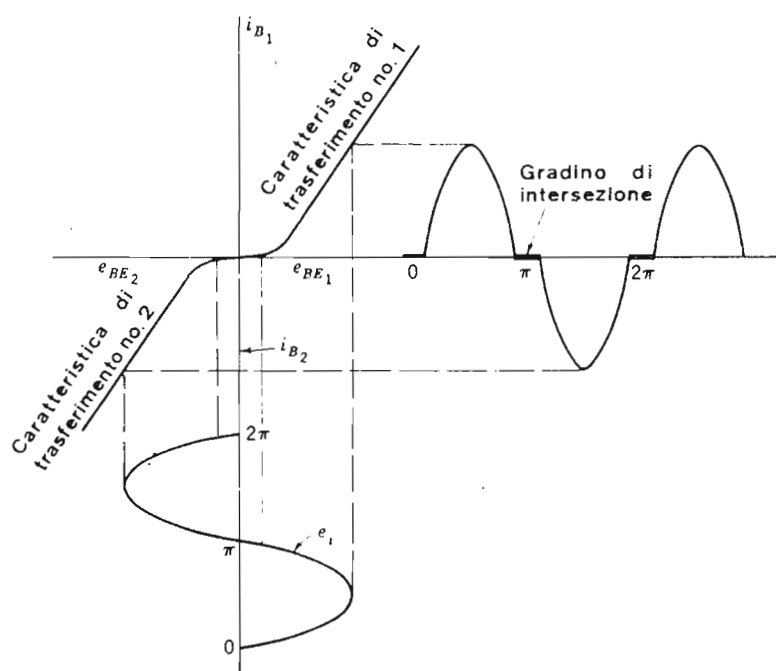



FIG. 6-23 — Distorsione di sovrapposizione.

relativa a T_2 è stata riportata nel quadrante negativo ribaltata rispetto alla curva relativa a T_1 per tener conto dello sfasamento di 180° causato dal circuito di ingresso del controfase. Le due curve sono poste in modo da coincidere per $e_{BE} = 0$.

La corrente di ingresso risultante è composta da due semionde, una per ogni transistore e la non linearità della caratteristica risultante in corrispondenza dell'intersezione con l'asse delle correnti dipende dal fatto che occorre una tensione finita ai capi della giunzione base-emettitore, circa 0,5 volt, prima che si abbia corrente di collettore. La distorsione della forma d'onda di uscita è detta *distorsione di intersezione* ed ha notevole influenza per se-

gnali di ingresso di basso livello. Questa distorsione può essere diminuita introducendo una piccola polarizzazione positiva sulla base in modo che al punto Q non si raggiunga ancora l'interdizione; la caratteristica complessiva di trasferimento di ingresso appare allora come in fig. 6-24, o come in fig. 6-25 per i triodi. Il funzionamento in questo caso non è proprio in classe B perché la corrente di collettore circola per più di 180° della tensione di in-

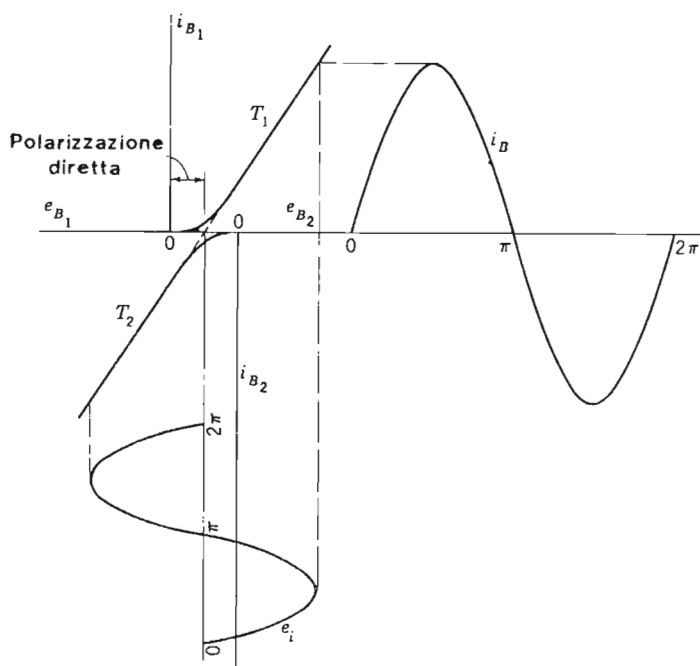



FIG. 6-24 — Funzionamento in classe B con interdizione estrapolata.

gresso, ma in effetti vi si avvicina molto. La polarizzazione così impiegata viene definita *polarizzazione all'interdizione estrapolata*; il suo valore lo si ottiene estendendo la parte lineare della caratteristica di trasferimento di ingresso fino all'intersezione con l'asse delle tensioni, come è indicato dalla linea tratteggiata che unisce le due caratteristiche di trasferimento. Poiché in questo caso la caratteristica complessiva di ingresso è lineare e il funzionamento interessa principalmente la parte lineare delle caratteristiche di uscita, la distorsione di ognuna delle due metà della forma d'onda della corrente di uscita è ridotta al minimo e si ottiene una notevole potenza in uscita. In fig. 6-26 sono riportate le forme d'onda di ingresso e di uscita per uno solo dei due componenti di un circuito in classe B.

Una analisi teorica del funzionamento di un amplificatore controfase in classe B è possibile se si suppone che ciascuna delle due metà dell'amplificatore fornisca metà della sinusoide in uscita e sia polarizzato all'interdi-

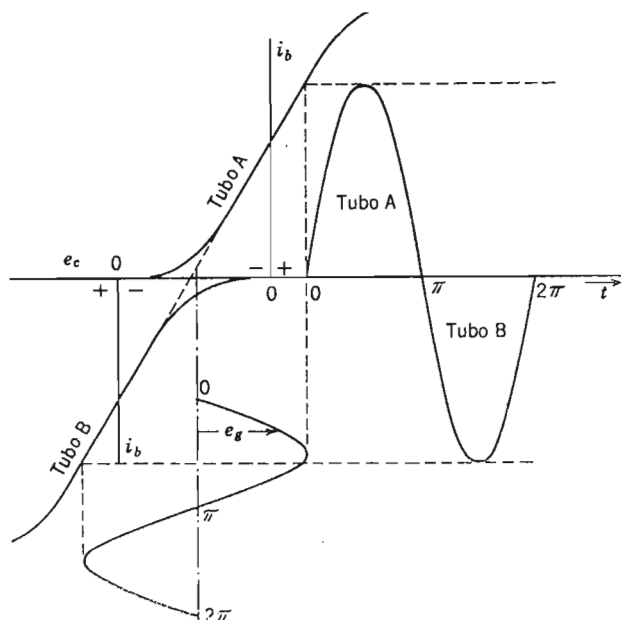



FIG. 6-25 — Analisi dell'amplificatore in controfase a triodi funzionante in classe B.

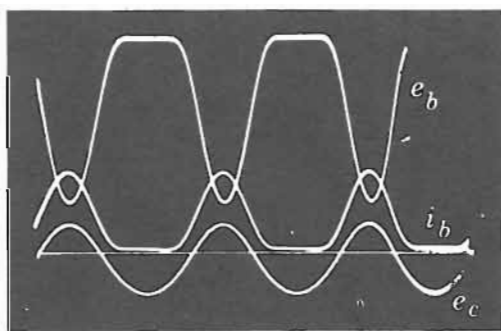



FIG. 6-26 — Forme d'onda di un tubo dell'amplificatore in classe B.

zione effettiva e non a quella estrapolata; questa ipotesi non si discosta molto dalla realtà per segnali di ingresso abbastanza più elevati di 0,5 volt.

Sfruttando le proprietà delle sinusoidi, si ha che il valore medio di mezza

sinusoide è pari alla corrente continua di collettore per ogni transistore, o alla corrente anodica per ogni tubo, e vale:

$$I_{dc} = \frac{I_m}{\pi} \quad \text{per ogni transistore} \tag{6-53}$$

Quindi la corrente continua di alimentazione è pari al doppio di questo valore, con I_m valore di picco della corrente di uscita.

Poiché la corrente di uscita ha la forma di una intera sinusoide, il valore efficace della corrente alternativa sul carico è:

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \tag{6-54}$$

I due transistori lavorano alternativamente, per cui ognuno alimenta solo la propria metà del trasformatore di uscita, mentre l'altra metà dell'avvolmento è per esso un circuito aperto. Il carico per ogni transistore è quindi un quarto del valore totale riportato al primario, cioè $(N_1/N_2)^2R$ invece del valore $(2N_1/N_2)^2 R$. Per i circuiti senza trasformatore di uscita, in cui il carico resistivo è direttamente connesso in serie, il valore di R′ è quello direttamente connesso ai terminali di uscita. La potenza totale in uscita è quindi:

$$P_o = \frac{I_m^2R'}{2} \tag{6-55}$$

in cui R′ è stato già definito. La potenza di alimentazione per la coppia di componenti è:

$$P_i = \frac{2I_mE_{CC}}{\pi} \tag{6-56}$$

In base alle ipotesi poste, quindi, si può ottenere il rendimento di potenza dell'amplificatore in controfase in classe B, come:

$$\eta = \frac{(I_m^2R'/2) \times 100\%}{2I_mE_{CC}/\pi} = \frac{\pi}{4}\frac{I_mR'}{E_{CC}} \times 100\% \tag{6-57}$$

Il termine I_mR' è il valore di picco della variazione della tensione di collettore rispetto al valore E_{CC}, ed è uguale a $E_{CC} - e_{min}$, per cui si ha anche:

$$\eta = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{E_{min}}{E_{CC}}\right) \times 100\% \tag{6-58}$$

In teoria il minimo valore possibile di e_{min} è zero, quindi il massimo rendimento di potenza possibile per un amplificatore controfase in classe B è:

$$\eta \text{ massimo} = \frac{\pi}{4} \times 100\% = 78{,}5\% \tag{6-59}$$

A questo valore si avvicinano molto gli amplificatori a transistori, poichè possono essere portati ad una tensione di collettore quasi nulla; il valore limite non può però essere raggiunto per la necessità di impiegare la polarizzazione alla interdizione estrapolata.

Tenendo conto delle eq. (6-53) e (6-54) la potenza alternativa in uscita può essere scritta come:

$$P_o = \frac{\pi^2 I_{dc}^2 R'}{8} \qquad (6\text{-}60)$$

in cui I_{dc} è la corrente totale circolante nei due dispositivi. Nel funzionamento in classe B la potenza di alimentazione è praticamente zero in condizione di riposo e aumenta con il segnale di ingresso; questo spiega l'alto rendimento di potenza. Il massimo della dissipazione all'interno dei dispositivi attivi non capita in corrispondenza di segnale applicato nullo come in classe A. La dissipazione è data da:

$$P_d = E_{cc} I_{dc} - \frac{\pi^2 I_{dc}^2 R'}{8}$$

in cui I_{dc} è sempre la corrente continua totale del circuito.

Facendo la derivata di questa espressione rispetto a I_{dc} e eguagliandola a zero si vede che $I_{dc} = 4E_{CC}/\pi^2 R'$ all'istante della massima dissipazione interna. I due dispositivi debbono quindi avere una dissipazione ammissibile più grande di:

$$P_d \text{ massima} = \frac{2E_{CC}^2}{\pi^2 R'} \qquad (6\text{-}61)$$

La potenza in uscita in corrispondenza della dissipazione massima è quindi $\frac{2E^2_{cc}}{\pi^2 R'}$. Si ha la massima potenza in uscita se è $e_{min} = 0$, allora è $I_m R' = E_{CC}$, da cui segue che.

$$P_o \text{ massima} = \frac{E_{CC} I_m}{2}$$

Di conseguenza il rapporto tra la potenza d'uscita corrispondente alla dissipazione massima e la potenza in uscita massima è dato da:

$$\frac{P_{d,max}}{P_{o,max}} = \frac{2E_{CC}^2/\pi^2 R'}{E_{CC} I_m/2} = \frac{4}{\pi^2} = 0{,}406$$

cioè si ha la dissipazione massima quando la potenza in uscita è il 40,6 per cento dell'uscita massima teorica.

Poiché la necessità di un adeguato raffreddamento dei transistori pone notevoli problemi, l'impiego della classe B, con la sua bassa dissipazione nella condizione di riposo, è molto conveniente per gli amplificatori a tran-

sistori. Questo è anche il modo normale di funzionamento per i tubi, quando debbano fornire una notevole potenza in uscita, con piccola distorsione.

6-14. Progetto degli amplificatori a triodi in classe B.

Nel progetto degli amplificatori a triodi in classe B la scelta del tipo di tubo viene effettuata in base alla potenza d'uscita richiesta, alla dissipazione, alla resistenza di carico e al valore di picco del segnale $e_{g\,max}$ di pilotaggio. I parametri che determinano le condizioni di funzionamento sono la potenza in uscita, la dissipazione anodica, il rendimento e la distorsione.

Qualsiasi tubo che ammetta una sufficiente dissipazione anodica può essere utilizzato per il funzionamento vicino all'interdizione, ma sono da preferirsi i tubi con alto μ a polarizzazione zero. La polarizzazione alla indizione estrapolata assicura una bassa distorsione, ma il prezzo da pagare per questa riduzione della distorsione è un aumento della dissipazione anodica.

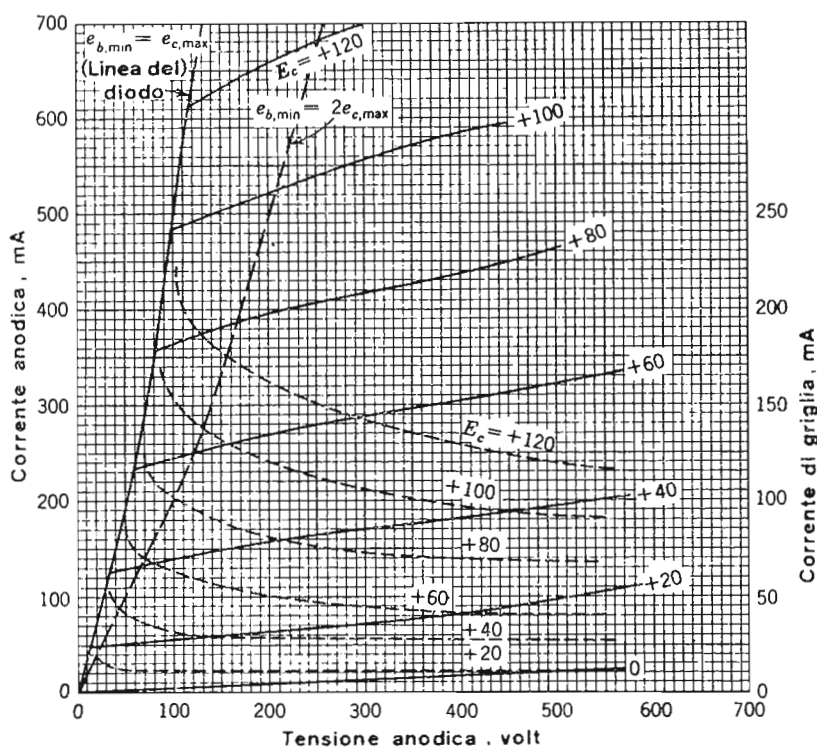



FIG. 6-27 — Caratteristiche anodiche per bassi valori della tensione del triodo 805 a polarizzazione zero.

Per avere una grande potenza in uscita nel funzionamento in class B è necessario portare le griglie a tensioni positive piuttosto elevate, ma il problema di quanto possa essere resa positiva la griglia di un tubo può essere risolto solo in via approssimata. In fig. 6-27 sono riportate le caratteristiche di corrente anodica (linee intere) e di corrente di griglia (linee tratteggiate), di un tubo 805, un tipico triodo a polarizzazione zero, per bassi valori della tensione anodica.

La *linea del diodo* riportata in figura indica i valori della corrente anodica per i quali si hanno uguali tensioni istantanee sulla griglia e sull'anodo.

Il funzionamento a sinistra di questa linea, ossia con $e_b < e_c$, dà luogo ad un'eccessiva corrente di griglia e riduce la corrente anodica. Di solito è considerata buona norma, in classe B, limitare $e_{b\,min}$ a valori doppi di quelli della linea del diodo; il luogo di questi punti è riportato in linea tratteggiata in fig. 6-27. Si può notare che questa limitazione evita l'aumento rapido della corrente di griglia che si avrebbe a valori $e_{b\,min}$ più bassi.

Applicando il limite di cui sopra per i valori positivi della tensione di griglia, si possono considerare le caratteristiche di fig. 6-28 come quelle di

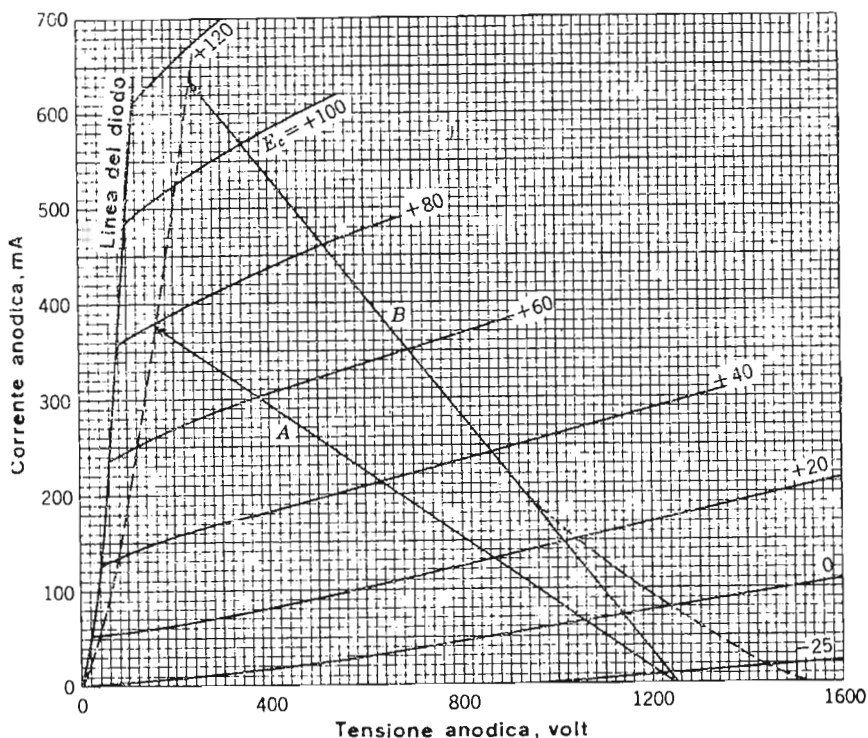



FIG. 6-28 — Caratteristiche di un tubo di un amplificatore in classe B impiegante triodi 805.

uno dei due tubi di un circuito controfase in classe B. Il carico ottimo per questo amplificatore può essere determinato tracciando parecchie rette di carico. Partendo da E_{bb}, si sono tracciate le rette corrispondenti a due carichi e a due valori di picco della tensione positiva di griglia. Per il tubo 805 i dati sono:

E_{bb} = 1250 volt Dissipazione anodica = 125 watt
E_{cc} = 0 volt I_{dc} massima = 210 mA

La retta di carico A corrisponde ad un carico per il tubo di 2.900 ohm (11.600 ohm tra gli anodi nell'amplificatore effettivo), la retta B ad un carico di 1.600 ohm (6.400 ohm tra i due anodi); ad esempio, riferendosi alla retta di carico A, il progetto può essere verificato rilevando i seguenti dati.

i_{max} = 380 mA $e_{c\,max}$ = + 80 volt
i_x = 212 mA $e_{b\,min}$ = 160 volt
i_y = — 212 mA (nell'altro tubo) I_b = 80 mA (relativo al punto Q effettivo con E_c = 0, E_b = 1250 volt)

Dall'eq. (6-19) si ha che il valor medio della corrente anodica in ciascun tubo in presenza di segnale è:

$$I_{bb} = \frac{i_{max} + i_{min} + 2(i_x + i_y)}{6}$$

$$= \frac{0,380 + 0 + 0,424 + 0}{6} = 0,134 \text{ A/tubo}$$

La potenza di alimentazione anodica è quindi:

$$P_{in} = 1250 \times 0,134 \times 2 = 336 \text{ watt}$$

La potenza in uscita può essere ricavata impiegando l'eq. (6-15) per la componente fondamentale della corrente.

$$I_p = \frac{A_1}{\sqrt{2}} = \frac{0,380 - (-0,380) + 0,212 - (-0,212)}{3\sqrt{2}} = 0,278 \text{ A}$$

$$P_o = (0,278)^2 \times 2900 = 224 \text{ watt di uscita complessiva}$$

Dissipazione anodica = 336 — 224 = 122 watt complessivi, cioè 56 watt/tubo

Poiché questo valore di dissipazione è notevolmente al di sotto del valore massimo ammissibile, va scelto un carico più basso e un segnale di ingresso più ampio.

Scegliendo la retta di carico B che rappresenta un carico di 1,600 ohm per ogni tubo, i valori ricavati dalla retta sono:

i_{max} = 630 mA
i_x = 335 mA (a e_c = + 57,5 volt)
i_y = — 335 mA
i_{min} = — 630 mA
$e_{c\,max}$ = + 115 volt

Il valor medio della corrente in ogni tubo in presenza di segnale è:

$$I_{bs} = \frac{0{,}630 + 0 + 0{,}670 + 0}{6} = 0{,}216 \text{ A}$$

Questo valore supera il limite ammissibile, ma può essere ridotto con una piccola diminuzione del valore di picco della tensione. La potenza di alimentazione è data da:

$$P_{in} = 1250 \times 0{,}216 \times 2 = 540 \text{ watt complessivi}$$

La componente fondamentale della corrente in uscita è data da:

$$I_p = 0{,}455 \text{ A}$$

da cui si ricava la potenza in uscita:

$$P_o = (0{,}455)^2 \times 1600 = 332 \text{ watt}$$

$$\text{Dissipazione anodica} = 540 - 332 = 208 \text{ watt complessivi, cioè } 104 \text{ watt/tubo}$$

Il progetto può essere considerato soddisfacente, sebbene sarebbe stato più conveniente scegliere un carico leggermente più alto per ridurre il valore della corrente anodica al limite ammissibile. I dati di funzionamento dell'amplificatore sono i seguenti:

$E_{bb} = 1250$ volt $\qquad e_{c\,max} = +\,115$ volt

$E_{cc} = \;\;0$ volt $\qquad R' = 1600$ ohm; 6400 ohm tra gli anodi

Il rendimento di uscita è:

$$\eta = \frac{332 \times 100\%}{540} = 61{,}2\%$$

Come ulteriore verifica, si può ricavare con l'eq. (6-17) la distorsione di terza armonica:

$$A_3 = \frac{0{,}630 - (-\,0{,}630) - 0{,}670 + (-\,0{,}670)}{6} = -\,0{,}013$$

È stato già calcolato precedentemente il valore della fondamentale $A_1 = \sqrt{2} \times 0{,}455 = 0{,}644$ ampere di picco. La distorsione di terza armonica è quindi:

$$D_3 = \frac{0{,}013}{0{,}644} \times 100\% = 2{,}0\%$$

questo valore di solito è considerato soddisfacente.

È interessante paragonare i risultati, ottenuti tenendo conto dell'interdizione estrapolata, con quelli ottenuti riferendosi alle condizioni di interdizione teorica del paragrafo 6-13. I valori sono:

Interdizione teorica	*Interdizione estrapolata*
$I_{dc} = \frac{I_m}{\pi} = 205$ mA	216 mA
$P_o = \frac{I_m^2 R}{2} = 317$ watt	332 watt
$P_{in} = \frac{2 I_m E_{bb}}{\pi} = 512$ watt	540 watt
$P_d = 512 - 317 = 195$ watt	208 watt
$\eta_p = {}^{317}/_{512} \times 100\% = 61{,}8\%$	61,2%

Le equazioni del paragrafo precedente possono servire quindi per ottenere rapidamente i valori delle grandezze più importanti con un'approssimazione compresa entro il 5% circa; solo l'errore sulla dissipazione anodica risulta più elevato. La discordanza è dovuta all'ipotesi che le correnti anodiche di ciascun tubo siano delle semisinusoidi, condizione che non è pienamente verificata nel funzionamento all'interdizione estrapolata.

6-15. Assorbimento di potenza nel circuito di griglia.

La distorsione della forma d'onda della corrente di griglia dipende dalla non linearità delle caratteristiche di corrente di griglia. Tuttavia la forma di onda esatta può essere ottenuta punto per punto, e si può quindi calcolare la potenza di ingresso con un'integrazione numerica. Il valore istantaneo della tensione di griglia è $e_c = E_{cc} + e_{g\,max} \cos \omega t$ e nel caso dei triodi a polarizzazione zero è $E_{cc} = 0$. Il valore istantaneo della tensione anodica è dato da:

$$e_b = -(E_{bb} - e_{b,min}) \cos \omega t + E_{bb}$$

in cui $e_{b\,min}$ è il valor minimo ddlla tensione anodica durante un ciclo di corrente anodica e corrisponde all'istante in cui e_g è massima. Si possono calcolare i valori di e_b ed e_c per valori di ωt equidistanti, e ricavare la corrispondente corrente di griglia i_c dalle caratteristiche di griglia del tubo. Nell'esempio dei paragrafi precedenti, questi valori possono essere ricavati sulle curve di fig. 6-27 tenendo conto delle relazioni:

$$e_c = 0 + 115 \cos \omega t \qquad e_b = -(1250 - 230) \cos \omega t + 1250$$

I risultati sono riportati in tabella 13, e l'andamento della forma d'onda della corrente di griglia è tracciato in fig. 6-29.

TABELLA 13

VALORI NUMERICI DELLA POTENZA D'INGRESSO IN GRIGLIA

	ωt, gradi						
	0	15	30	45	60	75	90
cos ωt	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,000
e_c	115	111	99,6	81,4	57,5	29,7	0
e_b	230	265	366	528	740	986	1250
i_c, A	0,142	0,130	0,099	0,071	0,037	0,018	0,0
$e_c i_c$, watt	16,3	14,4	9,9	5,8	2,1	0,5	0,0
R_{in}, ohm	810	850	1010	1150	1560	1650	

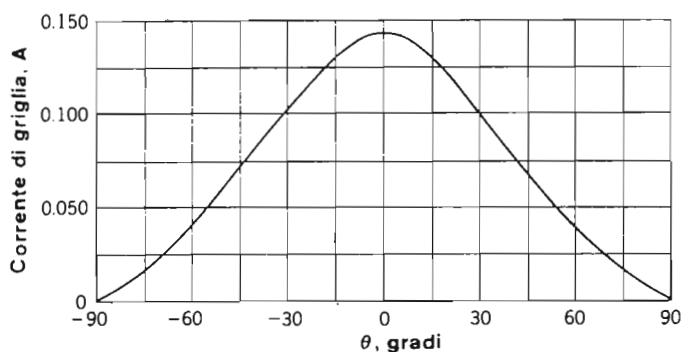



FIG. 6-19 — Forma d'onda della corrente di griglia per il tubo 805; E_{bb} = 1250 V, $e_{c, max}$ = 115 V, $e_{b, min}$ = 230 V.

Dal prodotto $e_c i_c$ si ricava la potenza istantanea d'ingresso e quindi la potenza media di ingresso in griglia è data da:

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_c i_c d\theta \tag{6-62}$$

L'integrale può essere calcolato con la regola dei trapezi; se infatti si divide l'intervallo tra 0 e 2π in n intervalli di larghezza uniforme $\Delta\theta$, si può scrivere:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y \, d\theta = \Delta\theta(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{6-63}$$

in cui y_0 è preso in corrispondenza di $\theta = 0$, y_n è uguale a zero, e la funzione è supposta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Nel particolare esempio considerato, scegliendo gli intervalli di 15°, cioè $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$, si ha:

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{12}(16{,}3 + 28{,}8 + 19{,}8 + \ldots + 1{,}0 + 0) \qquad (6\text{-}64)$$

tenendo conto dei valori della tabella 13. La potenza media di ingresso alla griglia risulta essere 3,4 watt, ossia 6,8 watt per entrambi i tubi.

L'amplificatore pilota deve fornire una potenza di picco di 16,3 watt, ed è buona regola progettarlo per un valore della potenza media metà di quello di picco, anche se esso deve in realtà fornire un valore medio di soli 6,8 watt, perché ciò assicura una migliore forma d'onda della tensione d'ingresso per le due griglie.

I circuiti di griglia presentano un carico medio di circa 1.000 ohm all'amplificatore pilota il ché significa che bisogna impiegare un trasformatore con rapporto di trasformazione in discesa per adattare il carico del circuito pilota a quello di griglia del circuito in classe B. È di solito conveniente, nel caso degli amplificatori pilota a tubi in classe A, impiegare un carico più elevato del normale per lo stadio pilota al fine di ridurre la distorsione.

In teoria, se l'amplificatore pilota impiega una coppia di tubi 2A3 in controfase, con una potenza di uscita di 9 o 10 watt su un carico di 2.000 ohm, il trasformatore di ingresso dello stadio in classe B dovrebbe avere un rapporto $a = \sqrt{2000/1000} = 1{,}4/1$ in discesa verso le griglie. In pratica si impiega un rapporto di circa 1,7/1 per aumentare il carico del circuito di uscita dello stadio pilota.

6-16. Invertitori di fase per amplificatori controfase.

All'ingresso di un amplificatore controfase occorrono due tensioni di ugual valore ed in opposizione di fase. In molti amplificatori a transistori ciò viene effettuato per mezzo di un trasformatore a presa centrale; in tal modo si realizza anche il necessario adattamento di impedenze.

In fig. 6-30 è riportato lo schema completo di un amplificatore controfase in classe B che impiega trasformatori di ingresso e di uscita. Le resistenze sugli emettitori servono per stabilizzare il circuito. Si è impiegata una piccola polarizzazione diretta tramite le resistenze di 2700 ohm e 33 ohm per evitare la *distorsione di intersezione*. La controreazione è applicata tramite R_1 e C al collettore dello stadio pilota T_1.

Vengono anche impiegati dei circuiti invertitori di fase che trasformano una singola tensione riferita a massa in due tensioni uguali ed opposte. Pur-

FIG. 6-30 — Amplificatore controfase in classe B con accoppiamento a trasformatore, impiegante transistori 2N 1415.

FIG. 6-31 — *a*) Invertitore di fase a separazione di carico, a transistori, e stadio finale. *b*) Invertitore di fase a separazione di carico a triodi. *c*) Circuito equivalente dello schema (*b*).

troppo i circuiti più semplici non sempre soddisfano queste specifiche ad ogni frequenza della banda passante, a causa dell'effetto delle capacità distribuite. Un semplice circuito adatto ad essere realizzato sia con transistori che con triodi è *l'invertitore di fase a separazione di carico* riportato in fig. 6-31. Il circuito impiega solo un componente attivo T_1, e la stessa corrente (a parte la corrente di base) circola attraverso entrambi i resistori di carico, per cui il circuito è effettivamente bilanciato. La stabilità è eccellente, per il carico sull'emettitore o sul catodo, ma il guadagno è minore dell'unità per ognuna delle due uscite.

Il guadagno può essere ottenuto riferendosi al circuito equivalente di fig. 6-31c, per il triodo, dal quale si ha:

$$E_g = E_s - I_p R_2 \qquad (6\text{-}65)$$

$$\mu E_g = I_p(r_p + R_1 + R_2) \qquad (6\text{-}66)$$

Se $R_1 = R_2 = R$ il guadagno all'uscita 1 è:

$$A = \frac{E_1}{E_s} = \frac{[-\mu/(\mu + 2)]R}{r_p/(\mu + 2) + R} \qquad (6\text{-}67)$$

Se $\mu \gg 2$ ne segue che:

$$A = \frac{1}{1 + 1/g_m R} \qquad (6\text{-}68)$$

Il guadagno è minore dell'unità, ma prossimo ad essa.

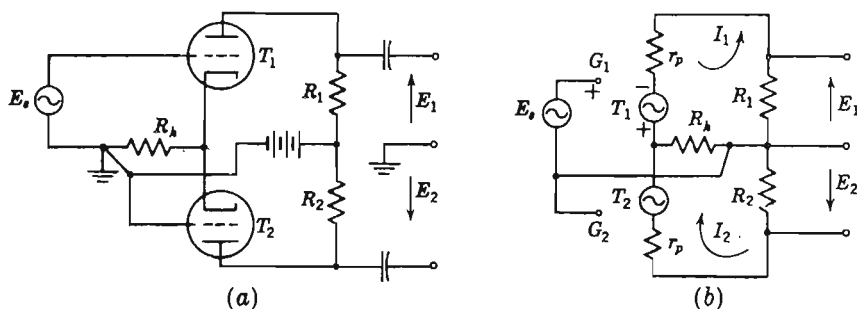



FIG. 6-32 — Invertitore di fase ad accoppiamento catodico e circuito equivalente.

L'invertitore di fase ad accoppiamento catodico di fig. 6-32 è di solito realizzato con un doppio triodo. Il segnale di ingresso E_s è applicato all'ingresso T_1, e il secondo tubo T_2 preleva il proprio segnale d'ingresso dal resistore catodico R_k. Le tensioni di griglia sono date da:

$$E_{g1} = E_s - (I_1 + I_2)R_k \qquad (6\text{-}69)$$

$$E_{g2} = -(I_1 + I_2)R_k \qquad (6\text{-}70)$$

Supponendo che i triodi abbiano parametri identici, le equazioni dei circuiti di uscita sono:

$$\mu E_{g1} = I_1(R_1 + r_p + R_k) + I_2 R_k$$
$$\mu E_{g2} = I_2(R_2 + r_p + R_k) + I_1 R_p$$

Le correnti di uscita sono:

$$I_1 = \frac{\mu[R_2 + r_p + (\mu + 1)R_k]E_s}{(R_1 + r_p)(R_2 + r_p) + (\mu + 1)R_k(R_1 + R_2 + 2r_p)} \qquad (6\text{-}71)$$

$$I_2 = \frac{-\mu(\mu + 1)R_k E_s}{(R_1 + r_p)(R_2 + r_p) + (\mu + 1)R_k(R_1 + R_2 + 2r_p)} \qquad (6\text{-}72)$$

Poiché $E_1 = -I_1R_1$ e $E_2 = -I_2R_2$ le due tensioni di uscita non saranno uguali se $R_1 = R_2$. Infatti, per $R_1 = R_2 = R$ le due tensioni di uscita saranno tra loro nel rapporto:

$$\left|\frac{E_1}{E_2}\right| = 1 + \frac{R + r_p}{(\mu + 1)R_k} \qquad (6\text{-}73)$$

e le uscite saranno bilanciate solo se $(\mu + 1)R_k$ è molto grande rispetto a $R + r_p$. Non è molto difficile soddisfare questa condizione; altrimenti si può ottenere il bilanciamento scegliendo le resistenze di carico in modo che sia:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + r_p/[(\mu + 1)R_k]}{1 - R_1/[(\mu + 1)R_k]} \qquad (6\ 74)$$

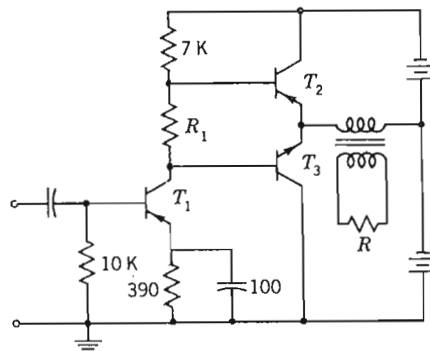



FIG. 6-33 — Inversione con un circuito a transistori a simmetria complementare.

Un altro tipo di circuito per l'inversione del segnale può essere ottenuto sfruttando le proprietà dei transistori complementari N-P-N e P-N-P, ossia a *simmetria complementare*, come nel caso di T_2 e T_3 della fig. 6-33. Questi transistori forniscono un'uscita identica a quella di uno stadio controfase

e lavorano praticamente in classe B. Un segnale di ingresso di una data polarità porta simultaneamente la base del N-P-N in conduzione e la base del P-N-P in interdizione. Il resistore R_1 è piccolo e serve solo per fornire una piccola polarizzazione positiva necessaria per far funzionare i transistori T_2 e T_3 all'interdizione estrapolata (pochi decimi di volt).

Per il progetto, ogni transistore deve essere considerato separatamente come un semplice amplificatore poichè i due transistori non operano simultaneamente. I transistori T_2 e T_3 possono essere acquistati in coppie adattate, in modo che le caratteristiche siano simili, ma invertite.

Il resistore di polarizzazione può essere sostituito da un diodo al silicio, come in fig. 6-34. La caduta di potenziale diretta ai capi di questo diodo è tale da polarizzare direttamente i transistori T_2 e T_3 all'interdizione estrapolata. Inoltre i diodi a giunzione hanno un coefficiente di temperatura della resistenza paragonabile a quello della giunzione base-emettitore dei transistori. Perciò il diodo dà luogo ad una variazione di polarizzazione che compensa la variazione, per effetto della temperatura, della resistenza della giunzione emettitore-base di T_2 e T_3.

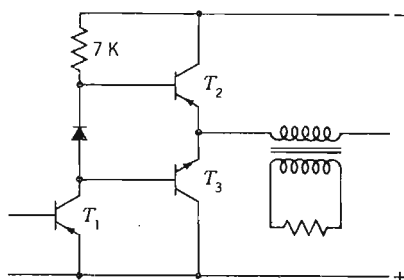



FIG. 6-34 — Impiego di un diodo per effettuare una polarizzazione con compensazione dell'effetto termico.

Il diodo al silicio infatti ha una diminuzione della caduta di tensione diretta di circa 2 mV per ^{0}C, variazione sufficiente a mantenere una polarizzazione praticamente costante nel normale campo di valori della temperatura.

Una siffatta polarizzazione a diodi è largamente usata nei circuiti a transistori.

PROBLEMI

6-1. Un amplificatore di potenza in classe A che utilizza un transistore al germanio P-N-P 2N2148 è accoppiato ad un carico di 500 ohm per mezzo di un trasformatore con $a = 1/9{,}1$. Le caratteristiche sono riportate in fig. 6-37. Posto $E_{cc} = 12$ volt, $I_c =$ $= 2{,}2$ ampère e un segnale sinusoidale di ingresso di 15 mA di picco, trovare: *a*) la potenza di uscita; *b*) P_d; *c*) il rendimento di potenza in presenza di segnale; *d*) la distorsione armonica totale. Si supponga il circuito di ingresso adattato.

6-2. Un amplificatore di potenza in classe A, impiegante un tetrodo a fascio 6V6, è accoppiato per mezzo di un trasformatore con rendimento di potenza del 78 per cento e rapporto di spire $a = 3$ ad un carico di 500 ohm. Dati $E_{bb} = 300$ volt, $E_{c2} =$ $= 250$ volt e $E_{c1} = -10$ volt, determinare la dissipazione anodica e la potenza di uscita sul carico, per un valore efficace di E_s di 7 volt.

6-3. Trovare la potenza d'uscita, il rendimento anodico, e la percentuale di seconda e terza armonica di un tetrodo a fascio 6L6, per i carichi di 2.500, 6.000 e 10.000 ohm accoppiati al circuito anodico mediante un trasformatore con rapporto 1/1. Il punto Q è determinato da $E_{bb} = 300$ volt, $E_{c2} = 250$ volt ed $E_{c1} = -15$ volt, con $i_{b,\,min} = 10$ mA.

6-4. Il circuito di fig. 6-35 deve fornire 0,25 watt su un carico di 8 ohm, con un transistore al silicio N-P-N le cui caratteristiche sono riportate in fig. 6-36. La resistenza in continua del trasformatore è trascurabile, ma il suo rendimento è solo del 75 per cento. La potenza P_d ammissibile per il transistore è di 20 watt a 25°C. Si scelga un carico adatto, si determini il rapporto di trasformazione del trasformatore, e si trovi il punto Q supponendo che I_b debba essere di 20 mA. Stabilire il valore adatto della resistenza R_B, il valore del segnale di ingresso (supponendo adattato il circuito di ingresso), e il guadagno di potenza. Se $K = 3{,}5$°C/watt, sarà termicamente stabile il circuito?

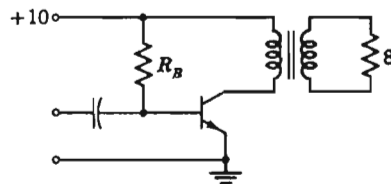



FIG. 6-35

6-5. Un tetrodo a fascio 6L6 opera nelle seguenti condizioni: $E_b = E_{c2} = 250$ volt, e $E_{c1} = -15$ volt, ed è accoppiato tramite trasformatore ideale ad un carico di 16 ohm. Trovare il rapporto di trasformazione per rendere minima la distorsione di seconda armonica con un segnale sinusoidale di ingresso di 15 volt di picco. Trovare la potenza di uscita per la fondamentale, la distorsione totale, e la dissipazione anodica con e senza segnale in ingresso.

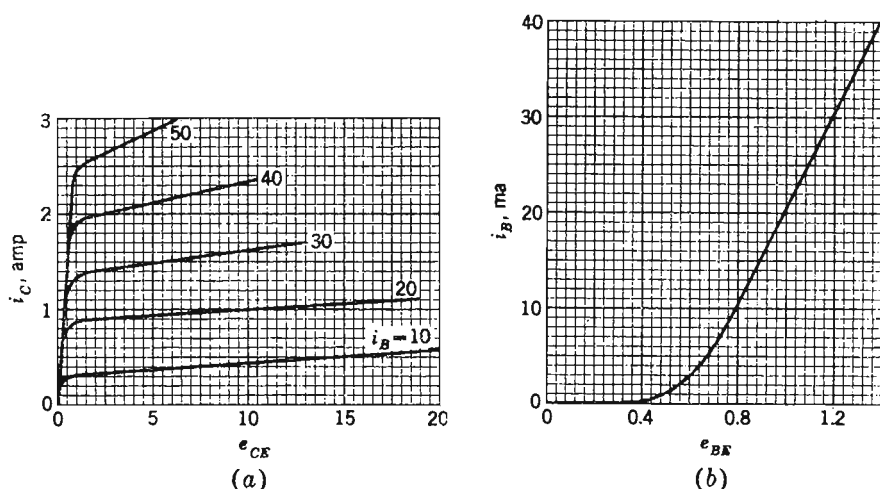



FIG. 6-36 — *a* e *b*

6-6. Per un amplificatore controfase in classe A si sono impiegati due transistori 2N 2148 (le cui caratteristiche sono quelle di fig. 6-37). Se è E_{cc} = 22,5 volt, determinare il rapporto di trasformazione necessario per accoppiare l'amplificatore ad un carico di 500 ohm, tenendo conto che P_d non deve superare 28 watt in totale. Determinare la polarizzazione di base, la potenza di uscita (il segnale di ingresso per ogni base è di 50 mA di picco), la dissipazione di collettore, e la distorsione armonica totale.

6-7. Due tetrodi a fascio 6V6 funzionano in controfase in classe AB con E_b = 300 volt, E_{c2} = 250 volt, e E_{c1} = — 20 volt. Determinare la potenza in uscita, il rendimento, e la dissipazione anodica per un segnale di ingresso di 14,1 volt efficaci tra griglia e massa, con un carico di 8.000 ohm tra i due anodi.

6-8. Un transistore al germanio 2N 2148 è impiegato nel circuito di fig. 6-22, con R_E = 1,0 ohm, R_2 = 300 ohm, R_1 = 5 ohm, R_L nulla in continua, e E_{cc} = 22 volt. In funzionamento normale si ha una corrente nel punto Q di 2 ampère e una corrente di picco di 4,1 ampère. Determinare se è possibile la degenerazione termica e la temperatura della giunzione a cui potrebbe verificarsi se K = 2,5°C/watt.

6-9. Due tubi tipo 805 a polarizzazione zero sono impiegati in un circuito controfase in classe B con E_b = 1.250 volt, E_{cc} = tensione di interdizione e un carico tra gli anodi di 7.000 ohm. Un milliamperometro in continua indica 400 mA nel ramo comune ai due circuiti anodici, con un segnale sinusoidale di ingresso. Quant'è la potenza alternativa in uscita, il rendimento del circuito di uscita e la dissipazione anodica? Quale valore massimo ammissibile di dissipazione anodica debbono avere questi tubi se si vuole una potenza massima in uscita di 300 watt?

6-10. Due tubi tipo 805 sono impiegati in un amplificatore ad audio frequenza in classe B, con E_b = 2.000 volt. Determinare la polarizzazione all'interdizione estrapolata, e impiegare questo valore. Supponendo $e_{b\,min}$ = 1,5 $e_{c\,max}$, determinare un carico

(*a*)

(*b*)

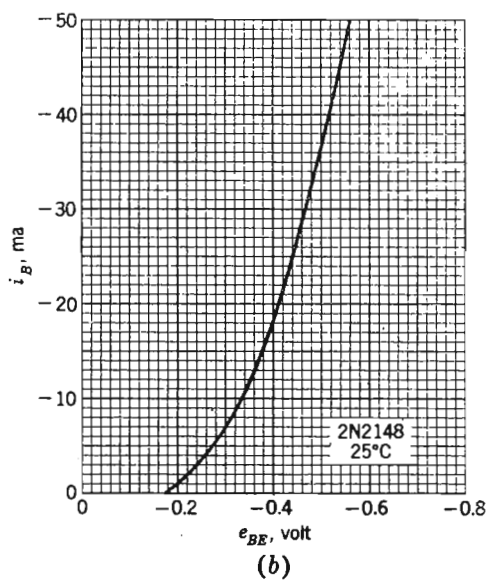
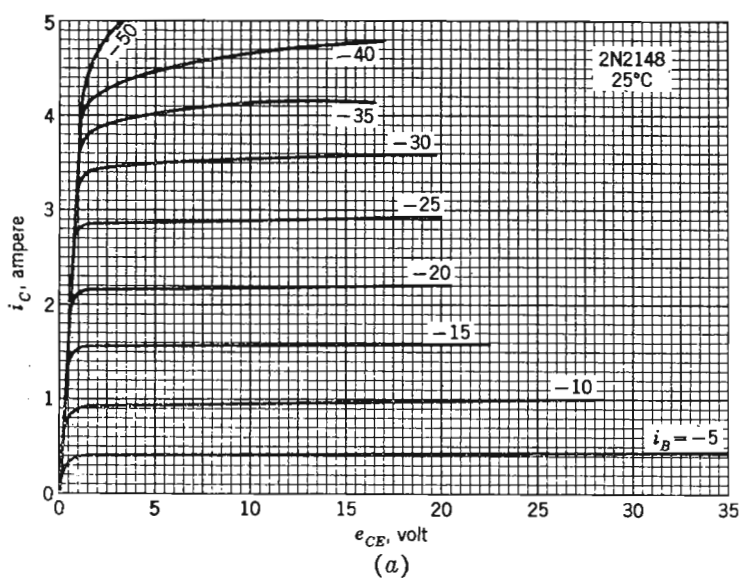



FIG. 6-37 — *a* e *b*

che fornisca un'uscita di almeno 500 watt dai due tubi, con una I_{dc} massima ammissibile di 250 mA per tubo e una dissipazione anodica ammissibile di 125 watt per tubo. Per il carico determinato, calcolare P_c, P_{in}, η_p, la dissipazione anodica e la distorsione di terza armonica dell'amplificatore. Determinare inoltre la potenza media fornita al circuito di griglia.

6-11. Un transistore al germanio è stato realizzato in modo da avere un $K = 100°C/watt$, ed è impiegato in un circuito con un grado di stabilità di 20 e con resistenza in continua del trasformatore d'uscita di 1,0 ohm. La corrente I_{co} è di 10 μA a 25°C e $E_{cc} = 25$ volt. Qual'è il massimo valore che può raggiungere I_c prima che si abbia la degenerazione termica?

BIBLIOGRAFIA

1. ESPLEY D. C.: The Calculation of Harmonic Production in Thermoionic Valves with Resistive Load, *Proc. IRE*, **21**: 1439 (1933).
2. THOMPSON B. J.: Graphical Determination of Performance of Push-pull Amplifiers, *Proc. IRE*, **21**: 591 (1933).
3. BARTON L. E.: High Audio Power from Relatively Small Tubes, *Proc. IRE*, **19**: 1131 (1931).
4. RYDER J. D.: "Electronic Fundamentals and Applications". 3d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
5. "Transistor Manual", 7th ed., General Electric Company, Semiconductor Products Department Syracuse, N.Y., 1964.

CAPITOLO VII

AMPLIFICATORI AD ACCOPPIAMENTO DIRETTO; CALCOLO ANALOGICO

Negli apparecchi di misura e nei calcolatori elettronici, spesso occorre conservare le componenti continue ed i transitori a bassa frequenza che si accompagnano ai segnali alternativi o comunque variabili nel tempo. Di conseguenza occorrono amplificatori la cui banda passante vada, dal lato inferiore, fino a frequenza zero. Questi amplificatori non potranno quindi fare uso di elementi reattivi per l'accoppiamento fra gli stadi e pertanto non si avrà distorsione di fase finchè non entrano in gioco le capacità parassite interne dei dispositivi; sfortunatamente, qualche volta, questi effetti diventano importanti già a qualche migliaio di Hertz.

La maggiore difficoltà che si incontra nella *amplificazione ad accoppiamento diretto* (*d-c*) è dovuto alla incapacità dei tubi e dei transistori di distinguere fra una variazione del segnale continuo di ingresso ed una variazione del circuito di polarizzazione o delle caratteristiche interne dei dispositivi; tutte queste variazioni provocano cioè una variazione della corrente di uscita. Gli amplificatori ad accoppiamento diretto presentano dunque dei particolari problemi per la stabilità a lungo termine.

È possibile progettare amplificatori ad accoppiamento diretto in grado di eseguire tutte le operazioni fondamentali sul segnale di ingresso e cioè addizione, sottrazione, integrazione e differenziazione. L'amplificatore d-c è perciò l'elemento base del *calcolatore a variabili continue o analogico*. In questo capitolo si studieranno questi circuiti.

7-1. Primi tipi di amplificatori ad accoppiamento diretto.

Se si eliminano i condensatori di blocco da un amplificatore ad accoppiamento RC è possibile fissare l'opportuno punto di riposo Q inserendo delle batterie di polarizzazione di griglia come è mostrato in fig. 7-1. Nella rete di accoppiamento fra gli stadi, è possibile calcolare E_{cc} se è noto I_{b1}. Se $E_{bb} = 250$ V, $I_{b1} = 1{,}5$ mA, $R_1 = 100$ k Ω, la caduta su R_1 sarà 150 V. Il potenziale del punto A è 100 V positivi rispetto al catodo, e questa sa-

rebbe la tensione di griglia in assenza della batteria di polarizzazione. Se si vuole fissare il punto Q di T_2 al valore $E_c = -10$ V occorre che sia $E_{cc} = -110$ V, il che comporta una batteria di grandi dimensioni fisiche.

Una batteria di questo tipo è costosa ed inoltre, a causa delle sue dimensioni, introduce una notevole capacità verso massa che limita la risposta dello stadio in alta frequenza.

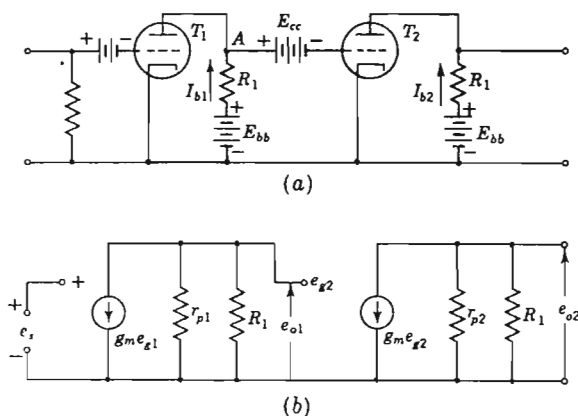



FIG. 7-1 — Amplificatore a due stadi ad accoppiamento diretto.

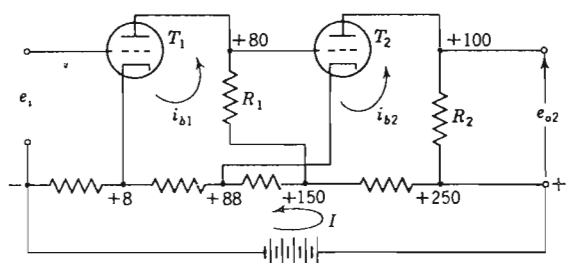



FIG. 7-2 — Amplificatore ad accoppiamento diretto del tipo Loftin-White.

Una delle prime variazioni di questo tipo di circuito è l'amplificatore di Loftin-White fig. 7-2. Un'unica batteria fornisce tutte le tensioni anodiche e di griglia a mezzo di un resistore a prese intermedie. La corrente I, che attraversa questo resistore, dovrebbe essere molte volte maggiore della corrente totale richiesta dall'amplificatore affinchè le varie tensioni risultino fissate in maniera quasi indipendente dalle correnti dei tubi e l'effetto sfavorevole dovuto alla reazione attraverso le resistenze del circuito di alimentazione sia ridotto al minimo. Valori tipici possono essere: +8 V per il catodo

di T_1 con che viene fissata la polarizzazione del primo stadio. La alimentazione di T_1 sarà a 150 — 8 = 142 V e poiché la caduta $I_{b1}R_1$ sarà ad esempio 62 V la tensione anodica effettiva sarà $E_{b1} = + 80$ V. Lo stesso valore ha il potenziale della griglia di T_2 rispetto a quella di riferimento. Per ottenere una polarizzazione di —8 V per T_2 basta connettere il catodo ad un punto del resistore che sia a +88 V cioè 8 V positivo rispetto alla propria griglia. L'anodo di T_2 è alimentato ad una tensione di 250 — 88 = 163 V rispetto al proprio catodo. Se $I_{b2}R_2 = 62$ V, $E_{b2} = + 100$ V rispetto al catodo.

Circuiti di questo tipo realizzano le condizioni volute riguardo alla frequenza limite inferiore che è zero, ma non sono oggi impiegati a causa delle alte tensioni di alimentazione, le elevate tensioni fra catodi e riscaldatori e la notevole dissipazione di energia nel resistore di alimentazione. Questi circuiti hanno inoltre un difetto comune a tutti i più semplici amplificatori d-c e cioè quello di risentire delle variazioni delle tensioni di alimentazione e dei parametri dei tubi o dei transistori dovute all'invecchiamento od alle variazioni di temperatura. Occorre quindi poter regolare lo zero con metodi automatici o manuali, in modo da riportare l'uscita a zero quando l'ingresso è nullo.

7-2. Circuiti di accoppiamento.

Nei moderni amplificatori d-c si usano diverse tecniche circuitali combinate fra loro, allo scopo di ridurre o eliminare i difetti fondamentali propri dei primi tipi di amplificatori ad accoppiamento diretto.

Per eliminare l'accoppiamento tramite l'impedenza comune agli stadi e la reazione introdotta dal resistore di alimentazione a molte prese, si possono impiegare due alimentatori, uno positivo e l'altro negativo rispetto a massa, come è mostrato in fig. 7-3. L'accoppiamento diretto fra gli stadi si ottiene attraverso i resistori R_1 ed R_2, i quali servono a mantenere il potenziale di polarizzazione di base T_2 ad un valore tale che l'uscita A sia ad un

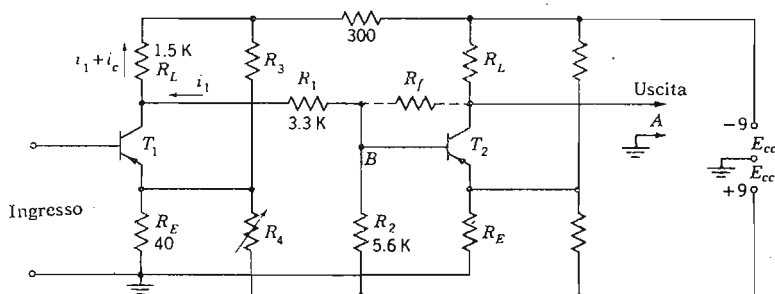



FIG. 7-3 — Accoppiamento mediante resistenze con alimentazione bilanciata.

valore medio fra quelli delle due tensioni di alimentazione cioè a massa, in assenza di segnale di ingresso. Questa condizione viene normalmente ottenuta variando R_4 con ingresso in corto circuito. Il prezzo che si paga per avere un certo controllo sui potenziali interni continui, è dato da una perdita di guadagno dovuta al divisore di tensione R_1, R_2 e dalla necessità di una doppia alimentazione.

Riferendosi alla figura 7-3, se e_{C1} ed e_{B2} sono i potenziali, riferiti a massa, del collettore di T_1 e della base di T_2 rispettivamente, allora è possibile calcolare il valore di R_1 e di R_2 dalle espressioni:

$$- E_{CC} + (i_1 + i_C)R_L = e_{C1}$$
$$e_{B2} - i_1R_1 = e_{C1}$$
$$E_{CC} - i_1R_L = e_{B2}$$

trascurando la corrente di ingresso nella base di T_2. Da queste relazioni si ricava:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{e_{C1} - e_{B2}}{E_{CC} + e_{C1} - i_CR_L} \qquad (7\text{-}1)$$

$$\frac{R_2}{R_L} = \frac{E_{CC} - e_{B2}}{E_{CC} + e_{C1} - i_CR_L} \qquad (7\text{-}2)$$

La parte di segnale in uscita dal primo stadio ed effettivamente applicata all'ingresso del secondo è data dalla relazione:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + (e_{C1} - e_{B2})/(E_{CC} - e_{B2})} \qquad (7\text{-}3)$$

In un circuito di questo tipo, se si sceglie i_CR_L pari alla metà di E_{CC} si ottengono dei valori opportuni per R_1 ed R_2.

Per migliorare la stabilità di guadagno, si può aggiungere una reazione interna negativa attraverso il resistore R_f. Dati gli elevati valori di h_{fe} per i transistori il guadagno totale del circuito può essere notevole anche se una parte di questo guadagno viene sacrificata per permettere la regolazione dello zero in uscita in assenza di segnale di ingresso. Un certo miglioramento nel guadagno effettivo si può ottenere con la piccola reazione positiva fra il circuito di collettore e quello di emettitore di T_1 attraverso R_3.

Un altro metodo di accoppiamento ricorre ad un inseguitore di emettitore (nel caso del triodo: inseguitore catodico), il quale serve anche come primo stadio per adattare l'uscita del trasduttore di segnali analogici, ad alta impedenza, all'ingresso del circuito a transistori che è, ordinariamente, a bassa impedenza. Come si è visto, le impedenze di ingresso dell'inseguitore di emettitore e dell'inseguitore catodico, sono date rispettivamente da βR_E e da μR_g con buona approssimazione.

Con la sua bassa impedenza di uscita, l'inseguitore di emettitore sarà chiaramente un ottimo generatore di segnale per un secondo stadio montato ad emettitore comune. Questa coppia di stadi presenta dunque un'alta resistenza di ingresso ed un alto guadagno. In figura 7-4 sono riportati i circuiti completi di alcuni amplificatori.

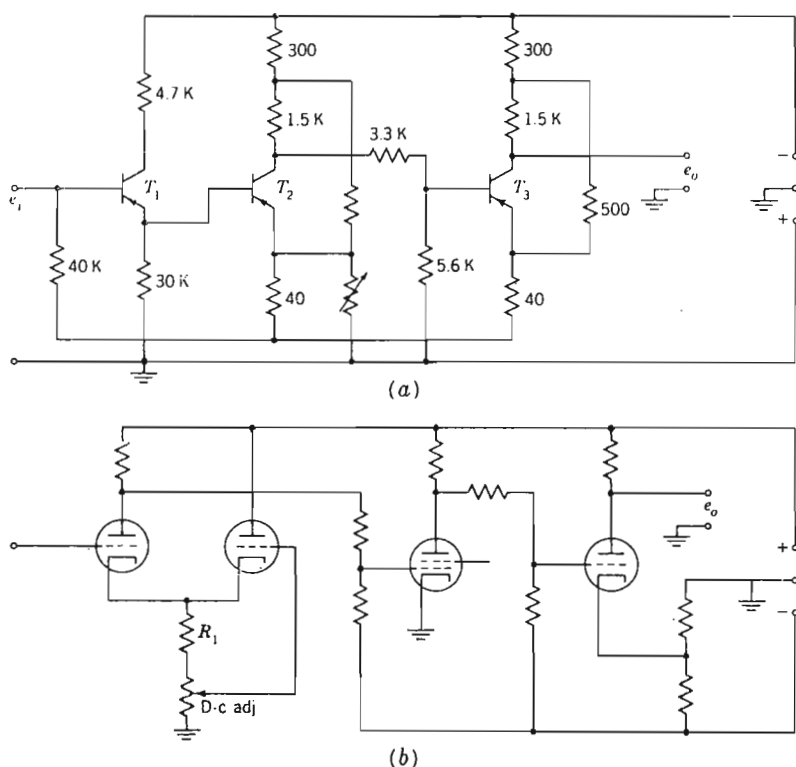



FIG. 7-4 — *a*) amplificatore D.C. a transistori. *b*) amplificatore D.C. a tubi.

7-3. La deriva degli amplificatori d-c.

La deriva dell'uscita dovuta a variazioni nella tensione di alimentazione può essere ridotta impiegando degli alimentatori stabilizzati. Tuttavia gli amplificatori a tubi sono soggetti a deriva dell'uscita anche a causa di variazioni della emissione del catodo, dei parametri dei tubi, oltre che a variazioni delle relazioni tensione-corrente dovute all'invecchiamento. Alcuni fattori che influenzano la deriva degli amplificatori e transistori sono le variazioni della corrente di saturazione inversa I_{CO} con la temperatura, le variazioni di h_{FE} con la temperatura, ed il coefficiente di temperatura della tensione di base E_{BE}.

Una variazione della corrente di uscita può quindi essere il risultato di una variazione del segnale di ingresso oppure dei parametri interni dei dispositivi in seguito a variazioni della temperatura. Per esempio, nei transistori al silicio la corrente di saturazione inversa è molto piccola alle temperature ordinarie, ma poiché è:

$$I_C = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_B + \frac{I_{CO}}{1 - \alpha} \tag{7-4}$$

ogni variazione di I_{co} dovuta alla temperatura, si riflette moltiplicata su I_C e non è possibile distinguere una variazione di questo tipo da una variazione della corrente di uscita prodotta da una variazione del segnale di ingresso.

Le variazioni di h_{FE} sono notevoli a temperature superiori a 60°C per il germanio e di 80°C per il silicio e possono produrre notevoli variazioni nella corrente di base dato che $I_B = I_C/(1+h_{FE})$. Questa variazione di I_B, moltiplicata per la resistenza del generatore, si manifesta anche essa come una variazione apparente del segnale di ingresso. Questo effetto può venire ridotto se si opera con piccole correnti di base e con generatori a bassa resistenza.

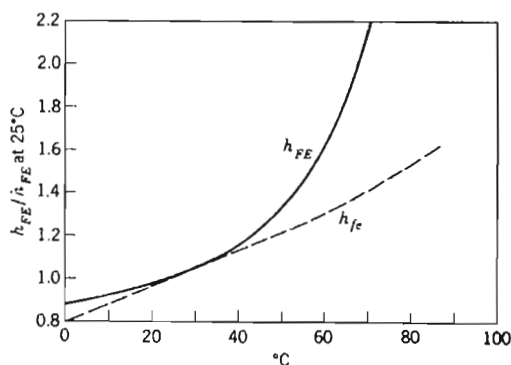



Fig. 7-5 — Andamento di h_{FE} per un transistore a germanio.

Le variazioni di h_{FE} sono simili per il germanio ed il silicio, il loro andamento è riportato in fig. 7-5. La tensione base emettitore è anche essa funzione della temperatura; E_{BE} presenta un coefficiente di temperatura di circa 2,5 mV/°C sia per il germanio che per il silicio. Questa variazione della tensione ai capi della giunzione, dovuta alla temperatura, non può essere distinta da una uguale variazione del segnale di ingresso. L'insieme di questi effetti è descritto dalla espressione:

$$I_C = I_{CO} - \alpha I_E$$

le cui variazione con la temperatura sono espresse da:

$$\frac{\Delta I_C}{\Delta T} = \frac{\Delta I_{CO}}{\Delta T} - \left(\alpha \frac{\Delta I_E}{\Delta T} + I_E \frac{\Delta \alpha}{\Delta T}\right) \tag{7-5}$$

I tre termini a destra rappresentano le tre quantità variabili con la temperatura che sono state ora esaminate.

A temperature inferiori a circa 80°C, il termine dominante è quello della corrente di saturazione inversa. Poiché I_{CO} per il silicio è molto più piccola che per il germanio, è indispensabile usare componenti al silicio nelle apparecchiature che subiscono forti variazioni di temperatura.

La deriva degli amplificatori è dunque equivalente all'inserzione di un generatore fittizio nel circuito di ingresso; la *cifra di deriva* di un amplificatore si definisce come *la variazione equivalente della tensione di ingresso per ora di funzionamento*. La cifra di deriva è dunque data dalla variazione di tensione di ingresso, necessaria per riportare la corrente di uscita al suo valore iniziale, dopo un'ora di funzionamento.

Questo tipo di perturbazione non viene ridotto per effetto di una controreazione applicata all'amplificatore d-c; infatti la tensione di deriva appare come applicata all'ingresso e quindi la tensione di uscita con reazione è

$$e_o = \frac{A}{1 - A\beta} (e_s + e_d) \tag{7-6}$$

dove e_s è il segnale di ingresso ed e_d la tensione equivalente di deriva. Entrambi i tipi di ingresso vengono cioè trattati allo stesso modo e la reazione non riesce a distinguere il segnale vero dall'altro.

Neanche un miglioramento del fattore di stabilità S è in grado di produrre un miglioramento apprezzabile. In un amplificatore d-c a due stadi, in cui il secondo stadio guadagna A_{i2}, si ha in uscita una variazione di corrente di collettore data da:

$$\Delta I_{C2} = A_{i2} S_1 \Delta I_{CO1} + S_2 \Delta I_{CO2}$$

se $\Delta I_{CO1} = \Delta I_{CO2}$, sarà

$$S_{totale} = \frac{\Delta I_{C2}}{\Delta I_{CO}} = A_{i2} S_1 + S_2 \tag{7-7}$$

ed è impossibile avere un notevole miglioramento, dato che i valori normali di S_1 sono compresi fra 5 e 10 ed il più basso valore possibile è uno. Anche con il valore unitario, si ottiene ugualmente una forte variazione poiché questa quantità è moltiplicata per A_i.

Per alcuni anni si è ricorsi alla regolazione manuale della polarizzazione di ingresso per compensare la deriva in uscita dovuta ai fenomeni descritti

Attualmente sono stati sviluppati dei sistemi automatici nonchè delle tecniche circuitali, basate sui circuiti bilanciati, che sono molto adatti per risolvere i problemi di deriva. Esamineremo ora alcuni di questi sistemi.

7-4. Compensazione della deriva catodica.

Le variazioni casuali della emissione catodica nei tubi degli amplificatori d-c possono essere dovute a variazioni della tensione del riscaldatore o ad effettivi cambiamenti del meccanismo di emissione interna. L'effetto di solito è notevole se si verifica nel primo tubo di un amplificatore, poichè ogni deriva in questo stadio viene moltiplicata per l'intero guadagno dell'amplificatore ed è dunque più grave che se avviene negli stadi successivi.

Un metodo per risolvere il problema di queste variazioni di tensione è il compensatore di Miller il quale impiega un altro tubo. Di solito si usa un doppio triodo e si fa l'ipotesi che entrambi i catodi abbiano caratteristiche identiche e che la deriva possa venir simulata da un generatore ad essa equivalente e_d posto nel punto comune dei due catodi. L'analisi del circuito mostra che il tubo amplifica la tensione di deriva e la riporta in ingresso in opposizione alla deriva stessa.

Dal circuito di fig. 7-6*b* si ha:

$$e_{g1} = e_i - e_d - (i_1 + i_2)(R_1 + R_2) \tag{7-8}$$

$$e_{g2} = -[e_d + (i_1 + i_2)R_1] \tag{7-9}$$

$$e_d + i_1(r_{p1} + R_1 + R_2 + R_3) + i_2(R_1 + R_2) = \mu_1 e_{g1} \tag{7-10}$$

$$e_d + i_1(R_1 + R_2) + i_2(r_{p2} + R_1 + R_2) = \mu_2 e_{g2} \tag{7-11}$$

Supponendo che i due triodi siano identici si ha:

$$i_1 = \frac{\mu e_i[r_p + R_2 + (\mu + 1)R_1] + e_d(\mu + 1)(\mu R_2 - r_p)}{(r_p + R_3)[r_p + R_2 + (\mu + 1)R_1] + (\mu + 1)(R_1 + R_2)r_p} \tag{7-12}$$

Si impone quindi la condizione che questa corrente sia indipendente dalla tensione di deriva cioè che $\partial i_1/\partial e_d = 0$; allora:

$$(\mu + 1)(\mu R_2 - r_p) = 0$$

da cui si ottiene:

$$R_2 = \frac{1}{g_m} \tag{7-13}$$

che è la condizione necessaria perchè venga compensata la deriva del catodo. A questa condizione si può soddisfare facilmente.

L'espressione del guadagno si semplifica nel modo seguente:

$$A = \frac{-i_1R_3}{e_i} = \frac{-\mu R_3}{2r_p + R_3} \qquad (7\text{-}14)$$

il che indica la presenza di una reazione di corrente, poiché la resistenza interna è più grande di quella di un solo tubo.

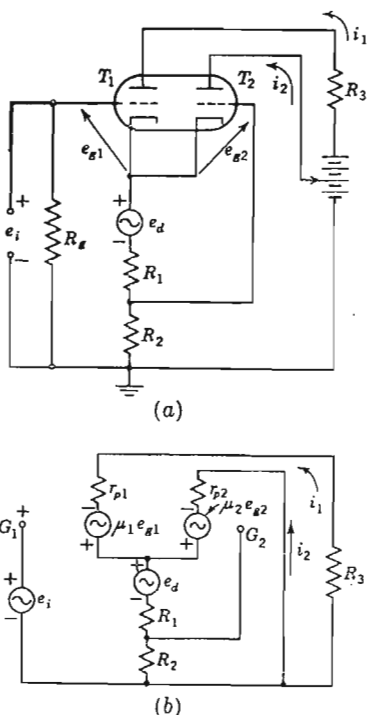



FIG. 7-6 — Analisi del circuito di Miller per la compensazione della deriva catodica.

Per gli amplificatori a tubi che lavorano con piccoli segnali, questo tipo di compensazione è molto utile. Essa non è adatta a compensare entro un ampio campo di tensioni del riscaldatore dato che g_m varia con l'emissione e quindi il valore di R_2 non può essere quello esatto per tutti i valori di tensione del riscaldatore.

7-5. Circuiti di polarizzazione non lineari.

Negli amplificatori a transistori, le tensioni di alimentazione sono relativamente basse ed è quindi possibile disporre tre stadi in cascata, come è

mostrato in fig. 7-7 aumentando solo di poco il valore della tensione di alimentazione E_{CC}. La polarizzazione del primo stadio è determinata dal resistore di emettitore R_2 e dalla rete R_f, R_1. Il resistore di emettitore sarà di valore piuttosto alto a causa delle alte tensioni di polarizzazione necessarie per T_2 e T_3; questo resistore introdurrà allora una notevole controreazione. Per evitare la perdita di guadagno che ne risulta, la maggior parte della polarizzazione necessaria per ciascuno stadio viene realizzata attraverso i diodi Zener D che danno delle cadute di tensione costanti; questi dispositivi non introducono reazione perchè la tensione che cade su di essi non varia con il segnale. I resistori R_3 ed R_4 devono avere un valore sufficientemente elevato per fissare i punti Q esattamente al valore voluto.

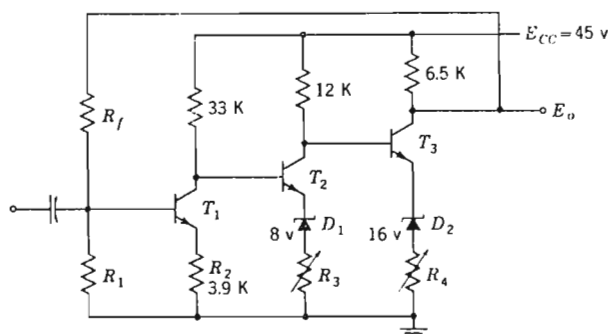



FIG. 7-7 — Polarizzazione di un amplificatore D-C mediante diodo Zener.

È possibile stabilizzare il punto Q nei riguardi delle variazioni di temperatura, usando degli elementi circuitali non lineari. In fig. 7-8*a*, si impiega un termistore T in parallelo ad un resistore fisso R in modo da realizzare un resistore di polarizzazione che varia con la temperatura nel modo desiderato. Poichè T presenta una resistenza con coefficiente di temperatura negativo, la tensione ai capí del resistore diminuirà al crescere della temperatura e tenderà a compensare le variazioni di E_{BE} con la temperatura.

In fig. 7-8*b*, un diodo al silicio direttamente polarizzato elimina la *distorsione di intersezione* nell'amplificatore controfase in classe AB. Poichè il diodo si comporta, agli effetti della temperatura, in maniera simile al circuito di base del transistore, la polarizzazione risulterà compensata relativamente alle variazioni di E_{BE}. La corrente che circola nel resistore R ed in D, deve essere superiore al picco di corrente del segnale, per evitare l'interdizione del diodo.

7-6. Amplificatori differenziali.

È possibile ridurre la deriva degli amplificatori ad accoppiamento diretto, con elementi di compensazione come quelli di fig. 7-8; ma i metodi più efficaci sono quelli che fanno uso di un secondo tubo o transistore come

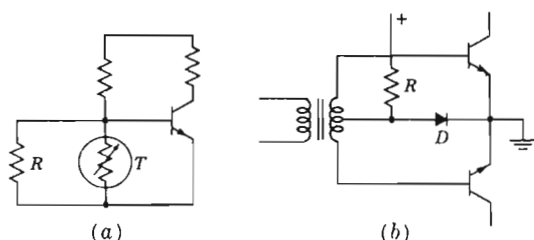



FIG. 7-8 — Compensazione non lineare per le variazioni di temperatura.

elemento di bilanciamento. In fig. 7-9 si riporta un circuito bilanciato a triodi detto *amplificatore differenziale.* In fig. 7-9*a*, la tensione di uscita è prelevata fra i due anodi ed è proporzionale alla differenza dei due segnali $e_{i1}-e_{i2}$. Agendo sull'elemento variabile posto fra i resistori di carico, è possibile annullare l'uscita in condizioni di ingresso nullo. Le variazioni della tensione di alimentazione influiscono nello stesso modo su entrambi i triodi e quindi non compaiono nell'uscita, a causa del collegamento differenziale, se i due triodi sono uguali.

Un'analisi simile a quella che ha condotto alle equazioni (6-71) e (6-72), nel caso dell'amplificatore ad accoppiamento catodico, permette di ricavare le seguenti espressioni per le due tensioni di uscita:

$$e_{o1} = -I_1R_{L1} = \frac{-\mu R_{L1}\left[\left(\frac{R_{L2}+r_p}{\mu+1}+R_K\right)e_{i1}-R_Ke_{i2}\right]}{[(R_{L1}+r_p)(R_{L2}+r_p)]/(\mu+1)+R_K(R_{L1}+R_{L2}+2r_p)} \tag{7-15}$$

$$e_{o2} = -I_2R_{L2} = \frac{-\mu R_{L2}\left[\left(\frac{R_{L1}+r_p}{\mu+1}+R_K\right)e_{i2}-R_Ke_{i1}\right]}{[(R_{L1}+r_p)(R_{L2}+r_p)]/(\mu+1)+R_K(R_{L1}+R_{L2}+2r_p)} \tag{7-16}$$

Se R_K è grande rispetto a $(R_L+r_p)/(\mu+1)$, le espressioni si semplificano notevolmente e diventano:

$$e_{o1} = \frac{-\mu R_{L1}}{R_{L1}+R_{L2}+2r_p}(e_{i1}-e_{i2}) \tag{7-17}$$

$$e_{o2} = \frac{-\mu R_{L2}}{R_{L1}+R_{L2}+2r_p}(e_{i2}-e_{i1}) \tag{7-18}$$

dalle quali si vede perchè questo circuito è detto *amplificatore differenziale.*

Se R_{L1} ed R_{L2} sono uguali, allora, per il circuito di fig. 7-9*a* con *ingresso differenziale* ed *uscita differenziale* vale la formula:

$$A_{dd} = \frac{e_{o1} - e_{o2}}{e_{i1} - e_{i2}} = \frac{-\mu R_L}{r_p + R_L} \tag{7-19}$$

che è il guadagno di un normale amplificatore con catodo a massa. Si noti bene che la (7-19) si ottiene direttamente dalle (7-15) e (7-16) senza alcuna approssimazione.

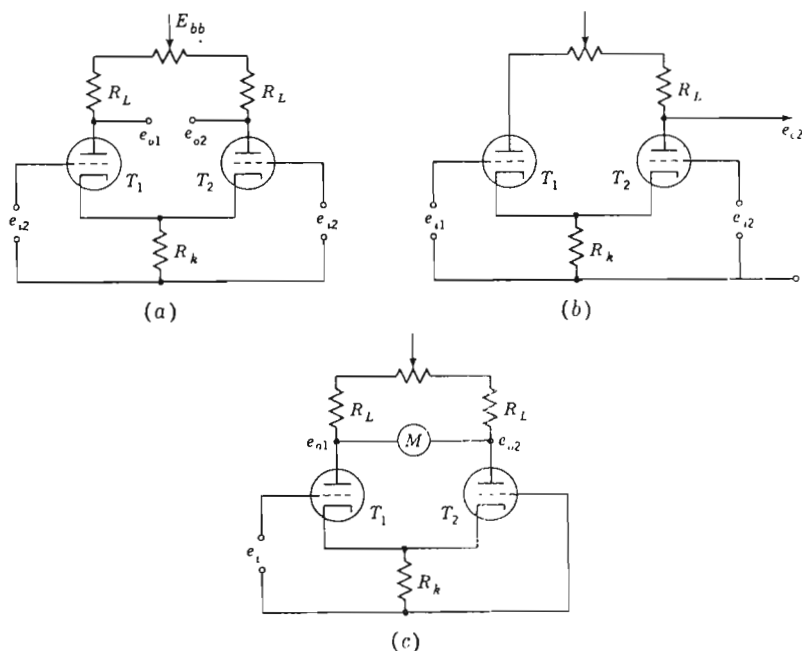



FIG. 7-9 — Amplificatori differenziali.

Per il circuito di fig. 7-9*b* con ingresso differenziale ed uscita sbilanciata, cioè con $e_{o1} = 0$, $R_{L1} = 0$, si ha:

$$A_{ds} = \frac{e_{o2}}{e_{i1} - e_{i2}} = \frac{\mu R_L}{2r_p + R_L} \tag{7-20}$$

ed il circuito ha un'unica uscita proporzionale alla differenza fra i due segnali di ingresso.

Il circuito ad ingresso bilanciato ed uscita differenziale, mostrato in fig. 7-9*c*, viene comunemente usato con uno strumento M indicatore nel *voltmetro a valvole.*

Se M carica il circuito in maniera trascurabile, si ha

$$e_M = \frac{\mu R_L e_1}{r_p + R_L} \tag{7-21}$$

In questo strumento di misura (a corrente continua) si realizza dunque sia l'indipendenza dalle variazioni delle tensioni di alimentazione, sia una alta resistenza di ingresso dovuta al primo stadio montato ad inseguitore catodico.

Tensioni di rumore ed in particolare ronzii, possono comparire con i segnali utili, ad entrambi gli ingressi dell'amplificatore differenziale. Questi segnali, comuni ad entrambi gli ingressi, non appariranno all'uscita del circuito con ingresso ed uscita differenziale, se tutti i componenti omologhi sono uguali. Nel caso invece di ingresso differenziale ed uscita sbilanciata, come in fig. 7-9*b*, il segnale comune non verrà completamente eliminato se non per R_k infinito. È possibile dimostrare quantitativamente quanto si è detto.

L'ingresso del tubo T_2 è la differenza fra il segnale e_{i2} applicato alla griglia ed un segnale proporzionale ad e_{i1} presente ai capi del resistore catodico. Il segnale su R_k è l'uscita di un inseguitore catodico ed è quindi proporzionale a $[\mu/(\mu + 1)]\, R_k$ e solo se R_k è quasi infinita il guadagno sarà uguale alla unità ed ai capi di R_k vi sarà esattamente e_{i1}; in pratica quindi gli ingressi non possono venire completamente bilanciati.

Una cifra di merito che indica in che grado un amplificatore differenziale si avvicina alla condizione di perfetto bilanciamento, è la reiezione del segnale comune CMR (dall'Inglese: common mode rejection) che si definisce come:

$$\text{CMR} = \frac{\text{guadagno differenziale}}{\text{guadagno del segnale comune}} = \frac{A_{ds}}{\begin{pmatrix}\text{guadagno con gli}\\ \text{ingressi 1 e 2 uguali}\end{pmatrix}} \tag{7-22}$$

Per il circuito di fig. 7-9*b*, il guadagno differenziale è dato dalla equazione (7-20). Il guadagno per un segnale comune ai due ingressi, si ricava dalla eq. (7-16) ponendovi $e_{i1} = e_{i2}$. Con $\mu \gg 1$ ed $R_k \gg (R_L + r_p)/(\mu + 1)$ (come si era già supposto prima), si trova:

$$A_{CM} = \frac{-\, R_L r_p}{R_k(2r_p + R_L)} \tag{7-23}$$

Il rapporto CMR indica il comportamento del circuito quando due segnali eguali o uno stesso rumore vengono applicati ai due ingressi:

$$\text{CMR} = \frac{\mu R_L/(R_L + 2r_p)}{-\, R_L r_p/[R_k(2r_p + R_L)]} = -\, g_m R_k \tag{7-24}$$

Questa espressione indica ancora che R_K deve essere grande. In pratica questo rapporto ha un valore di qualche migliaio e si hanno così più di 60 db di discriminazione nei riguardi del segnale indesiderato.

Gli amplificatori d-c a transistori si giovano notevolmente delle tecniche di montaggio differenziale con le quali è possibile compensare la deriva dovuta a variazioni di temperatura. Si producono oggi dei transistori costruiti espressamente per circuiti differenziali; si tratta di coppie di transistori, scelti in modo da avere caratteristiche identiche, montati su di un unico supporto e racchiusi nella stessa capsula.

Le variazioni di temperatura sono le stesse per entrambi i componenti e producono effetti uguali su h_{FE} ed E_{BE}. La variazione di E_{BE} che ne risulta può essere ridotta a valori dell'ordine dei 3 μV per ^{0}C.

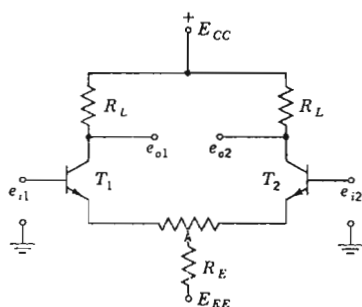



FIG. 7-10 — Amplificatore differenziale con accoppiamento di emettitore.

In fig. 7-10 è riportato un amplificatore differenziale a transistori ad un solo stadio. Il funzionamento è simile a quello dell'eguale circuito a triodi; all'uscita differenziale, il guadagno vale:

$$A_{dd} \cong \frac{R_L}{h_{ie}} \tag{7-25}$$

mentre l'ingresso presenta l'alta resistenza di ingresso propria del circuito ad *emitter follower*.

In figura 7-11 è mostrato un amplificatore a due stadi. Gli stadi successivi potranno non essere differenziali perché la deriva di questi stadi, riportata in ingresso, sarà piccola rispetto alla deriva residua che comunque si avrà all'ingresso dell'amplificatore.

È possibile ridurre la deriva di E_{BE} con la temperatura a qualche frazione di millivolt per ^{0}C; la reiezione dei segnali comuni aumenta se si fa uso del circuito fra A e B di fig. 7-11 in sostituzione di R_E.

Se si sceglie R_E di valore elevato in modo da avere una buona CMR, questa resistenza insieme con E_{EE} costituisce un generatore a corrente costante. Il transistore T_5 ed il diodo Zener forniscono appunto una corrente costante al primo stadio.

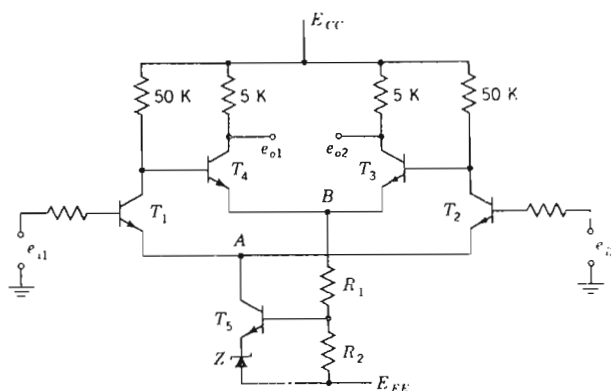



FIG. 7-11 — Reiezione del modo comune.

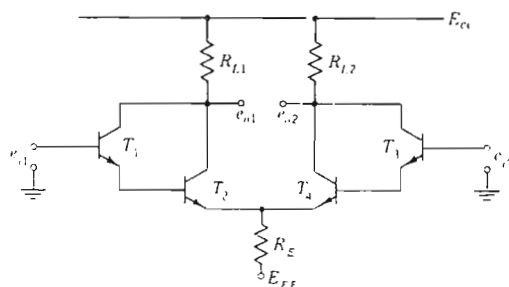



FIG. 7-12 — Ingresso a Darlington per un amplificatore differenziale.

Il potenziale del punto B non varia per un ingresso differenziale ma varia per ogni segnale comune ai due ingressi; una porzione di questo segnale comune, presente in B, viene usata come tensione base-emettitore per T_5 (caduta ai capi di R_2). In questo modo la corrente costante di T_5 viene leggermente modificata ed introduce nel circuito di emettitore di T_1 e T_2 una piccola componente di controreazione, variabile, in modo da ridurre la ampiezza del segnale comune presente sugli emettitori del primo stadio dell'amplificatore. Sono stati così ottenuti valori del CMR anche di 100 db in circuiti con ingresso differenziale ed uscita sbilanciata. Talora i circuiti differenziali devono prelevare i loro ingressi da circuiti ad altissima resistenza. Il circuito di Darlington di fig. 7-12 ha dei valori piuttosto bassi di corrente di base a

causa del guadagno di corrente di T_1 e T_3. Una bassa corrente di base comporta anche un minore effetto termico dovuto a variazioni di h_{FE}. Il guadagno totale di corrente è approssimativamente $\beta_1\beta_2$.

Queste ora descritte, sono le tecniche che impiega il progettista di circuiti per risolvere il problema della deriva termica negli amplificatori d-c a transistori.

7-7. Amplificatori modulati a chopper.

È possibile convertire una corrente unidirezionale lentamente variabile in una corrente alternata ad essa proporzionale e di fase dipendente dalla polarità del segnale originario, facendo uso di un interruttore sincrono detto *chopper*. La tensione alternativa viene quindi amplificata da un normale amplificatore per tensioni alternative. L'uscita viene utilizzata in forma alternativa oppure viene trasformata di nuovo in continua mediante rettificazione. Questo metodo è molto soddisfacente se si devono amplificare segnali lentamente variabili (cioè compresi in una banda stretta) ed annulla i problemi di deriva.

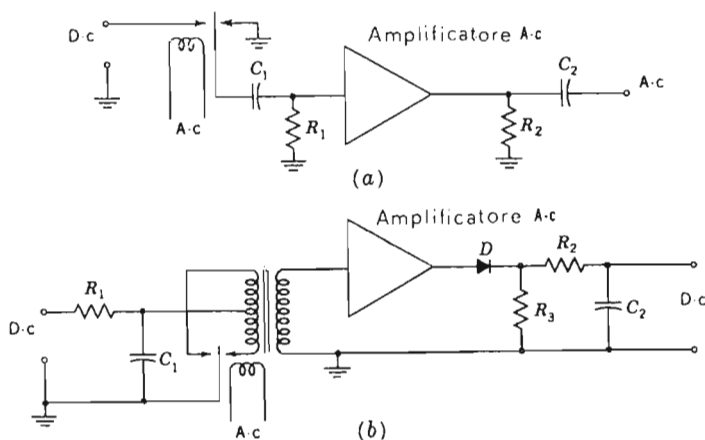



Fig. 7-13 — *a*) amplificatore a chopper con uscita a.c. *b*) ingresso a trasformatore e rettificatore a diodo per uscita d.c.

Un chopper meccanico è semplicemente un interruttore elettromagnetico pilotato da una corrente alternata. La frequenza normale di funzionamento di un chopper è di 60 Hz; si costruiscono chopper meccanici che funzionano anche a 400 Hz.

La fig. 7-13*a* illustra il funzionamento di questo dispositivo; il chopper connette l'ingresso dell'amplificatore alternativamente al segnale variabile

ed a massa. Quando il contatto mobile è chiuso a sinistra, il condensatore C_1 si carica attraverso R_1 e nell'amplificatore viene introdotto una tensione di una certa polarità; quando il contatto si sposta a destra, C_1 viene connesso a massa e si scarica attraverso R_1 facendo circolare una corrente di verso opposto alla prima, generando così il secondo semiperiodo della corrente alternata all'ingresso dell'amplificatore. In tal modo il condensatore fa passare una onda quadra ed annulla il valore medio della tensione.

In fig. 7-13*b*, si impiega un trasformatore di ingresso; questo tipo di montaggio è particolarmente utile per adattare dei dispositivi a bassa impedenza ad amplificatori con alte impedenze di ingresso. Spesso questi dispositivi a chopper vengono impiegati per l'amplificazione di tensioni continue provenienti da termocoppie che misurano e controllano la temperatura di forni industriali.

Se si richiede che l'uscita abbia la stessa forma dell'ingresso allora occorre eliminare tutte le componenti di frequenza più alta introdotte dalla commutazione; questa funzione viene assolta dal filtro di uscita R_2C_2, la cui costante di tempo deve essere grande rispetto al periodo di commutazione; in pratica la sua frequenza di taglio superiore deve essere un decimo della frequenza di commutazione. La necessità di eliminare o almeno attenuare i transitori impone un limite preciso alla banda passante del sistema. Con un chopper che funziona a 60 Hz, la condizione fondamentale cui deve soddisfare il filtro è di ridurre la banda passante al campo di frequenze fra zero e 6 Hz.

Se si impiega un transistore come chopper, aumenta la velocità di commutazione possibile e quindi si allarga la banda passante del complesso. In fig. 7-14 sono mostrati alcuni tipi di chopper a transistori. Il circuito di fig. 7-14*a* è quello più comune.

Quando l'uscita ad onda quadra del trasformatore pilota polarizza positivamente la base, il transistore chiude il circuito e la tensione continua di ingresso appare ai capi di R_2. Quando la base diventa negativa, il transistore si interdice e la tensione ai capi di R_2 è zero.

Il transistore introduce una piccola caduta di tensione quando è in saturazione mentre quando è aperto, circola una piccola corrente di errore I_{CO}. Entrambi questi effetti avranno una piccola influenza se vengono commutati dei segnali di notevole ampiezza. Il circuito di fig. 7-14*b* realizza la compensazione del segnale che si ha a transistore interdetto, usando un secondo transistore; esso è utile nel caso di impiego con generatori a bassa resistenza poiché ha un commutatore in serie al segnale ed uno in derivazione. Quando T_A conduce, la giunzione base collettore di T_B è inversamente polarizzata; per il successivo mezzo ciclo della tensione di commutazione, durante il quale T_B conduce, la giunzione di T_A è inversamente polarizzata.

La corrente di dispersione di T_A viene derivata da T_B durante il semi-

periodo in cui T_A è interdetto e quindi non attraversa il resistore di carico; la corrente di dispersione di T_B passa quasi esclusivamente attraverso T_A, nell'altro semiperiodo, se R è grande. Le tensioni di soglia di entrambi i transistori vengono applicate allo stesso modo ad R nei due semiperiodi successivi; questa tensione che non si inverte di segno viene filtrata da C come una componente continua.

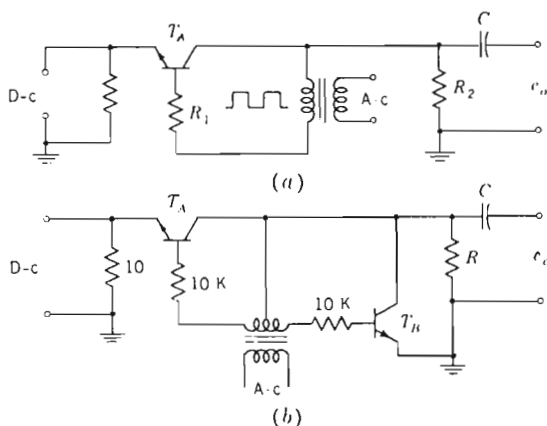



FIG. 7-14 — *a*) chopper serie. *b*) circuito a chopper per generatori a bassa impedenza.

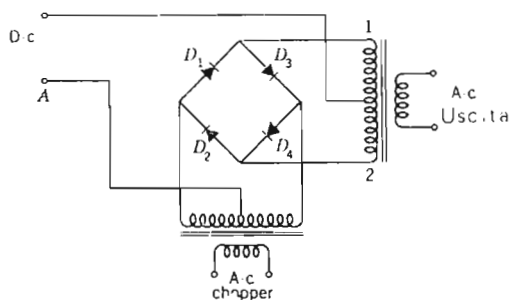



FIG. 7-15 — Modulatore ad anello.

Si producono delle coppie di transistori identici in modo che le variazioni di I_{CO} dovute a variazioni di temperatura possano essere compensate entro il normale campo di temperature; si ottengono così delle tensioni differenziali di soglia inferiori ai 75 μV. La resistenza serie che presenta il circuito di fig. 7-14*b* è dell'ordine di $20 \div 40$ Ω soltanto.

Come chopper si può anche impiegare un ponte bilanciato di diodi come quello di fig. 7-15. Quando si applica al ponte una corrente alternata, i diodi D_1 e D_3 conducono per un semiperiodo, durante il quale il terminale di in-

gresso A viene connesso al terminale 1 del trasformatore di uscita; nel semiperiodo successivo, conducono i diodi D_2 e D_4 i quali connettono A al terminale 2 del trasformatore, producendo in tal modo una tensione alternativa. I diodi non sono perfetti in quanto presentano una resistenza di qualche ohm in polarizzazione diretta; la caduta di tensione che ha origine sarà piccola per piccole correnti, e può essere ridotta al minimo impiegando diodi con caratteristiche opportune.

7-8. Amplificatori ad accoppiamento diretto stabilizzati a chopper.

Gli amplificatori differenziali, costruiti con transistori di caratteristiche identiche, riducono la deriva al livello del microvolt. La tecnica dell'*amplificatore stabilizzato a chopper* è stata spesso impiegata nei circuiti con tubi a vuoto.

Poiché la deriva è un fenomeno a frequenza *estremamente bassa*, il segnale può venire applicato contemporaneamente ad un amplificatore per tensioni alternate con modulazione a chopper, il quale al solito avrà una stretta banda passante, ed, attraverso una rete R-C, ad un amplificatore ad accoppiamento diretto con ingresso differenziale, a larga banda. In questo modo le componenti a bassa frequenza vengono notevolmente amplificate con una stretta banda passante, ed il segnale di deriva viene riportato in ingresso per realizzare la stabilizzazione. Le frequenze più alte di quelle che passano nell'amplificatore a chopper, vengono amplificate dal normale amplificatore d-c. La figura 7-16 illustra lo schema più comune.

In effetti in questo circuito, l'amplificatore d-c e quello a-c a chopper sono disposti in serie per le basse frequenze. In fig. 7-17 è mostrato il dia-

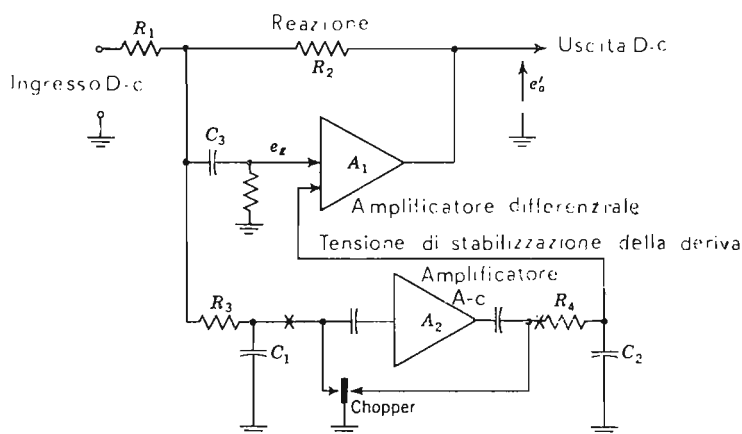



FIG. 7-16 — Amplificatore d.c. stabilizzato a chopper.

gramma guadagno frequenza di questo circuito; si vede che, per le frequenze di deriva, si ha un guadagno più elevato, fornito da A_2 dell'amplificatore a chopper.

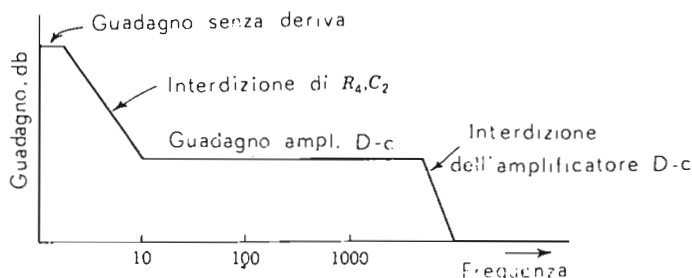



FIG. 7-17 — Andamento del guadagno in funzione della frequenza per un amplificatore d.c. stabilizzato a chopper.

Ogni segnale di deriva, lentamente variabile, viene riportato in ingresso attraverso R_2 e carica la C_1 del filtro di ingresso dell'amplificatore a chopper. La tensione ai capi di C_1 viene resa alternata, amplificata e quindi rettificata a mezzo di un unico chopper. La rete R_4, C_2 elimina le componenti alternative dovute al chopper ed il segnale applicato ad uno degli ingressi dell'amplificatore differenziale agisce come tensione di stabilizzazione della deriva. In questo modo la tensione di ingresso equivalente alla deriva diventa virtualtualmente nulla. Il circuito di ingresso dell'amplificatore differenziale è del tipo mostrato in fig. 7-18.

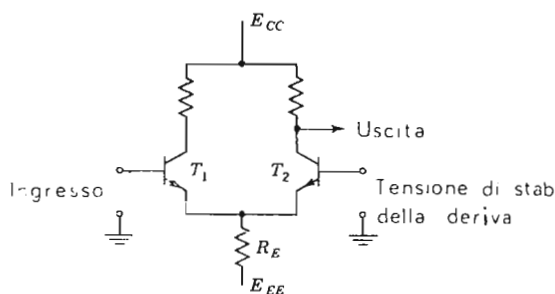



FIG. 7-18 — Amplificatore differenziale.

Con riferimento alla fig. 7-16, detto e_g il segnale di ingresso dell'amplificatore differenziale, l'uscita sarà

$$e_o = -A_1 e_g$$

In cui A_1 è il guadagno dell'amplificatore differenziale. Se si aggiunge a questo il guadagno A_2 dovuto all'amplificatore in alternata, l'uscita diventa

$$e'_o = - A_1 A_2 e'_g - A_1 e'_g$$

In cui e'_g è l'ingresso in presenza dell'amplificatore stabilizzatore. C'è da notare che A_1 ed A_2 hanno campi di frequenza differenti a causa rispettivamente del filtro di ingresso e del chopper. Così un segnale di frequenza bassissima, come una deriva, viene amplificato dal guadagno di $A_1 \cdot A_2$, mentre un segnale a frequenza più elevata, viene amplificato solo dal guadagno A_1.

Se la deriva dell'uscita deve essere ridotta allo stesso livello con o senza l'amplificatore stabilizzatore, deve essere $e_o = e'_o$ cioè

$$e'_g = \frac{e_g}{1 + A_2} \qquad (7\text{-}26)$$

così la cifra di deriva dell'amplificatore differenziale si riduce del fattore $1/(1+A_2)$ a causa del guadagno introdotto dall'amplificatore stabilizzato a chopper. In questo modo si ottiene una migliore cifra di deriva con una banda passante più ampia di quella possibile con i soli amplificatori a chopper.

L'elevata costante di tempo del filtro di uscita dell'amplificatore stabilizzato, consente di stabilizzare simultaneamente parecchi amplificatori con un solo amplificatore a chopper.

Si usano dei commutatori azionati da un motore, mediante i quali si seziona l'amplificatore a chopper nei punti x,x di fig. 7-16 e lo si connette successivamente a ciascuno dei vari amplificatori d-c. Il filtro conserva inalterata la propria tensione durante l'intero ciclo di commutazione e d'altra parte la deriva cambia lentamente, cosicché non è necessario correggere la tensione di uscita del filtro con continuità. In tal modo si riduce il costo della stabilizzazione di un gran numero di amplificatori.

7-9. L'amplificatore operazionale.

Spesso si impiegano gli amplificatori d-c per compiere operazioni matematiche come ad esempio l'addizione e l'integrazione; quando vengono usati per questo scopo si usa chiamarli *amplificatori operazionali.* Nel loro impiego possono entrare in gioco sia segnali lentamente variabili o transitori che componenti continue. Si può usare quasi ogni combinazione delle varie tecniche illustrate in precedenza purché con esse si ottenga un amplificatore lineare, ad accoppiamento diretto e con un numero dispari di sfasamenti di 180°.

Un tale circuito, rappresentato in fig. 7-18 con il simbolo dell'amplificatore, presenterà un guadagno a ciclo aperto.

$$A = -\frac{e_o}{e'} \tag{7-27}$$

in cui il segno meno indica un numero dispari di inversioni di fase.

Le tensioni e le correnti, che vengono trattate dall'amplificatore, sono funzioni istantanee del tempo, legate dalle ordinarie leggi dell'elettrotecnica

$$e = Ri \qquad e = Lsi \qquad e = \frac{1}{Cs}\, i$$

con s = d/dt ed 1/s che implica la operazione di integrazione rispetto al tempo. In generale è possibile indicare una qualunque di queste relazioni con il simbolo

$$e = Z(s)i \tag{7-28}$$

in cui Z(s) si chiama *impedenza operazionale.*

È possibile eseguire una analisi generale del funzionamento del circuito di fig. 7-19, se non si specificano gli elementi $Z_i(s)$ e $Z_g(s)$. In seguito si possono sostituire le effettive relazioni e/i di questi elementi e quindi definire il funzionamento del circuito.

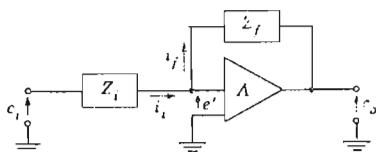



FIG. 7-19 — Amplificatore operazionale.

L'ingresso e_i viene applicato attraverso $Z_i(s)$ insieme ad un segnale di reazione introdotto attraverso $Z_f(s)$. Se l'amplificatore ha un'impedenza di ingresso molto alta, è possibile trascurare la corrente che entra nell'amplificatore rispetto ad i_i ed i_f e scrivere:

$$i_i = i_f \tag{7-29}$$

Questa uguaglianza di correnti si può scrivere, usando la Eq. (7-28)

$$\frac{e_i - e'}{Z_i(s)} = \frac{e' - e_o}{Z_f(s)} \tag{7-30}$$

La definizione di guadagno a ciclo aperto, consente di eliminare e′ e si ha:

$$e_o \left\{ 1 + \frac{1}{A} \left[1 + \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \right] \right\} = - \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} e_i \qquad (7\text{-}31)$$

Se il valore del guadagno a ciclo aperto dell'amplificatore è molto grande, è possibile supporre che

$$\frac{1}{A} \left[1 + \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \right] \ll 1$$

con che l'eq. (7-31) diventa

$$e_o = - \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} e_i \qquad (7\text{-}32)$$

che è l'*equazione fondamentale dell'amplificatore operazionale.*

Naturalmente la accuratezza con cui vengono eseguite le operazioni indicate dall'equazione $[Z_f(s)/Z_i(s)]e_i$, è legata ad un forte guadagno interno dell'amplificatore.

Per semplificare l'analisi dell'amplificatore è utile anche l'ipotesi:

$$e' = - \frac{e_o}{A} \cong 0 \qquad (7\text{-}33)$$

Cioè la tensione effettivamente applicata all'amplificatore, e', è così piccola, mentre $|A|$ e così grande, che si può ritenere che il potenziale dell'ingresso sia praticamente zero (cioè uguale al riferimento a massa). In tal modo il potenziale ai capi di Z_f si considera uguale all'uscita e_o. Questa ipotesi sarà utile più avanti, quando si tratterà di introdurre le condizioni iniziali in un circuito adatto ad eseguire l'operazione di integrazione.

Per definizione, la polarità di e_o è sempre negativa rispetto a quella di e_i, e se $Z_f(s) = Z_i(s) = R$ (possibilmente 1 M Ω ciascuna) il guadagno complessivo del circuito sarà unitario ma negativo, cioè $A = -1$. Perciò il circuito è sempre un invertitore di segno.

Se $Z_f(s)$ e $Z_i(s)$ sono delle resistenze non uguali fra loro,

$$e_o = - \frac{R_f}{R_i} e_i \qquad (7\text{-}34)$$

e l'uscita è uguale all'apposto dell'ingresso moltiplicata per una costante. Questa applicazione è mostrata in fig. 7-20*a*.

Se $Z_f(s)$ è capacitiva e quindi ha un'impedenza operazionale $1/Cs$, mentre $Z_i(s)$ è resistiva si ha

$$e_o = - \frac{1}{RCs} e_i \tag{7-35}$$

in cui $Z_i(s) = R$.

Quest'amplificatore esegue l'integrazione rispetto al tempo. Il risultato è moltiplicato per la costante negativa $-1/RC$; se $R = 1M\,\Omega$ e $C = 1\,\mu F$, il fattore di moltiplicazione sarà -1. Questo circuito è mostrato in fig. 7-20*b*.

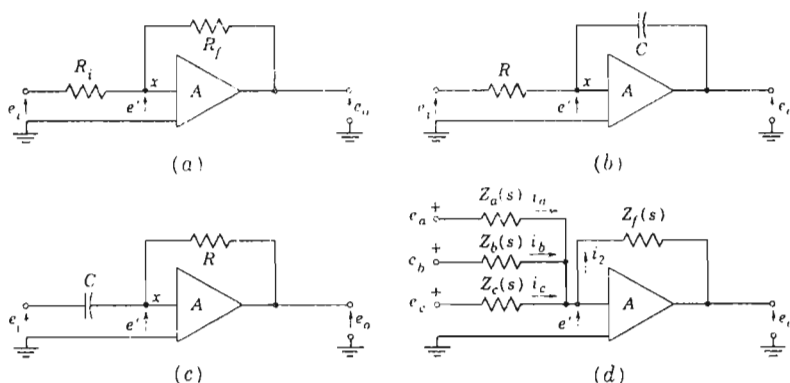



FIG. 7-20 — *a*) cambio di segno e moltiplicazione per una costante. *b*) integrazione. *c*) differenziazione. *d*) sommatore.

Se $Z_i(s)$ è capacitiva e $Z_f(s)$ è resistiva, come nella fig. 7-20*c*, allora

$$e_o = - RC\,se_i \tag{7-36}$$

in cui $Z_f(s) = R$ e $Z_i(s) = 1/Cs$, e l'uscita dell'amplificatore è l'opposto della derivata della tensione di ingresso, moltiplicata per una costante.

Un'altra operazione e cioè quella di sommare un certo numero di tensioni indipendenti, è mostrato in fig. 7-20d; come in precedenza si ha:

$$i_a + i_b + i_c = i_o$$

e se A è grande, ed e' molto piccolo rispetto alle tensioni di ingresso e di uscita, si ha:

$$\frac{e_a}{Z_a(s)} + \frac{e_b}{Z_b(s)} + \frac{e_c}{Z_c(s)} = \frac{-e_o}{Z_f(s)}$$

da cui

$$-e_o = \frac{Z_f(s)}{Z_a(s)} e_a + \frac{Z_f(s)}{Z_b(s)} e_b + \frac{Z_f(s)}{Z_c(s)} e_c \tag{7-37}$$

Se tutte le impedenze sono dei resistori uguali, si ottiene

$$-e_o = e_a + e_b + e_c \tag{7-38}$$

e l'uscita rappresenta la somma degli ingressi. Se sono state introdotte alcune tensioni negative (eventualmente mediante un invertitore di segno) è possibile eseguire la somma algebrica. Se i rapporti R_f/R_A, R_f/R_B, R_g/R_c non sono uguali, è possibile eseguire la moltiplicazione per diversi valori costanti. Se infine $Z_f(s)$ è un condensatore, è possibile sommare contemporaneamente tre integrali.

Se la tensione posta in ingresso al circuito integratore è sinoidale:

$$e_i = E_m \operatorname{sen} \omega t$$

la tensione di uscita vale:

$$e_o = -\frac{1}{RC}\int E_m \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{E_m}{\omega RC} \cos \omega t$$

e

$$E_o = \frac{-E_i}{j\omega RC}$$

che si può ottenere facilmente sostituendo direttamente $s = j\omega$ nella eq. (7-35). È chiaro che l'uscita del circuito integratore decresce con pendenza $1/\omega$ cioè di 6 db per ottava, il che consente un semplice controllo della accuratezza dell'integratore.

Nel caso del differenziatore, se $e_c = E_M \operatorname{sen} \omega t$, la tensione di uscita sarà

$$e_o = -RC \frac{d}{dt}(E_m \operatorname{sen} \omega t) = -\omega RCE_m \cos \omega t$$

e, per i valori efficaci,

$$E_o = -j\omega RCE_i$$

che è l'eq. (7-36) con $s = j\omega$. L'uscita del differenziatore cresce con ω, con una pendenza di 6 db per ottava. Se RC fosse uguale ad uno ed $\omega = 377$ nel caso di 60 Hz, la tensione di uscita E_o sarebbe 377 volte la tensione di ingresso E_i. Se in ingresso viene introdotto un rumore o un ronzio, questo compare in uscita con un'ampiezza 10 volte maggiore. Dato che il guadagno aumenta con la frequenza, il che fa sorgere dei problemi a causa del rumore, si evita di usare l'amplificatore operazionale come differenziatore nel calcolo analogico. D'altra parte non è difficile eseguire questa operazione matematicamente.

È possibile anche usare una combinazione di R e C in serie o parallelo fra loro in modo da costituire delle opportune Z_f e Z_i; il funzionamento del sistema dipenderà dalla relazione $Z_f(s)/Z_i(s)$. L'impedenza operazionale di ogni combinazione RC si può scrivere ricordando che l'espressione di Z(s) è ricavabile dalla impedenza Z in condizioni stazionarie sostituendo $j\omega$ con s dovunque essa appaia. Alcuni di questi circuiti sono riportati in fig. 7-21 a titolo di esempio.

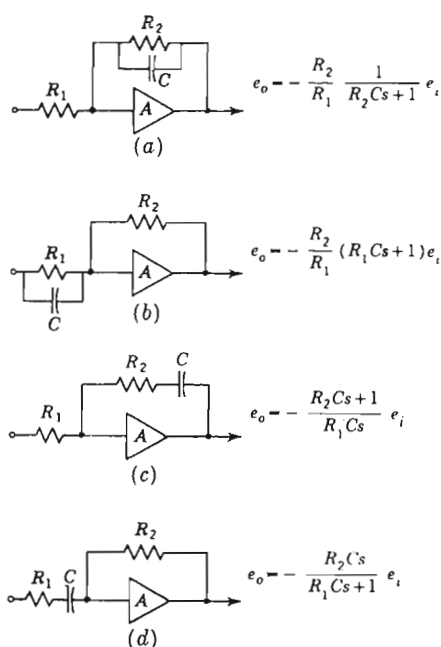



FIG. 7-21 — Circuiti operazionali.

L'amplificatore operazionale è fondamentale per un gran numero di apparecchiature di calcolo elettronico. Nelle applicazioni pratiche occorre che i resistori siano precisi e che i condensatori presentino una bassissima dispersione.

Esempio — *Si scriva l'espressione della operazione eseguita sulla tensione di ingresso dal circuito di fig. 7-21 c. Si ha:*

$$Z_f = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_i = R_1$$

sostituendo s ad $j\omega$, si ottengono le impedenze operazionali

$$Z_f(s) = R_2 + \frac{1}{Cs}$$

$$Z_i(s) = R_1$$

e la relazione fra e_o ed e_i è

$$e_o = -\frac{R_2 + 1/Cs}{R_1} e_i = -\frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs} e_i$$

La relazione teorica fra ingresso ed uscita, sarà verificata con una accuratezza che dipende essenzialmente dalla ipotesi di un grande valore del guadagno a ciclo aperto. Questo elevato guadagno può essere ottenuto facilmente usando una reazione positiva, all'interno della reazione negativa, predominante rispetto alla prima, prodotta da Z_f. La reazione negativa complessiva dovrà essere tale da conservare la stabilità dell'amplificatore.

Questa reazione rigenerativa si ottiene facilmente con un circuito il quale dia luogo ad una reazione positiva fra gli emettitori o i catodi di due stadi successivi. È possibile così ottenere valori del guadagno interno dell'ordine di $10^6 \div 10^8$.

7-10. Risposta in frequenza degli amplificatori per calcolo.

Finora si è trattato della deriva degli amplificatori ad accoppiamento diretto come della maggior causa di errori; è da notare però che anche una inadeguata risposta in frequenza può introdurre gravi errori nel funzionamento degli amplificatori operazionali impiegati nei calcolatori elettronici.

La larghezza di banda di tali amplificatori deve essere sufficientemente ampia e comprendere le massime frequenze che ci si attende nel singolo problema da risolvere; gli errori causati da una insufficiente risposta in frequenza sono difficili da determinare durante la soluzione del problema.

Un sommatore dovrebbe essere un dispositivo non sensibile alla frequenza; tuttavia, a causa delle capacità parassite, un sommatore reale avrà un'attenuazione di 6 db per ottava, o addirittura maggiore, al di sopra di una certa frequenza limite f_2 — La caratteristica di fase presenterà una variazione di 90^0 per ogni stadio per le frequenze maggiori di f_2 — Ovviamente, un sommatore ben progettato dovrebbe avere una frequenza f_2 molto più alta della massima frequenza prevista nel suo funzionamento.

Idealmente il guadagno di un amplificatore integratore varierà uniformemente in funzione di $-1/\omega$ con un'attenuazione di 6 db per ottava, come in fig. 7-22*b*. Ossia si ha che l'integrale di $E \operatorname{sen} \omega t = (-E/\omega) \cos \omega t$. A frequenze molto basse è richiesto un guadagno praticamente infinito e gli

integratori pratici presentano una risposta che è più bassa di quella ideale. Questo scostamento dalla caratteristica ideale dovrebbe avvenire a frequenze molto più basse di quelle previste per il funzionamento del circuito.

La fig. 7-22*c* indica un problema di stabilità di reazione quale può venir fuori in amplificatori ad accoppiamento diretto a più stadi per calcolatori elettronici. La curva di Nyquist indica che per i valori di A e β usati l'amplificatore è stabile, ma se o A o β venissero aumentati, il punto 1,j0 verrebbe racchiuso dalla curva e si avrebbe instabilità.

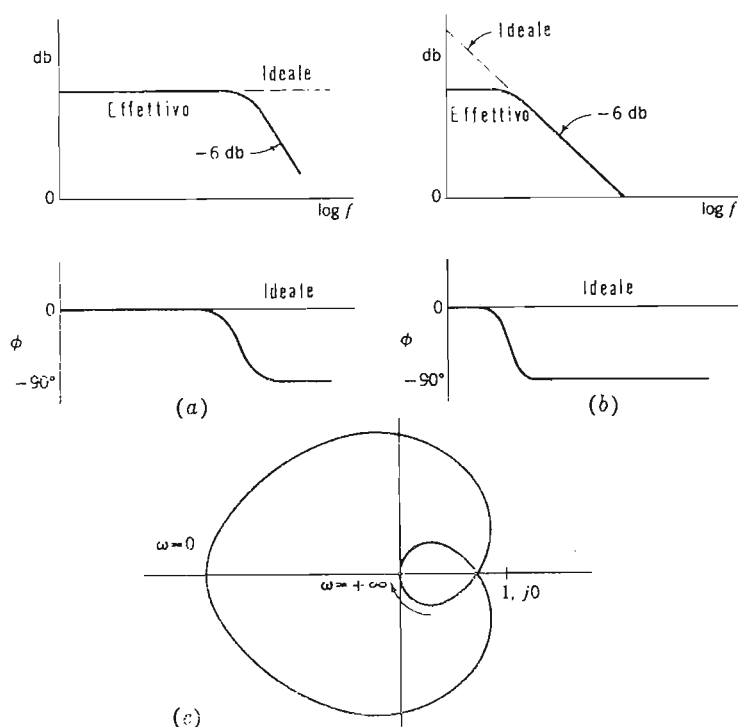



FIG. 7-22 — *a*) risposta di un sommatore. *b*) risposta di un integratore. *c*) diagramma di Nyquist per un amplificatore d.c. a tre stadi con reazione mediante una resistenza.

La maniera usuale per assicurare la stabilità è di alterare la risposta in alta frequenza di uno degli stadi, cosicché la caduta di guadagno venga tutta concentrata in quel punto.

Una rete RC può causare questa caduta e realizzare un guadagno zero con una rotazione di fase di 90°; con due di tali stadi per limitare il guadagno, la rotazione di fase sarebbe pari a 180°. In entrambi i casi la curva Aβ non può comprendere il punto 1,j0 e la stabilità è assicurata. Un punto

importante è pertanto che *negli amplificatori con reazione sono da evitare gli stadi identici.*

7-11. Calcolo analogico.

Il calcolatore elettronico analogico usa amplificatori operazionali e risolve problemi matematici relativi a fenomeni fisici quali la posizione angolare di un albero o di una punta scrivente o il valore di una tensione o di una corrente.

L'uscita analogica è una funzione continua delle variabili del problema in esame. I problemi più adatti ad una soluzione analogica sono quelli descritti da sistemi di equazioni differenziali, lineari e non, e con coefficienti costanti o variabili. Date le equazioni differenziali, gli amplificatori operazionali, vengono connessi, o programmati, per eseguire le operazioni matematiche indicate dai singoli termini delle equazioni differenziali. Usualmente le soluzioni vengono presentate in via grafica sotto la forma di curva o di tracciati oscilloscopici delle tensioni e correnti di uscita offrendo in tal modo la possibilità di una interpretazione visuale diretta delle caratteristiche del sistema in esame.

A causa del tipo di uscita, l'accuratezza delle soluzioni è limitata non solo dall'operatore umano, se presente, ma anche dalla precisione con cui i risultati possono essere letti. Non è mai da attendersi una precisione superiore a quattro cifre significative. Al contrario, il *calcolatore numerico*, che verrà discusso nel capitolo 10, fornisce le soluzioni di problemi simili direttamente in forma numerica come un calcolatore da tavolo.

La precisione della soluzione è limitata solo dal numero di cifre significative su cui la macchina opera e ciò dipende ovviamente dal costo e dalla complessità del calcolatore stesso. In genere il costo dei calcolatori numerici cresce linearmente con il numero di cifre significative su cui il calcolatore opera, mentre quello dei calcolatori analogici cresce esponenzialmente. Usualmente si considera che i due diversi tipi di sistemi abbiamo costo comparabile quando viene richiesta una precisione di quattro cifre significative.

Attualmente sono anche disponibili calcolatori, detti *ibridi*, che usano entrambe le tecniche precedenti. Normalmente tali calcolatori prevedono un ingresso ed una uscita analogici mentre il sistema di calcolo è numerico. Alcuni dei circuiti fondamentali verranno trattati in seguito allorchè si studieranno le tecniche di conversione analogico-numerico e numerico-analogico.

Il componente fondamentale del calcolatore analogico è l'amplificatore operazionale che viene impiegato per le operazioni di somma, cambio di segno ed integrazione delle variabili del problema. Sono previsti opportuni controlli per iniziare la soluzione del problema ed introdurre le condizioni

iniziali. Per problemi più complessi sono necessari generatori in grado di fornire opportune funzioni di forzamento, così come circuiti per la moltiplicazione di variabili. Possono inoltre essere previsti circuiti per fenomeni non lineari ed in genere che possano riprodurre in via analogica fenomeni fisici pratici.

L'operazione fondamentale in tutti questi problemi consiste nello scrivere il sistema di equazioni differenziali che descrive il sistema fisico in esame- Di grande aiuto, a tale scopo, risulta l'*equazione di Lagrange* che lega lo scambio di energie all'interno del sistema.

7-12. L'equazione di Lagrange.

L'equazione di Lagrange fornisce un mezzo semplice per scrivere le equazioni della dinamica dei sistemi.

Il vantaggio derivante dal suo impiego è nella semplicità con cui possono essere scritte le espressioni dell'energia cinetica e potenziale di un sistema anche complesso; le equazioni del moto seguono poi dalla equazione di Lagrange. Questa equazione, che qui non verrà dimostrata, è basata sul fatto che la natura, nel passare da una condizione di equilibrio ad un'altra sembra seguire la via che prevede il minore scambio o trasferimento di energia.

Le equazioni del moto devono avere delle condizioni al contorno od un sistema di coordinate di riferimento. In un problema complesso il numero di coordinate o variabili indipendenti, può essere molto elevato; esse verranno indicate in genere come q_1, q_2,...... ed è evidente che nei singoli problemi si ricorrerà generalmente a simboli più specifici. Per esempio, in una rete elettrica a tre maglie le coordinate q possono rappresentare le correnti di maglia i_1, i_2, i_3 oppure alcune delle tensioni dei nodi. Le derivate prima e seconda rispetto al tempo sono indicate, come al solito, con i simboli $\dot{q}$ e $\ddot{q}$. Il numero di coordinate indipendenti è fissato dal numero *n* che è il numero di gradi di libertà del sistema ed è eguale al numero di equazioni indipendenti necessarie a descrivere il sistema stesso.

Se T rappresenta l'energia cinetica totale del sistema, V l'energia potenziale totale riferita ad un certo sistema di coordinate, D la dissipazione di energia al secondo, ed *f* la forza applicata, se presente, allora l'equazione di Lagrange stabilisce che la relazione tra queste quantità è:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = f \qquad (7\text{-}40)$$

dove il termine q_i rappresenta una qualunque delle coordinate q_1, q_2....q_n; vi saranno tante di queste equazioni indipendenti per quante sono le quantità o coordinate indipendenti.

Come semplice esempio si consideri il moto di un proiettile di massa m il cui moto è definito da due coordinate: x, la distanza dal punto di riferimento ed y l'altezza rispetto alla terra. Le energie possono essere scritte nel modo seguente:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad V = mgy \tag{7-41}$$

dalle quali si possono ricavare i termini da sostituire nella (7-10):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial (T - V)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial (T - V)}{\partial y} = -mg$$

la dissipazione D e la forza applicata f sono nulle.

Scrivendo l'equazione di Lagrange per ciascuna delle coordinate x ed y si ha:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = 0 \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0$$

dalle quali

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$

che sono le ben note formule che descrivono il fenomeno.

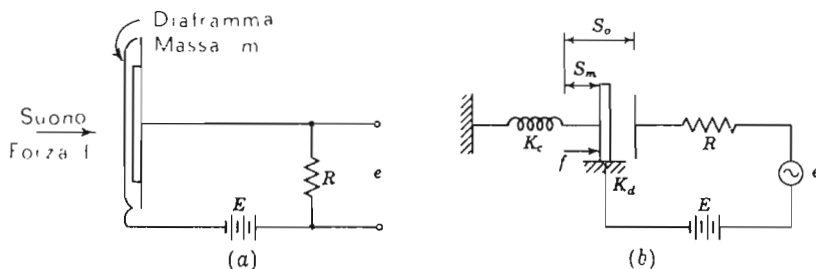



FIG. 7-23 — Microfono a capacità.

L'equazione di Lagrange si dimostra più vantaggiosa in problemi più complessi quale il microfono a condensatore di fig. 7-23. Tale dispositivo consiste di un diaframma metallico teso a piccola distanza da una lastra metallica. La pressione esercitata dal suono varia la distanza e quindi la capacità tra il diaframma e la lastra metallica. Poiché la tensione applicata E

è costante, la variazione di capacità comporta una variazione di carica in accordo con l'espressione

$$q = CE$$

di conseguenza attraverso R passa una corrente che dà luogo ad una tensione di uscita *e*.

Le coordinate del sistema sono la deflessione *d* del diaframma e la carica *q* sulla capacità. L'energia cinetica del sistema vale:

$$T = \frac{m\dot{d}^2}{2} \tag{7-42}$$

cui bisognerebbe aggiungere il termine $L\dot{q}^2/2$ se il circuito elettrico comprende induttori. L'energia potenziale vale:

$$V = \frac{K_c d^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \tag{7-43}$$

dove K_C è la costante della molla. La capacità istantanea C vale:

$$C = \frac{d_0}{d_0 - d} C'$$

dove C′ è il valore della capacità per $d = 0$. Si ha allora

$$V = \frac{k_c d^2}{2} + \frac{q^2}{2C'} \frac{d_0 - d}{d_0} \tag{7-44}$$

La dissipazione di energia è quella dovuta alla resistenza elettrica R ed all'attrito K_d per flettere il metallo del diaframma. Si ha allora per D:

$$D = k_d \dot{d}^2 + Ri^2 = k_d \dot{d}^2 + R\dot{q}^2 \tag{7-45}$$

Da queste equazioni si ricavano i termini dell'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{d}} = m\ddot{d} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial d} = - k_c d + \frac{q^2}{2C'} \frac{1}{d_0} \qquad \frac{\partial(T - V)}{\partial q} = - \frac{q}{C'} \frac{d_0 - d}{d_0}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = 2k_d \dot{d} \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 2R\dot{q}$$

combinando i quali si ha in definitiva:

$$m\ddot{d} + k_c d - \frac{q^2}{2C'} \frac{1}{d_0} + k_a \dot{d} = f \qquad (7\text{-}46)$$

$$\frac{q}{C'} \frac{d_0 - d}{d_0} + R\dot{q} = e \qquad (7\text{-}47)$$

che sono le equazioni differenziali che descrivono il funzionamento del microfono e capacità. Si osservi che si ottiene un'equazione per ciascuna delle coordinate di riferimento.

7-13. Metodo di risoluzione.

Nella risoluzione analogica di sistemi integro differenziali gli amplificatori operazionali possono essere impiegati, come indicato in fig. 7-24, allo scopo di:

a) cambiare un segno o moltiplicare una variabile per una costante;
b) eseguire la somma di due o più variabili;

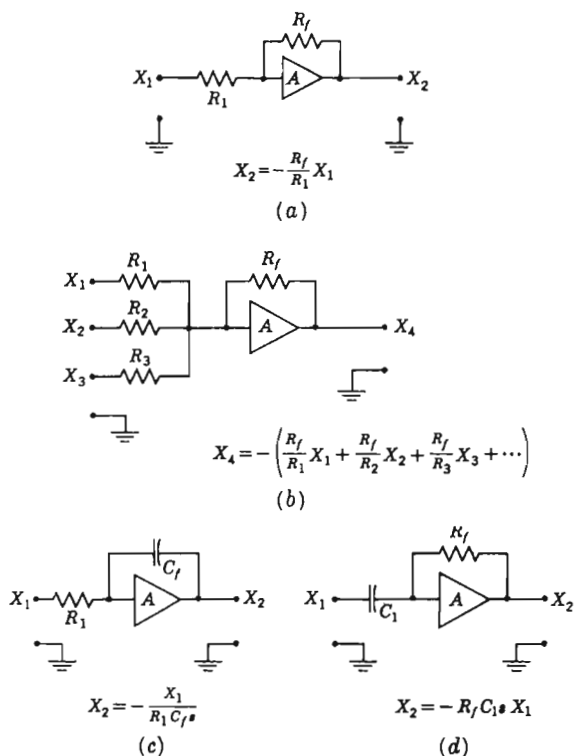



FIG. 7-24 — Impiego degli amplificatori operazionali per calcolo.

c) integrare una variabile rispetto al tempo;

d) derivare una variabile rispetto al tempo (non di uso comune).

Le unità che eseguono queste operazioni vengono connesse mediante cavi e spine nella sequenza determinata dal particolare problema da risolvere.

Nei calcolatori di *tipo lento* possono essere necessari molti minuti per posizionare i servomeccanismi e la soluzione apparirà sotto forma di grafico tracciato da una punta scrivente. Nei calcolatori di *tipo veloce* o *ripetitivi*, la funzione di ingresso e le condizioni iniziali vengono applicate molte volte durante un secondo e l'uscita appare su di un tubo a raggi catodici. Normalmente, quando l'uscita è sotto forma di grafico conviene che lo stesso calcolatore tracci gli assi di riferimento allo scopo di eliminare eventuali errori di calibrazione.

Allo scopo di illustrare il solo principio di funzionamento si consideri una tipica equazione differenziale del secondo ordine:

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx + D = f(t) \qquad (7\text{-}48)$$

dividendo per A e isolando a primo membro x si ha:

$$\ddot{x} = -\frac{B}{A}\dot{x} - \frac{C}{A}x - \frac{D}{A} + \frac{1}{A}f(t) \qquad (7\text{-}49)$$

essa indica che $\ddot{x}$ è uguale alla somma di altre funzioni di x più il termine $f(t)/A$.

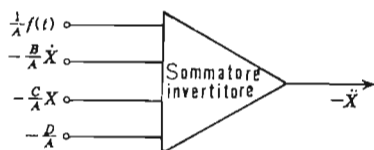



FIG. 7-25 — Metodo per ottenere $\ddot{x}$ nel calcolatore analogico.

Si supponga che un amplificatore sommatore abbia 4 ingressi, come rappresentato in fig. 7-25, allora in base all'equazione (7-49), l'uscita sarà pari a $\ddot{x}$ (in realtà a $-\ddot{x}$ poiché l'amplificatore è invertitore di segno). L'integrazione di $-\ddot{x}$ darà $\dot{x}$, ed una seconda integrazione darà $-x$ come indicato nel circuito a blocchi di fig. (7-26).

Un invertitore di segno convertirà l'uscita in x che può infine essere applicata all'apparecchiatura di registrazione per essere diagrammata in funzione del tempo. Si ottiene $(-C/A)x$ da x e $(-B/A)\dot{x}$ da $\dot{x}$; queste quan-

tità vengono, successivamente, applicate all'ingresso del circuito sommatore. A queste quantità viene quindi aggiunto f(t)/A, ottenuto dal generatore di funzione, e (—D/A) ottenuto da una batteria; in questo modo lo schema a blocchi per la soluzione del problema è completato (fig. 7-26).

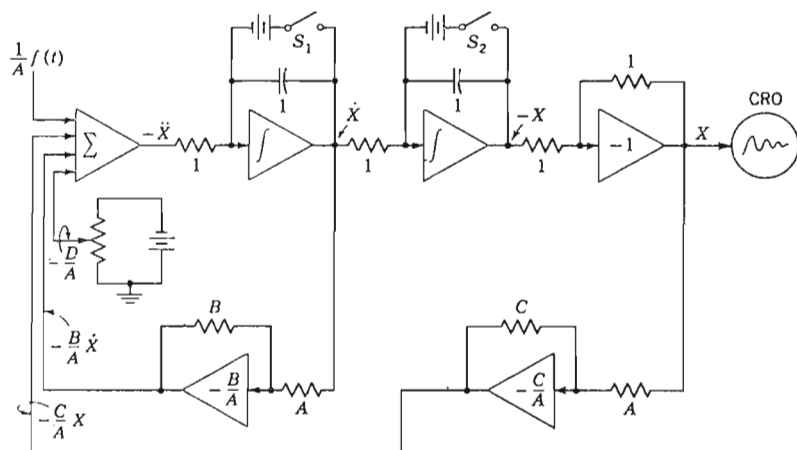



FIG. 7-26 — Soluzione dell'equazione (7-48).

Gli interruttori S_1 ed S_2 possono essere attuati mediante relais nell'instante in cui la *base dei tempi* passa per lo zero; gli stessi interruttori provvederanno a stabilire le tensioni iniziali sui condensatori di integrazione, ossia le condizioni iniziali, ed a far partire il generatore di funzione $f(t)$. Per calcolatori veloci o ripetitivi è necessaria una opportuna scelta della base dei tempi in modo che i transitori si esauriscano in meno di un periodo.

La preparazione del problema sarà completa dopo che sia stata effettuta la scelta delle scale, come verrà discusso nel prossimo paragrafo.

La procedura da seguire è la seguente:

1) scrivere le equazioni differenziali del problema;

2) risolvere per la derivata di ordine più elevato in ciascuna equazione;

3) stendere il diagramma a blocchi, o programma, per ciascuna equazione;

4) effettuare un'opportuna scelta per le scale delle variabili.

Nello scrivere il programma, abitualmente si segue la seguente procedura:

1) ricavare i termini di ordine più basso effettuando un'operazione di integrazione;

2) aggiustare i coefficienti di scala dei singoli termini, mediante l'uso di amplificatori o potenziometri;

3) sommare i termini dello stesso ordine, dopo averli moltiplicati per i relativi coefficienti, mediante l'uso di amplificatori sommatori.

Esempio — *Un corpo di massa* m *cade attraverso un liquido viscoso. Prevedere un circuito calcolatore che consenta di diagrammare la posizione* y *del corpo e la sua velocità* $\dot{y}$ *in funzione del tempo; le condizioni iniziali sono* $y_0 = 50$ e $\dot{y} = 95$*m al secondo. Per poter scrivere l'equazione di Lagrange si calcolano i seguenti valori delle energie*

$$T = m\dot{y}^2/2 \qquad V = mgy \qquad D = k_d\dot{y}^2$$

L'equazione del moto risulta allora:

$$m\ddot{y} + mg + k_d\dot{y} = 0$$

che può essere riscritta nel modo seguente:

$$\ddot{y} = -g - \frac{k_d}{m}\dot{y} \tag{7-50}$$

Le condizioni iniziali richiedono che opportune tensioni siano applicate al tempo t = 0 *ai condensatori degli amplificatori integratori. Queste tensioni vengono aggiustate, normalmente, mediante l'uso di potenziometri finchè le uscite degli integratori non raggiungono i valori iniziali, quando tutti gli altri segnali siano stati sconnessi. Il circuito di fig. 7-27 eseguirà quindi l'operazione matematica richiesta.*

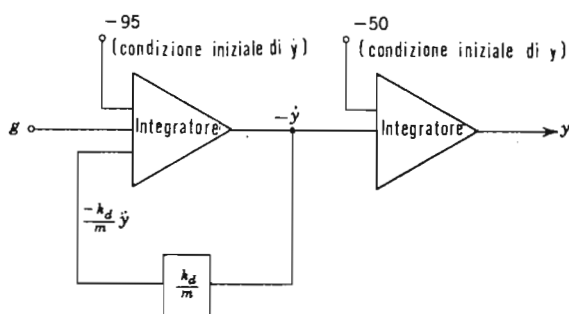



FIG. 7-27 — Diagramma a blocchi per risolvere la equazione (7-50).

7-14. Scelta delle scale.

L'operatore, allorchè imposta un problema su di un calcolatore analogico è costretto a prendere una serie di decisioni arbitrarie nella scelta della scala dei tempi, della frequenza e dell'ampiezza delle variabili.

Nella scelta di tali parametri è da tenere presente che:

1) nelle operazioni di integrazione l'errore aumenta con il tempo di risoluzione;

2) a frequenze elevate le rotazioni di fase negli amplificatori operazionali possono essere causa di errori;

3) i servomeccanismi usati nelle operazioni di moltiplicazione o nei dispositivi di uscita raramente operano al di sopra di 1 o 2 Hz;

4) la soluzione deve essere compatibile con le caratteristiche dinamiche dei tracciatori di uscita.

L'errore degli integratori aumenta con il tempo poiché il guadagno a ciclo aperto degli amplificatori ha un valore finito; altra causa di errore è il valore piccolo, ma finito, della corrente di ingresso. Per entrambi i precedenti inconvenienti sono da preferire le soluzioni rapide.

A frequenze più basse gli errori di fase introdotti dagli amplificatori operazionali sono trascurabili; inoltre, a causa delle capacità parassite, gli errori di fase aumentano rapidamente in prossimità della frequenza f_2 il che richiede che le velocità di soluzione siano generalmente molto basse.

La scelta dunque del tempo di risoluzione di un problema è pertanto da effettuare come compromesso tra le esigenze precedentemente indicate; nè sono da trascurare le eventuali frequenze di risonanza del sistema che possano apparire durante la soluzione del problema; la conoscenza di tali frequenze è anche importante nella scelta dei tracciatori di uscita così come dei servomeccanismi. I comuni tracciatori, tranne che non siano molto ben compensati, hanno una frequenza di taglio superiore di 100 Hz.

La determinazione dell'equazione caratteristica di un sistema di equazioni differenziali e la sua soluzione non sono in genere necessarie. È possibile infatti ottenere sufficienti informazioni direttamente dalle equazioni differenziali per determinare le massime frequenze in gioco e le scale opportune.

Per un'equazione del primo ordine del tipo:

$$a_1 x + a_2 x = 0$$

si sa che la costante di tempo della soluzione sarà:

$$\tau = \frac{a_1}{a_2}$$

In problemi di questo tipo si raggiunge la condizione di regime dopo un tempo pari a circa 4 volte la costante di tempo; in base a queste informazioni si può scegliere opportunamente la scala dei tempi.

Per un'equazione del secondo ordine del tipo:

$$b_1\ddot{x} + b_2\dot{x} + b_3x = 0$$

oppure

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

si sa che il coefficiente di smorzamento è ξ e che ω_n è la pulsazione di oscillazione libera, dove

$$\omega_n = \sqrt{\frac{b_3}{b_1}}$$

in base alla conoscenza di queste grandezze si può stimare l'approssimativo campo di frequenze in gioco.

La scala dei tempi può essere variata mediante un cambio di variabile del tipo $t = \tau/a$. Se il coefficiente a è minore dell'unità, il problema viene accelerato, ossia il tempo impiegato dal calcolatore è minore del *tempo reale*; se a è maggiore dell'unità la soluzione richiederà un tempo maggiore di quello impiegato dall'evento fisico in esame. Per esempio

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(\tau/a)} = a\frac{d}{d\tau}$$

ed in generale

$$\frac{d^n}{dt^n} = a^n\frac{d^n}{d\tau^n} \tag{7-51}$$

La scala delle ampiezze è molto importante affinché da un lato gli amplificatori non siano sovraccaricati, dall'altro i segnali siano sufficientemente ampi sicché il rumore del circuito non contribuisca ad introdurre errori di calcolo. Le massime tensioni di uscita sono generalmente limitate a ± 100 volt; un fattore di scala che limiti il valore delle variabili intorno a ± 50 volt, è in genere quello più opportuno.

Alle variabili del problema vengono assegnati opportuni valori di tensione con il seguente criterio:

$$1 \text{ unità fisica} = a_x \text{ volt}$$

Moltiplicando ciascuna delle variabili del problema x, y, z, θ,.... per le rispettive costanti a_x, a_y, a_z, a_θ si otterrà il passaggio dalle unità di misura delle variabili ai volt. Se alcune variabili, o le loro derivate, possono dar luogo ad una condizione di sovraccarico degli amplificatori, allora le equazioni da risolvere vanno moltiplicate per un opportuno fattore di scala delle ampiezze.

7-15. Potenziometri per i coefficienti.

Quando una variabile deve essere moltiplicata per un coefficiente avente valore inferiore all'unità, l'operazione può essere effettuata mediante un divisore di tensione di precisione o con un potenziometro come è mostrato in fig. 7-28. I componenti normalmente usati sono potenziometri a molti giri con campi di resistenze variabili fra 10 kΩ e 100 kΩ. In fig. 7-28*a* il rapporto tra le tensioni, o fattore di moltiplicazione *a* vale:

$$a = \frac{e_0}{e_x} \tag{7-53}$$

Il potenziometro viene spesso connesso all'ingresso di un amplificatore operazionale dove R_2, come in fig. 7-28*b*, rappresenta la resistenza di ingresso dell'amplificatore. In questo caso la semplice relazione (7-53) non è più valida poiché la resistenza R_2 carica R_1. Si trova che:

$$\frac{e_0}{e_x} = \frac{a}{1 + a(1 - a)(R_1/R_2)} \tag{7-54}$$

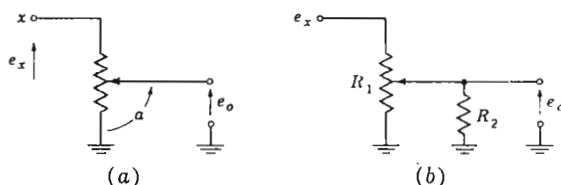



FIG. 7-28 — Potenziometri; *a*) non caricato. *b*) caricato.

La deviazione dal rapporto teorico di ripartizione *a* è dato da:

$$\Delta = a - \frac{e_0}{e_x} = a \left[1 - \frac{1}{1 + a(1 - a)(R_1/R_2)}\right] \tag{7-55}$$

Tale deviazione può dar luogo a notevoli errori; con un potenziometro da 25 kΩ caricato da $R_2 = 50$ kΩ e posizionato per $a = 0{,}5$ la deviazione vale

$$\Delta = 0{,}500 \times 0{,}11 = 0{,}055$$

ossia l'11% del valore desiderato.

Per evitare tali errori si posiziona il potenziometro in modo da ottenere il desiderato valore di *a*, ma con R_2 presente. Ciò si ottiene in pratica misurando separatamente il valore di *a* dell'intero sistema su di un circuito a ponte in modo da evitare calcoli laboriosi.

7-16. Moltiplicazione di variabili.

La moltiplicazione di variabili è spesso necessaria nelle equazioni non lineari od a coefficienti variabili; diversi tipi di circuiti moltiplicatori sono disponibili per eseguire questa operazione. Nei calcolatori lenti la moltiplicazione di variabili viene abitualmente eseguita mediante un potenziometro P_1 cui è applicata una tensione proporzionale a e_1 mentre il cursore è collegato ad un servomotore che sposta il cursore stesso proporzionalmente ad e_2, come è mostrato in fig. 7-29.

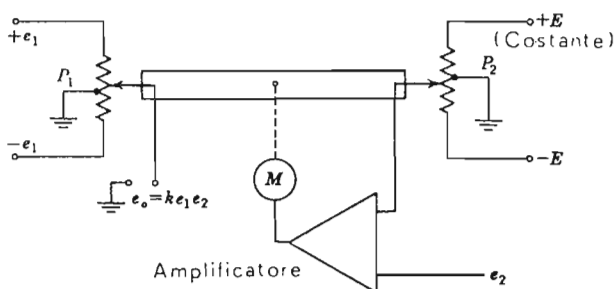



FIG. 7-29 — Moltiplicazione di due variabili.

Ad un secondo potenziometro P_2, montato sullo stesso albero di P_1, è applicata una tensione costante E. Un amplificatore differenziale paragona il potenziale e_2 a quello del cursore di P_2 ed aziona il motore in modo da riportare a zero la differenza fra queste due tensioni. Poiché P_1 e P_2 sono sullo stesso albero, il cursore di P_1 si sposta secondo e_2, mentre la tensione totale applicata a P_1 è e_1. Pertanto la tensione sul cursore di P_1 sarà proporzionale al prodotto di e_1 per e_2. Questi dispositivi sono molto accurati ma il loro impiego è limitato, dalla velocità di risposta del servomeccanismo, a frequenze non superiori ai 2 Hz. Il moltiplicatore opera in tutti i quattro quadranti ossa da e_1 a $-e_1$ e da e_2 a $-e_2$, poichè il centro di ciascun potenziometro è connesso a massa. Il terminale $+e_1$ è alimentato direttamente, mentre quello $-e_1$ è alimentato attraverso un amplificatore invertitore di segno.

Se P_1 è un potenziometro non lineare è possibile, con la tecnica precedente, generare una funzione di e_2. Se per esempio la resistenza di P_1 varia secondo il seno dell'angolo di rotazione, allora la tensione in uscita varierà secondo il seno di e_2. Altre funzioni possono essere facilmente generate con un'opportuna scelta della legge di variazione di P_1 in funzione dell'angolo di rotazione. Un moltiplicatore più veloce e non meccanico, può

essere realizzato osservando che la corrente anodica di un triodo è proporzionale al quadrato della tensione di griglia a bassi livelli di corrente; ossia:

$$i_b = Ae^2_c$$

con buona approssimazione. Usando tali tubi nel circuito di fig. 7-30, si ha un'uscita

$$e_1e_2 = \frac{(e_1 + e_2)^2}{4} - \frac{(e_1 - e_2)^2}{4} \tag{7-56}$$

Benché adatto per la moltiplicazione ad alta velocità, questo circuito ha una scarsa precisione perché questa dipende dalle caratteristiche di trasferimento dei tubi, ed ovviamente non è possibile garantirne la stabilità.

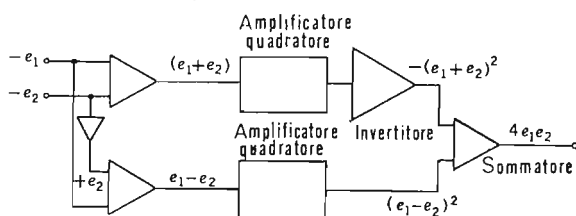



FIG. 7-30 — Moltiplicatore elettronico.

Un circuito moltiplicatore di più elevate prestazioni ed adatto ai calcolatori ripetitivi è il *moltiplicatore a divisione di tempo.* Questo circuito impiega una forma d'onda la cui ampiezza è proporzionale ad e_1, e la cui durata è proporzionale ad e_2; l'area o il valore medio dell'impulso è allora proporzionale al prodotto $e_1 e_2$. La forma d'onda di fig. 7-31*a* viene ripetuta ad una velocità maggiore di quella che ci si attende come velocità di variazione di e_1 o di e_2. Essendo infatti l'ampiezza proporzionale ad e_1 per la precisione del sistema è necessario che e_1 non cambi di ampiezza durante l'impulso, in modo che questo rimanga rettangolare. L'interruttore S porta il triodo in conduzione mentre connette a massa l'uscita durante il periodo

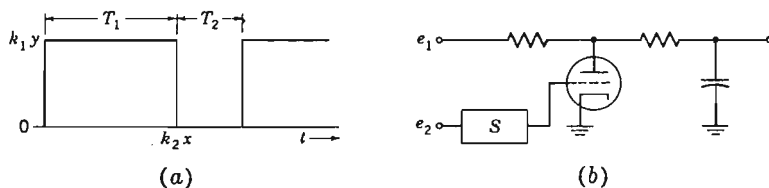



FIG. 7-31 — *a*) uscita di un moltiplicatore a divisione di tempo. *b*) semplice circuito per la moltiplicazione e divisione di tempo.

T_2. Il periodo di interdizione viene reso proporzionale ad e_2 e la moltiplicazione viene eseguita durante T_1.

Se la frequenza di ripetizione è elevata allora e_1 è costante durante ciascuno impulso ed il valore medio di quest'ultimo sarà veramente proporzionale a Ke_1e_2. Il segnale di uscita passa attraverso un filtro passa basso per ottenerne il valore medio, ossia il valore del prodotto. A causa di questo circuito di filtro e della necessità che le variazioni delle funzioni siano lente rispetto alla frequenza di ripetizione degli impulsi, ne risulta che questo metodo di moltiplicazione è limitato in banda. In ogni caso le caratteristiche del circuito consentono un'accuratezza migliore dell'1%.

7-17. Generatori di funzioni.

Poiché i calcolatori analogici devono simulare e risolvere una grande varietà di problemi dinamici, è necessario che essi siano in grado di generare una grande varietà di forme d'onda di tensioni, sia in funzione del tempo che di altre variabili.

Potenziometri non lineari, come in fig. 7-32 possono essere comandati da un motore quando si desideri una funzione variabile nel tempo o da un servomotore controllato da un'altra variabile y quando si desideri una funzione del tipo: $e_0 = f(y)$. Il metodo è limitato dal fatto che la resistenza del potenziometro è una funzione continuamente crescente o decrescente.

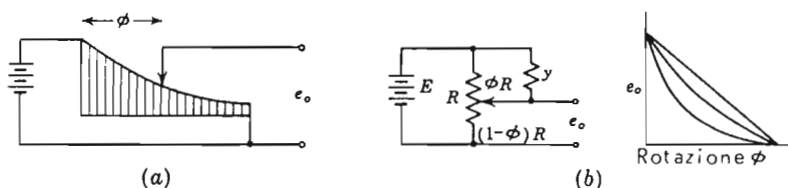



FIG. 7-32 — Generazione di funzioni mediante potenziometri.

Se il potenziometro viene caricato in modo apprezzabile la sua uscita si può allontanare da quella che si era prevista in funzione della posizione angolare dell'albero. In realtà, un potenziometro lineare può essere volutamente caricato, come in fig. 7-32*b*, allo scopo di ottenere una varietà di funzioni non lineari tra l'angolo di rotazione Φ e la tensione di uscita e_0. Per esempio assumendo che il carico su e_0 sia nullo, l'uscita in funzione dell'angolo Φ vale:

$$e_0 = E \frac{1 - \Phi}{1 - \Phi^2 R/(\Phi R + y)}$$

dove Φ è misurato a partire dalla posizione $e_0 = E$. Nel caso di uscita lineare non caricata si ha $e_0 = E(1 - \Phi)$.

Un dispositivo elettronico, il *fotoformatore*, è stato usato in passato per generare una tensione funzione del tempo o di un'altra variabile y. Tale dispositivo è illustrato nel diagramma blocchi di fig. 7-33. La tensione di ingresso e sposta il pennello elettronico del tubo a raggi catodici nella direzione orizzontale. Nello stesso tempo la tensione di posizionamento applicata all'amplificatore ad accoppiamento diretto tende a deflettere il raggio verso l'alto così che il punto luminoso fuoriesce dalla maschera. Non appena il punto luminoso fuoriesce dalla maschera, esso illumina la fotocella che fornisce all'amplificatore ad accoppiamento diretto un segnale di polarità tale da deflettere il raggio verso il basso. La condizione di equilibrio è raggiunta quando il punto luminoso si muove lungo il limite superiore della maschera.

Una reazione ottica viene pertanto inviata dall'amplificatore ad accoppiamento diretto al circuito di deflessione verticale del tubo a raggi catodici; la catena di reazione comprende il pannello luminoso, la maschera non lineare e la fotocella. Poichè l'uscita di un'amplificatore è fortemente dipendente dalle caratteristiche del circuito di reazione, se il guadagno è alto, allora l'uscita e_0 dipende dalla forma della maschera. Poiché il punto luminoso viene spostato orizzontalmente dalla tensione d'ingresso e_i si ha che la tensione in uscita e_0 necessaria a mantenere il punto luminoso sul bordo della maschera varierà in funzione di e_i secondo l'andamento del bordo della maschera stessa.

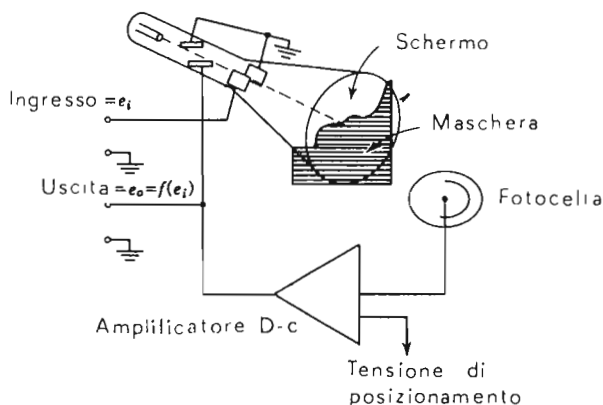



Fig. 7-33 — **Fotoformatore per la generazione di funzioni non lineari.**

L'esatta sagoma della maschera viene generalmente determinata in via sperimentale a causa degli errori di parallasse e di posizionamento che renderebbero i calcoli particolarmente difficili. Una precisione dall'1 al 2% può

essere facilmente ottenuta se la maschera è vicina alla superficie del tubo e l'intensità del punto luminoso è mantenuta abbastanza bassa in modo che il punto luminoso abbia dimensioni sufficientemente piccole. Per un circuito del genere la velocità di risposta è buona usando fosfori a bassa persistenza e normali amplificatori per oscilloscopi.

Molte funzioni matematiche non lineari possono essere approssimate mediante segmenti di retta. Questo metodo è illustrato in fig. 7-34 dove tre segmenti di retta sono utilizzati per approssimare una curva di forma parabolica. Un resistore è caratterizzato da una relazione lineare tra tensione e corrente, pertanto connettendo successivamente nel circuito resistori diversi ai quali siano applicate opportune tensioni, è possibile ottenere la relazione non lineare, desiderata, tra tensione e corrente. Le conduttanze richieste per ciascuno dei segmenti della curva sono:

$$g_1 = \frac{i_1}{e_1} \qquad g_2 = \frac{i_2 - i_1}{e_2 - e_1} \qquad g_2 = \frac{i_3 - i_2}{e_3 - e_2}$$

se opportuni interruttori sono previsti per connettere al circuito gli adatti resistori in corrispondenza delle tensioni e_1 ed e_2.

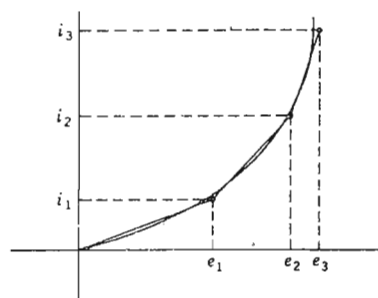



Fig. 7-34 — Approssimazione di una curva mediante tre segmenti di retta

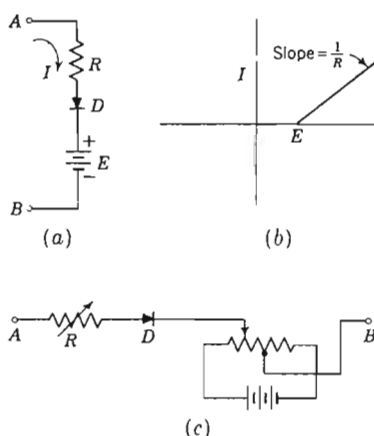



Fig. 7-35 — Elementi non lineari a diodo.

I diodi a semiconduttori sono particolarmente adatti ad operare come interruttori. Il diodo è un'interruttore comandato in tensione come mostrato in fig. 7-35*a* ed ha una relazione tensione corrente come mostrato in fig. 7-35*b*; la tensione E determina il livello di commutazione ed il circuito di fig. 7-35*c* consente di variare il potenziale di commutazione da positivo a negativo.

Mediante più circuiti a diodi è possibile generare una varietà di relazioni lineari tra le tensioni di ingresso ed uscita. Alcune possibili combinazioni di circuiti a diodi, con le rispettive tensioni di uscita sono riportate in fig. 7-36. In fig. 7-36*a* la resistenza diminuisce con la tensione applicata, mentre in fig. 7-36*b* la resistenza aumenta con la tensione applicata.

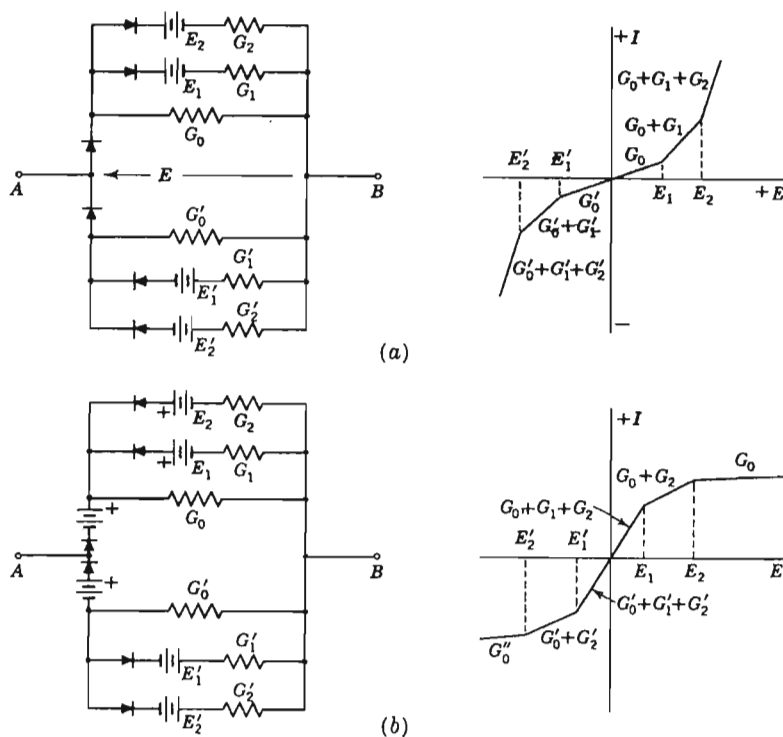



FIG. 7-36 — Resistori non lineari realizzati mediante circuiti a diodo.

Una curva del tipo $E = KI^2$ può essere riprodotta con la precisione dell'1% impiegando 5 segmenti di retta. A causa del fatto che per una piccola variazione della tensione di polarizzazione un diodo passa dall'elevato valore di resistenza che corrisponde alla condizione di circuito aperto ad un valore di alcune centinaia di ohm quando va in conduzione, si ha che all'intersezione tra i diversi segmenti di retta vengono introdotti dei piccoli tratti curvi che contribuiscano a rendere la curva a tratti di retta ancora più simile alla funzione assegnata. Usando questa tecnica è stato realizzato uno strumento elettronico per la misura del valore efficace di grandezze.

Queste combinazioni di resistenze e diodi possono essere utilmente im-

piegate nei circuiti di reazione di amplificatori operazionali, cui conferiscono alcune interessanti proprietà.

7-18. Simulazione di dispositivi meccanici.

Nello studio dei problemi relativi ad alcuni sistemi, particolarmente quelli che si riscontrano nei controlli automatici, è necessario simulare la azione di certi organi meccanici caratterizzati da certe condizioni di sovraccarico, da attrito, zone morte o inattive, giochi, ecc.

Un esempio di sovraccarico o di limitazione nella risposta è una valvola che abbia raggiunto il fine corsa e non può aumentare la propria portata indipendentemente dal comando applicato al suo attuatore.

La simulazione di un'azione limitatrice si ottiene mediante due diodi disposti come in fig. 7-37*a*; in questo circuito si ha $R \gg r_b$. Quando *e* eccede E_1 durante il ciclo positivo o E_2 durante quello negativo, uno dei diodi conduce. A causa della caduta di tensione su R, la tensione di uscita e_o non può superare E_1 od E_2; variazioni del segnale di ingresso al di sotto di questi valori limite sono invece presenti nel segnale di uscita.

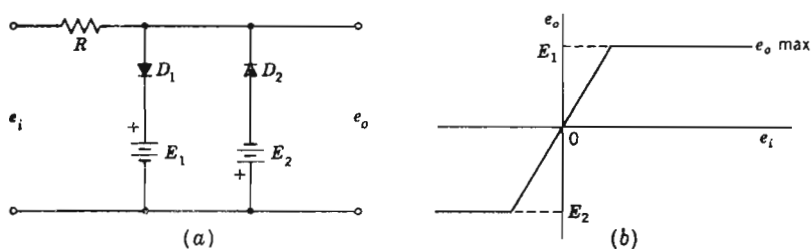



FIG. 7-37 — Circuito limitatore e sua caratteristica.

La limitazione in una sola direzione può essere ottenuta impiegando un sol diodo ed una tensione di polarizzazione in parallelo alla resistenza di reazione R_F di un amplificatore operazionale. Quando la tensione di uscita supera la tensione di polarizzazione, l'amplificatore è cortocircuitato dal diodo e la sua uscita diventa pari alla tensione di polarizzazione.

Questa situazione è analoga a quella che si ha quando la valvola è totalmente aperta. Le tensioni E_1 ed E_2 devono essere fornite da generatori a tensione variabile con bassa resistenza interna, altrimenti durante la fase di taglio il segnale di uscita avrà una piccola curvatura positiva.

Il comportamento di una frizione a secco può essere simulato mediante il circuito di fig. 7-38. Se dx/dt è praticamente nullo, non c'è uscita dal circuito. Se dx/dt diventa leggermente positivo, l'uscita dell'invertitore di segno

ad alto guadagno sarà grande e negativa ed eccederà in valore la tensione di polarizzazione e_a di D_1. Di conseguenza la tensione all'ingresso dell'integratore sarà e_a. Per valori negativi di dx/dt, all'uscita del primo amplificatore

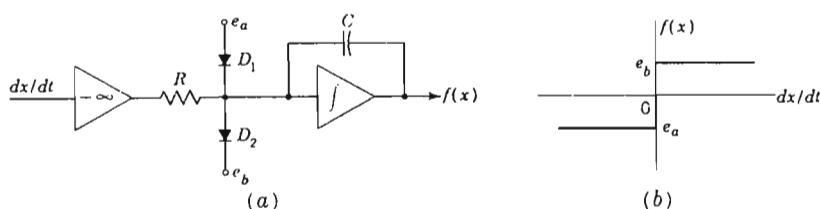



FIG. 7-38 — a) circuito per la simulazione di una frizione a secco. b) caratteristica tensione corrente.

si avrà un segnale positivo, il diodo D_2 condurrà ed il segnale in ingresso all'integratore sarà e_b. Il circuito funziona dunque come un rivelatore di inversione di direzione di velocità definito da:

$$f(x) = a \qquad dx/dt > 0$$
$$f(x) = -a \qquad dx/dt < 0$$

Un circuito che simula le zone morte è indicato in fig. 7-39; tale circuito dà un'uscita nulla quando la variabile varia tra $+A$ e $-A$ mentre ha una uscita proporzionale al valore della variabile quando $x > A$ o $x < -A$. Il circuito a diodi ha proprio tali caratteristiche poiché ciascun diodo è contro

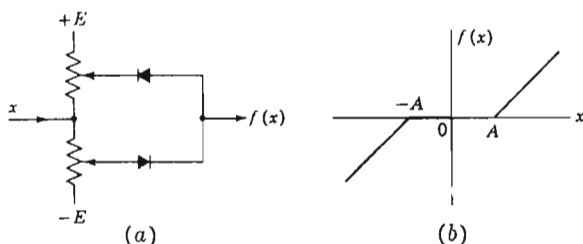



FIG. 7-39 — a) Circuito per la simulazione di zona morta. b) caratteristica del circuito.

polarizzato finché l'ampiezza del segnale x non eccede la tensione di polarizzazione A o —A. Circuiti più complessi possono essere realizzati per simulare questa o altre operazioni meccaniche; le simulazioni che qui si sono presentate sono tra le più semplici, esse danno però un'idea del tipo di simulazioni che possono essere effettuate sui calcolatori analogici.

7-19. Indicatore di sovraccarico.

Il sovraccarico di uno qualunque degli amplificatori di un calcolatore può dare origine ad errori imprevedibili. Indicatori luminosi e segnali audio vengono normalmente usati per richiamare l'attenzione dell'operatore.

Inizialmente questi dispositivi di allarme venivano regolati in modo che entrassero in azione ogni qual volta l'uscita di un amplificatore eccedesse un certo valore, normalmente ± 100 volt. Poiché la tensione di uscita di un amplificatore è funzione della corrente di carico, ed un amplificatore può essere caricato con resistenze tanto basse che esso si allontana dalla linearità prima che venga raggiunta la prevista tensione di uscita, è ora abitudine controllare gli eventuali sovraccarichi all'interno del circuito in punti non direttamente connessi al carico. Nell'amplificatore a chopper il punto di controllo è all'uscita dell'amplificatore a-c. Il dispositivo indicatore è costituito da un diodo e da una lampada al neon.

PROBLEMI

7-1. In fig. 7-1 indicare il valore di tutte le resistenze e delle tensioni sapendo che i tubi hanno $\mu = 70$, $r_p = 40$ kΩ ed inoltre che $E_b = 100$ volt, $E_c = -2$ volt. Il guadagno totale dovrà essere 2250, con il guadagno del primo stadio eguale a 1,5 volte quello del secondo e con

$$I_{b1} = 1{,}25 \text{ mA}, \quad I_{b2} = 1{,}50 \text{ mA}.$$

7-2. Il circuito di fig. 7-2 deve essere riprogettato. I tubi sono semisezioni di una valvola 6SN7 e devono operare nelle seguenti condizioni:

$$E_{b1} = 200 \text{ volt} \qquad E_{c1} = -4 \text{ volt}$$
$$E_{b2} = 250 \text{ volt} \qquad E_{c2} = -6 \text{ volt}$$

Supponendo $R_1 = 25$ kΩ, $R_2 = 15$ kΩ ed inoltre che la batteria fornisca una corrente totale di 25 mA, determinare la corrente attraverso le singole resistenze e la tensione di alimentazione richiesta; indicare infine i potenziali di tutte le griglie.

7-3. In fig. 7-9*c* lo strumento di misura M ha una resistena di 1500 Ω. Se $R_L = 15$ kΩ, $R_K = 1$ kΩ, $\mu = 20$, $r_p = 7{,}7$ kΩ ed il circuito è bilanciato per $e_i = 0$, determinare la corrente che attraversa lo strumento per ogni volt di segnale applicato in ingresso.

7-4. Dimostrare che l'equazione (7-14) consente di calcolare il guadagno del circuito a compensazione di deriva catodica.

7-5. Usando le approssimazioni valide nell'analisi per piccoli segnali, ricavare l'espressione del guadagno dell'amplificatore di fig. 7-40 supponendo i transistori identici ed $R_L \gg r_{ie}$.

7-6. Dimostrare che il circuito di fig. 7-41 è un sommatore ossia che

$$e_o = K(e_1 + e_2 + e_3).$$

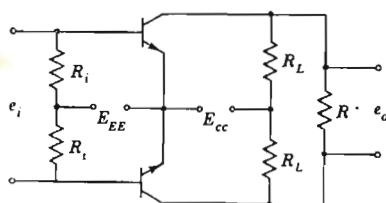



FIG. 7-40

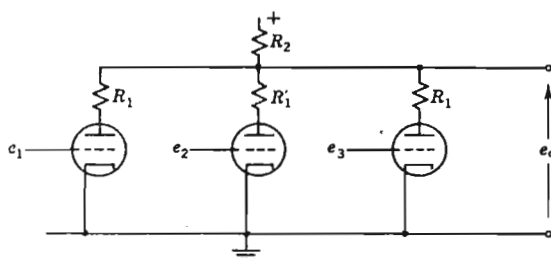



FIG. 7-41

7-7. Per ciascuno dei circuiti di fig. 7-43 determinare la relazione tra e_o ed e_i usando l'operatore s.

7-8. Usando l'equazione di Lagrange scrivere le equazioni differenziali per i sistemi di fig. 7-42.

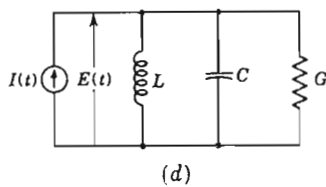
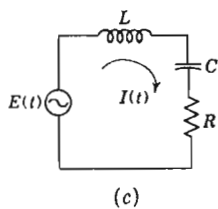
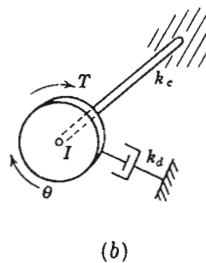
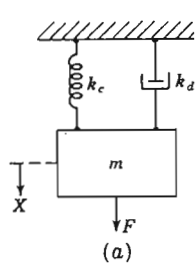



FIG. 7-42

7-9. Usando l'equazione di Lagrange ricavare l'equazione del moto di un pendolo supponendo che l'angolo di oscillazione sia piccolo.

7-10. *a*) Disegnare un diagramma a blocchi per un calcolatore analogico che debba risolvere la seguente equazione

$$\ddot{y} - f(t) = 0$$

b) supponendo che $f(t)$ sia una funzione a gradino

$$f(t) = 0 \text{ per } t < 0, \; f(t) = 1 \text{ per } t > 0$$

disegnare l'andamento di y ed $\dot{y}$ in funzione del tempo.

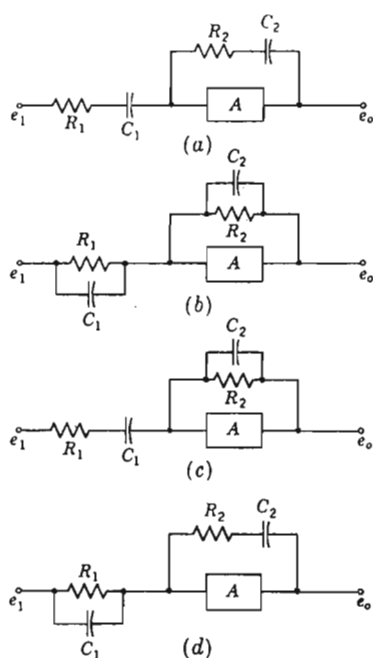



FIG. 7-43

7-11. Disegnare il diagramma a blocchi di un amplificatore operazionale che possa integrare la somma di tre variabili.

7-12. Disegnare un diagramma a blocchi per la soluzione dell'equazione:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + y = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 \leq a < 1$$

7-13. Mediante l'equazione di Lagrange scrivere le equazioni del moto della massa I_3 di fig. 7-44.

7-14. Progettare un circuito analogico per il sistema meccanico di fig. 7-44 allo scopo di determinare la velocità di M_2.

(a)

(b)

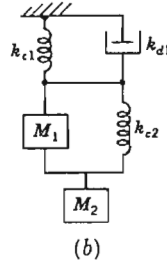
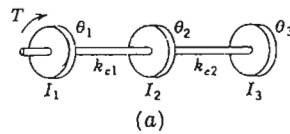



Fig. 7-44

7-15. Determinare la costante di tempo della soluzione dell'equazione:

$$20 \frac{dx}{dt} + 30x = 20$$

Quanti secondi sono necessari perché la soluzione raggiunga l'1% del valore di regime.

7-16. Determinare la frequenza di oscillazione libera ed il coefficiente di smorzamento per ciascuna delle seguenti equazioni:

$$4 \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 16x = 8$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 0{,}5y = 1$$

7-17. Disegnare un diagramma a blocchi per la risoluzione in funzione di x della prima equazione dell'esercizio 7-16.

7-18. Disegnare un diagramma a blocchi per la risoluzione in funzione di y della seconda equazione dell'esercizio 7-16.

7-19. Disegnare un diagramma a blocchi per la risoluzione dell'equazione:

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$

supponendo $y(0) = 1$.

BIBLIOGRAFIA

1. Loftin E. H., and S. Y. White: Cascaded Direct-coupled Tube Systems Operated from Alternating Current, *Proc. IRE*, **18:** 669 (1930).
2. Yu Y. P.: Cathode-follower Coupling, *Electronics*, **19:** 99 (1946).
3. Rittenhouse J. W.: Cathode Drift Compensation in D-c Amplifiers, *Elec. Eng.*, **72:** 299 (1953).
4. Artzt M.: Survey of D-C Amplifiers, *Electronics*, **18:** 112 (August, 1945).

5. WILLIAMS A. J. , R. E. TARPLEY, and W. R. CLARK: D-C Amplifier Stabilized for Zero and Gain, *Trans. AIEE*, **67**: 47 (1948).
6. GOLDBERG E. A.: Stabilization of D-C Amplifiers, *RCA Rev.*, **11**: 296 (1950).
7. RAGAZZINI J. R., R. H. RANDALL, and F. A. RUSSELL: Analysis of Problems in Dynamics by Electronic Circuits, *Proc. IRE*, **35**: 444 (1947).
8. GINTZON E. L.: D-C Amplifier Techniques, *Electronics*, **17**: 98 (March, 1944).
9. SUNSTEIN D. E.: Photoelectric Wave Form Generator, *Electronics*, **22**: 100 (1949).
10. MACNEE A. B.: An Electronic Differential Analyzer, *Proc. IRE*, **37**: 1315 (1949).
11. KORN G. A.: Design and Construction of Universal Function-generating Potentiometers, *Rev. Sci. Instr.*, **21**: 77 (1950).
12. MIDDLEBROOK R. D., "Differential Amplifiers," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
13. SHEA R. F., "Transistor Application," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
14. J. R. ASHLEY: "Introduction to Analog Computation," John Wiley & Sons, Inc., 1963.
15. "Transistor Manual, 7th ed., General Electric Company, Semiconductor Products Department, Syracuse, N.Y., 1964.
16. SCOTT N. R., "Analog and Digital Computer Technology," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
17. JOHNSON C. L.: "Analog Computer Technique," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
18. WARFIELD J. W.: "Electronic Analog Computers," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1959.

CAPITOLO VIII

CIRCUITI A SCATTO E FORMATORI D'ONDA

Nei capitoli precedenti si è esaminata la possibilità di amplificare fedelmente un segnale con un transistore o con un tubo. Si vuole ora introdurre un'altra vasta classe di circuiti nei quali il transistore, o il tubo, funziona come un interruttore ad alta velocità e passa rapidamente da una condizione « *si* » di bassa resistenza, ad uno stato « *no* » di altissima resistenza, comandato da un segnale di scatto o da un livello di tensione o di corrente. La forma d'onda in uscita è intenzionalmente distorta, e l'uscita è spesso una rampa, ossia una tensione linearmente crescente, o un impulso rettangolare, o uno stretto impulso di scatto, come è illustrato in fig. 8-1.

(*a*) (*b*) (*c*)

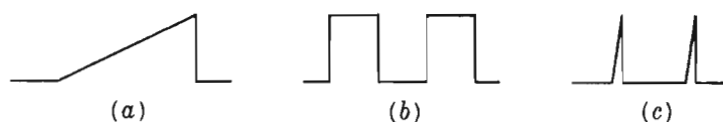



FIG. 8-1 — *a*) Rampa. *b*) Onda quadra o rettangolare. *c*) Impulsi di comando.

Tali forme d'onda trovano applicazione nei calcolatori numerici, nei radar, nella televisione e nei sistemi di comunicazione a modulazione di impulsi.

8-1. Risposta dei circuiti elementari.

Alcune semplici forme d'onda, non sinusoidali, possono essere ottenute sfruttando le proprietà dei transitori di tensioni ai capi di elementi R, L, C o delle loro combinazioni.

Nei circuiti che fanno uso di transistori o tubi come elementi attivi, le

resistenze possono essere, naturalmente, sia statiche che dinamiche, come si può vedere in fig. 8-2. La resistenza statica in A è:

$$r_b = \frac{e_A}{i_A} \tag{8-1}$$

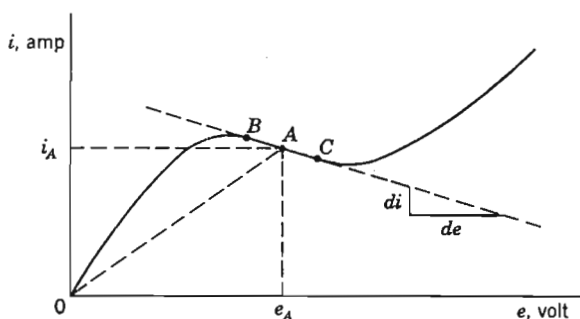



FIG. 8-2 — Resistenza statica e dinamica.

ossia è l'inverso della tangente della retta che unisce l'origine con A. La resistenza dinamica è:

$$r_d = \frac{d\,e_A}{d\,i_A} \tag{8-2}$$

ossia è l'inverso della tangente alla curva tensione-corrente nel punto A. Questi due valori di resistenza possono essere molto differenti; nel nostro caso la resistenza dinamica è negativa tra i punti B e C.

La risposta dei circuiti RC e RL non è lineare, e questo consente di generare particolari forme d'onda.

Si consideri il circuito di fig. 8-3*a*, nel quale l'interruttore S è nella posizione 2 al tempo $t = 0$. La differenza di potenziale su C per $t = 0$ è E_0, valore che può essere o non uguale a E_1; ciò dipende evidentemente da quanto a lungo S è rimasto nella posizione 1.

Al tempo $t = 0$, il circuito di fig. 8-3*b* diventa quello di fig. 8-3*c*. Per quest'ultimo si può scrivere l'equazione:

$$iR + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + E_0 - E_2 = 0 \tag{8-3}$$

Differenziando e dividendo per R si ha:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0 \tag{8-4}$$

che risolta dà:

$$i = A\epsilon^{-t/RC} \tag{8-5}$$

Dall'eq. (8-3), per t=0 e $i=i(0)$ si ha:

$$i(0) = \frac{E_2 - E_0}{R} \tag{8-6}$$

quindi segue che:

$$i = \frac{E_2 - E_0}{R} \epsilon^{-t/RC} \tag{8-7}$$

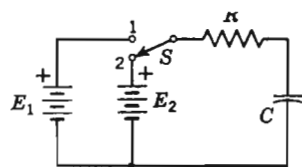
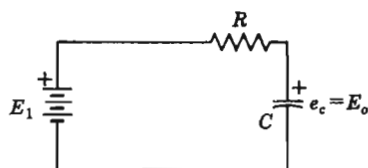
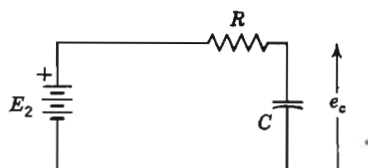



FIG. 8-3 — Commutazione in un circuito RC

La tensione ai capi della resistenza è perciò:

$$e_R = iR = (E_2 - E_0)\epsilon^{-t/RC} \tag{8-8}$$

mentre la tensione ai capi della capacità C è:

$$e_C = E_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i\, dt = E_2 - (E_2 - E_0)\epsilon^{-t/RC} \tag{8-9}$$

In modo analogo si può studiare un circuito RL attraversato da una corrente costante iniziale I, che al tempo $t=0$ venga commutato dalla posizione

1 a quella 2, come in fig. 8-4. L'equazione del circuito per $t > 0$ è:

$$L \frac{di}{dt} + Ri - E_2 = 0 \tag{8-10}$$

ed ha la soluzione:

$$E_2 - Ri = B\epsilon^{-Rt/L} \tag{8-11}$$

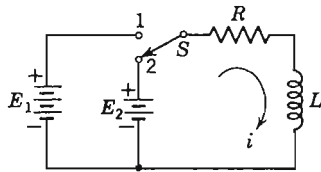



FIG. 8-4 — Circuito RL serie.

Poiché $i = I_o$ per $t = 0$:

$$B = E_2 - RI_o \tag{8-12}$$

quindi si ha:

$$i = I_0 + \left(\frac{E_2}{R} - I_0\right)(1 - \epsilon^{-Rt/L}) \tag{8-13}$$

La tensione ai capi della resistenza può essere scritta come:

$$e_R = iR = E_2 - (E_2 - I_0R)\epsilon^{-Rt/L} \tag{8-14}$$

e quella ai capi dell'induttore ideale, privo di resistenza:

$$e_L = L \frac{di}{dt} = (E_2 - I_0R)\epsilon^{-Rt/L} \tag{8-15}$$

Paragonando le eq. (8-9) e (8-14) si può notare che la e_c per il circuito RC e la e_R per quello RL hanno un'espressione analoga; lo stesso si può dire per la e_R del circuito RC e la e_L del circuito RL. Le espressioni delle tensioni sui due elementi possono essere scritte:

$$e_C \text{ in RC} = e_R \text{ in RL} = E_{finale} - (E_{finale} - E_{iniziale})\,\epsilon^{\,t/\tau} \tag{8-16}$$

$$e_L \text{ in RL} = e_R \text{ in RC} = E_{iniziale}\,\epsilon^{-t/\tau} \tag{8-17}$$

in cui τ è la costante di tempo, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

8-2. La costante di tempo.

I coefficienti RC e R/L hanno le dimensioni di un tempo e sono noti come *costanti di tempo* dei circuiti. Questi coefficienti determinano la velocità

con cui varia il termine esponenziale e sono definiti come il tempo, in secondi, necessario perchè l'ampiezza del transitorio di uscita raggiunga il 63 per cento del valore finale.

È conveniente misurare il tempo di risposta di un circuito in multipli della costante di tempo, perchè si possano tracciare delle curve universali, come in fig. 8-5, che consentono di determinare il valore dei termini esponenziali in problemi concernenti il transitorio della commutazione. Le percentuali dei valori finali raggiunte in tempi uguali a multipli della costante di tempo sono riportate nella tabella 14.

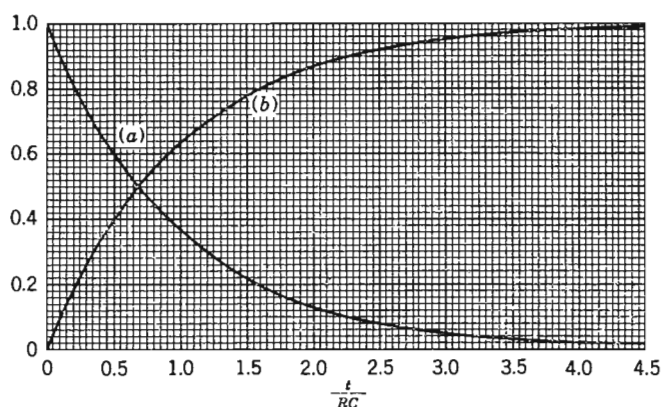



FIG. 8-5 — *a*) $\epsilon^{-t/RC}$. *b*) $1 - \epsilon^{-t/RC}$.

TABELLA 14 — VALORI DELL'ESPONENZIALE IN FUNZIONE DELLA COSTANTE DI TEMPO

Costante di tempo	*Percentuale del valore finale del transitorio*	*Costante di tempo*	*Percentuale del valore finale del transitorio*
0	0.0	3,0	95,0
0,5	39,4	3,5	97,0
1,0	63,2	4.0	98.2
1,5	77,7	4,5	98,9
2,0	86,5	5,0	99,3
2,5	91,8	10.0	99,999

Di solito si suppone che il transitorio sia terminato dopo un tempo pari a quattro costanti di tempo, in corrispondenza del quale il valore della funzione è inferiore al suo valore di regime dell'1,8 per cento.

Esempio — *Si supponga che l'interruttore S di fig.* 8-6 *sia rimasto chiuso sulla posizione* 1 *per un lungo periodo, dopo di che venga portato sulla posizione* 2 *per* 750 μs, *e infine di nuovo sulla posizione* 1. *Tracciare la forma di onda di* e_o *durante tutto l'intervallo di tempo considerato.*

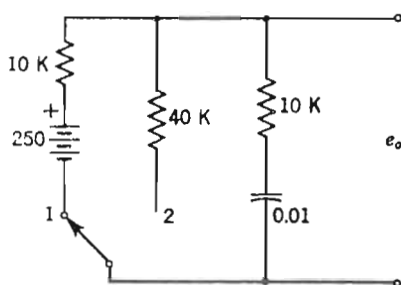



Fig. 8-6

Poichè S è stato chiuso sulla posizione 1 *per un lungo tempo, si suppone che il valore di* e_o *per* $t = 0$ *sia* 250 *V.*

Al tempo $t = 0$ *S è portato su* 2, *e la capacità comincia a scaricarsi. Dalla eq.* (8-7), *con* $E_2 = 0$, $E_o = 250$ *V, e* $RC = 0{,}01 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^3 = 500 \cdot 10^{-6}$*s, si ha*:

$$i = \frac{250}{50 \times 10^3}\, \epsilon^{-t/(500 \times 10^{-6})}$$

La tensione e_o *è data dall'eq.* (8-9).

$$e_o = -Ri + e_C = -10^4 i + 0 + 250\epsilon^{-t/(500\times10^{-6})}$$
$$= 200\epsilon^{-t/(500\times10^{-6})}$$

Dopo 750 μs, *che corrispondono a* 1,5 *costanti di tempo, il valore del termine esponenziale è* 0,22 (*dalla fig.* 8-5) *e in questo istante l'interruttore ritorna sulla posizione* 1. *La tensione* e_o *all'istante di commutazione è*:

$$e_o = 200 \cdot 0{,}22 = 44{,}0 \text{ volt}$$

I valori intermedi necessari per tracciare la forma d'onda possono essere ricavati dalla fig. 8-5.

All'istante di commutazione, il potenziale della capacità e_c *è dato da*:

$$e_c = 250 \cdot \epsilon^{-1{,}5} = 55{,}0 \text{ volt}$$

e questo è il valore di e_o *durante il secondo intervallo di tempo. Con S sulla posizione* 1, *la costante di tempo per* $t + 750 \cdot 10^{-6}$ *s è*:

$$RC = 0{,}01 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^3 = 200 \times 10^{-6}\text{ s}$$

e la corrente è data da:

$$i = \frac{250 - 55}{2 \times 10^4} \epsilon^{-t/(200\times10^{-6})} = 97,5 \times 10^{-4}\epsilon^{-t/(200\times10^{-6})}$$

mentre la tensione e_o *sarà:*

$$\begin{aligned} e_o &= 10^4 i + 250 - (250 - 55)\epsilon^{-t/(200\times10^{-6})} \\ &= 250 - 97,5\epsilon^{-t/(200\times10^{-6})} \end{aligned}$$

All'istante di commutazione ($t = 0$ *per l'equazione precedente*) *il valore di* e_o *è* 152,5 *volt e poi cresce esponenzialmente verso il suo valore finale di* 250 *volt. La forma d'onda completa è riportata in fig.* 8-7.

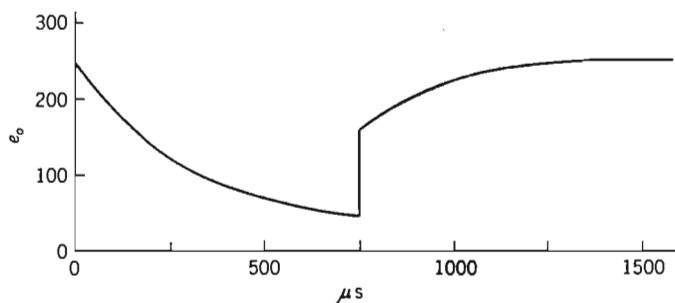



FIG. 8-7 — Forma d'onda per l'esempio precedente.

8-3. Il circuito RC come formatore d'onda.

In un circuito del tipo riportato in fig. 8-8*a*, con $e_c(0)=0$, si ha:

$$iRC + \int_0^t i\,dt = e_i C \tag{8-18}$$

Se si sceglie una costante di tempo RC piccola rispetto al tempo di integrazione tale che:

$$iRC \ll \int_0^t i\,dt$$

si ha:

$$\int_0^t i\,dt \cong e_i C \tag{8-19}$$

Differenziando si ha:

$$i \cong C \frac{de_i}{dt}$$

e

$$e_o = iR \cong RC \frac{de_i}{dt} \tag{8-20}$$

Ossia con una piccola costante di tempo RC, la tensione di uscita del circuito è proporzionale alla derivata della tensione di ingresso, e il circuito prende il nome di *circuito differenziatore.*

Teoricamente la derivata di un'onda rettangolare dovrebbe essere costituita da una serie di impulsi positivi e negativi di durata nulla. In fig. 8-9 si riportano le forme d'onda della tensione in uscita per alcuni valori del rapporto tra RC e il periodo dell'onda applicata. Quanto più è piccolo RC, tanto più la tensione di uscita approssima la forma a impulsi che ci si aspetta quale derivata di un'onda rettangolare.

Poichè le induttanze effettive presentano sempre una certa resistenza, l'uscita del circuito di fig. 8-8*b* non rappresenterà la derivata dell'ingresso con la stessa approssimazione del caso precedente, sebbene in teoria il circuito abbia proprietà analoghe. Il circuito, nella versione RC, è spesso impiegato per ottenere delle forme d'onda ad impulsi o per formare gli impulsi necessari per far scattare altri circuiti elettronici.

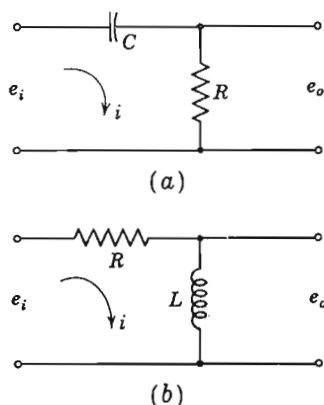



FIG. 8-8 — Circuiti differenziatori.

Il circuito RC di fig. 8-8*a* è identico a quello impiegato per l'accoppiamento RC degli amplificatori. In tale applicazione, è necessario che la costante di tempo RC sia molto lunga rispetto al periodo della più lenta componente

alternativa della tensione applicata, per evitare una differenziazione e quindi una distorsione della forma d'onda.

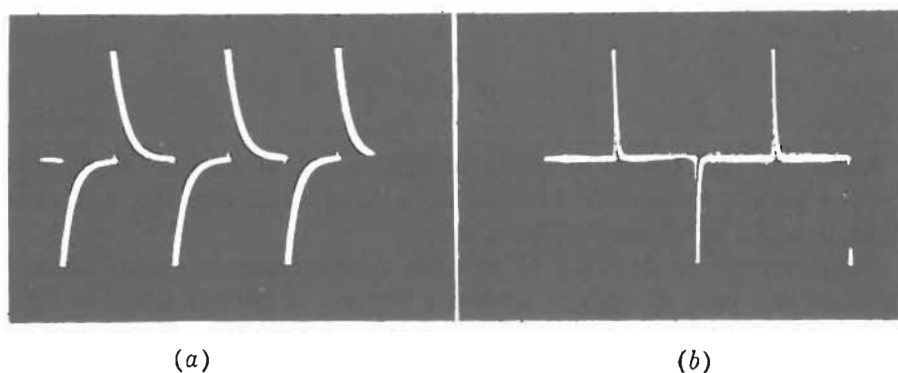



FIG. 8-9 — Uscita di un differenziatore RC; periodo T = $2 \cdot 10^{-4}$ s: *a*) con RC/T = 0,05, *b*) con RC/T = 0,0005.

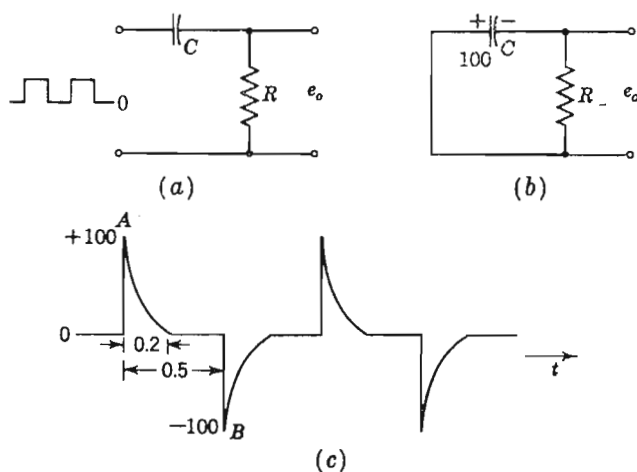



FIG. 8-10 — *a*) Condizione iniziale. *b*) Condizione nel punto B. *c*) Forma d'onda in uscita.

Esempio — *Un'onda rettangolare ha un valore di picco di* + 100 *volt ed è applicata ad un differenziatore RC la cui costante di tempo è* 0,05 *volte il periodo della forma d'onda. Tracciare la forma d'onda d'uscita supponendo uguale a zero sia il valore iniziale della tensione d'ingresso che il valore iniziale di* e_c.

Indichiamo con t = 0 *l'istante in cui l'ingresso passa da* 0 *a* + 100 *volt. Poichè la differenza di potenziale ai capi della capacità non può variare istan-*

taneamente, e_c *rimane nulla per un istante e la variazione in ingresso appare ai capi di R, per cui si ha una variazione istantanea di* + 100 *volt per* e_o *e una corrente iniziale* $I_0 = 100/R$. *In seguito la capacità si carica fino a un valore massimo di* + 100 *volt mentre la corrente decresce esponenzialmente con la legge:*

$$i = \frac{100}{R} \epsilon^{-t/RC}$$

analogamente decresce la tensione di uscita $e_o = iR$.

L'andamento può essere ricavato impiegando i valori rilevati dalla fig. 8-5. *Dopo quattro costanti di tempo* (0.2 *volte il periodo*) *la tensione di uscita sarà di nuovo praticamente zero. A metà periodo la tensione di ingresso ritorna a zero, ossia diminuisce di* 100 *volt, e la tensione di uscita varia della stessa quantità da zero a* —100 *volt.*

La capacità comincia a caricarsi di nuovo finchè dopo quattro costanti di tempo la tensione ai suoi capi è di nuovo 100 *volt, e quindi la corrente e la tensione di uscita sono di nuovo nulle.*

In fig. 8-10 *si riporta l'andamento della tensione di uscita.*

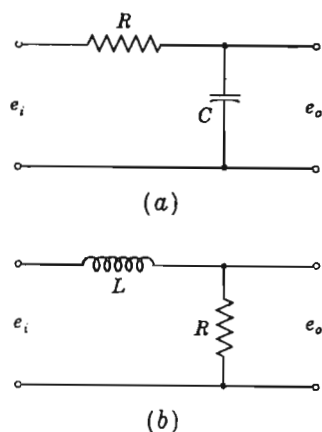



FIG. 8-11 — Circuiti integratori.

I circuiti di fig. 8-11 possono effettuare approssimativamente l'operazione di integrazione. Per il circuito RC ponendo $e_c(0) = 0$ si ha:

$$iRC + \int_0^t i \, dt = e_i C \tag{8-21}$$

Se si pone RC molto grande rispetto al periodo di integrazione, se cioè:

$$iRC \gg \int_0^t i \, dt$$

dall'eq. (8-21) risulta:

$$iR = e_i \qquad (8\text{-}22)$$

Poiché

$$e_o = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

si ha

$$e_o \cong \frac{1}{RC} \int_0^t e_i \, dt \qquad (8\text{-}23)$$

e la tensione di uscita è proporzionale, nell'approssimazione fatta, all'integrale della tensione di ingresso; il circuito prende quindi nome di *circuito integratore.*

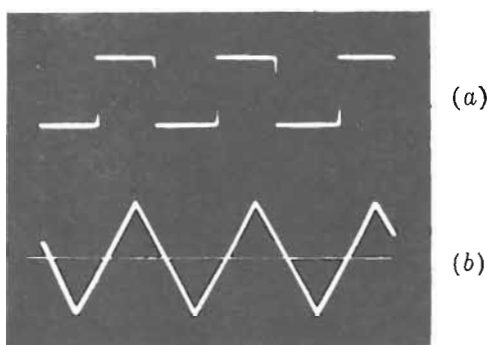



FIG. 8-12 — Onda quadra di ingresso e sua integrazione, con RC/T = 200.

La risposta di un circuito RC, con grande costante di tempo, ad una forma d'onda rettangolare, è riportata in fig. 8-12. Poichè l'eq. (8-23) è approssimata, una integrazione più accurata deve essere effettuata impiegando i metodi illustrati nel capitolo precedente.

Come nel caso del differenziatore induttivo, l'integratore induttivo di fig. 8-11*b* è meno preciso se si impiega un'induttanza che abbia una resistenza apprezzabile.

I circuiti di questo tipo vengono utilizzati per ottenere delle forme d'onda triangolari e a rampa e servono per discriminare impulsi di differente lunghezza, ad esempio per separare gli impulsi di sincronismo orizzontale e verticale nella televisione.

8-4. Formatori d'onda a limitazione.

Nel *circuito limitatore* le tensioni vengono formate eliminando, o smorzando, una parte dell'onda applicata, mediante diodi funzionanti come interruttori. La limitazione può essere controllata variando il livello della tensione applicata o la sua polarità.

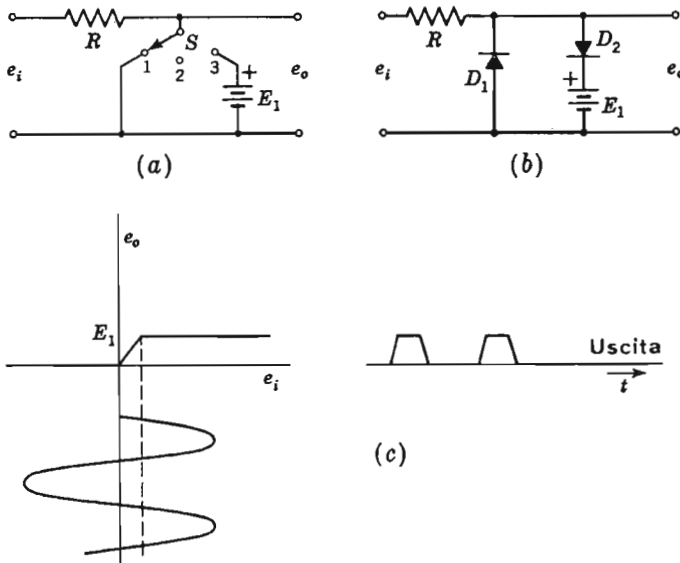



FIG. 8-13 — *a*) Schema ideale di un circuito limitatore. *b*) Realizzazione con diodi.

Gli elementi fondamentali di un limitatore sono riportati in fig. 8-13*a*.

Nel caso in esame, l'interruttore si trova nella posizione 1 per tutte le tensioni negative applicate, nella 2 per tutte le tensioni $0 < e_i < E_1$, e nella 3 per tutte le $e_i > E_1$.

La tensione di uscita e_o (supponendo aperti i terminali di uscita) sarà:

Per *e* negativa	$e_o = 0$
per $0 < e_i < E_1$:	$e_o = e_i$
per $e_i > E_1$	$e_o = E_1$

e la caratteristica di uscita risultante è quella riportata in fig. 8-13*c*. Un'onda sinusoidale viene quindi trasformata in una serie di impulsi positivi trapezoidali, di ampiezza fissata da E_1.

Un dispositivo adatto a svolgere il compito dell'interruttore S è un diodo con in serie un generatore di tensione.

Il generatore e_i deve avere un'alta resistenza interna, rappresentata dal resistore serie R, rispetto alla resistenza del diodo in conduzione. Riferendosi alla fig. 8-13*c*, e trascurando la resistenza del diodo, si può vedere che, per tutti i valori negativi di e_i, il diodo D_1 cortocircuita l'uscita ed $e_o = 0$. Per i valori positivi di $e_i < E_1$, entrambi i diodi D_1 e D_2 sono aperti, ossia hanno i catodi positivi, e l'ingresso e_i è uguale all'uscita, in assenza di carico. Quando $e_i > E_1$, il diodo D_2 conduce e all'uscita appare la tensione E_1, mentre la tensione differenza tra e_i e E_1 cade ai capi di R.

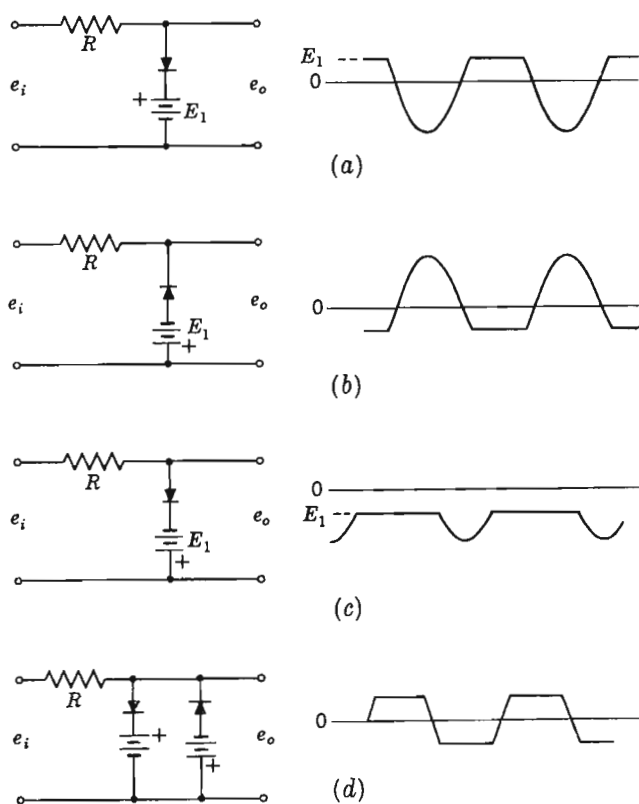



FIG. 8-14 — Circuiti limitatori con diodi in parallelo.

Regolando opportunamente il valore e la polarità di E_1 è possibile limitare l'onda a qualsiasi livello desiderato; invertendo sia il diodo che la batteria si ha la limitazione per valori negativi. In fig. 8-14 e 8-15 sono riportati alcuni schemi e il loro effetto su un'onda sinusoidale in ingresso.

Se la resistenza interna del diodo r_b non è trascurabile rispetto a R, la caduta di tensione sul diodo non sarà trascurabile rispetto a E_1 e l'uscita e_o non sarà piatta nel tratto di limitazione, perchè la caduta sul diodo è funzione della corrente. Questo effetto è visibile nella fig. 8-15*b*.

(*a*) (*b*)

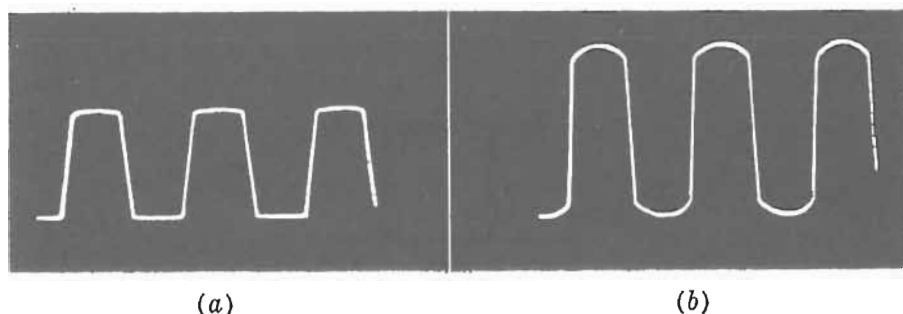



FIG. 8-15 — Funzionamento del diodo come limitatore: *a*) R/r_b grande, *b*) R/r_b piccolo.

Si può anche realizzare un limitatore di tipo serie, come quello di fig. 8-16*a*. Poiché il diodo conduce solo nella direzione indicata dalla freccia, il rettificatore si presenta come un circuito aperto per le tensioni di ingresso negative. Si può inserire una polarizzazione E per variare la tensione di chiusura dell'interruttore. Un circuito serie così realizzato viene talvolta impiegato come *limitatore di rumore*, per tagliare i picchi di rumore che superano il livello del segnale.

Si possono adoperare come limitatori anche i triodi e i transistori. La polarizzazione va fissata in prossimità dell'interdizione, e la tensione in corrispondenza della quale la forma d'onda applicata viene limitata è pari alla differenza tra la tensione di polarizzazione e quella di interdizione. In questo modo può essere cimata metà dell'onda applicata, mentre l'altra metà può essere cimata da un secondo stadio dopo l'inversione di fase di 180° effettuata dal primo stadio amplificatore. Questo tipo di limitazione è detta: *limitazione per interdizione* e può anche verificarsi accidentalmente in amplificatori sovrapilotati. Le forme d'onda sono riportate in fig. 8-16*c*.

La limitazione con triodi può essere effettuata anche in altro modo, sfruttando la saturazione di griglia, come nel circuito di fig. 8-17*a*.

Per gli impulsi positivi la griglia ed il catodo agiscono come un diodo e limitano l'onda praticamente al livello zero, mentre la corrente di griglia dà luogo ad una caduta $i_c R$ uguale alla tensione positiva in ingresso.

Si può inserire una polarizzazione in serie a R_g, in modo che, con opportuni segnali, il tubo vada oltre l'interdizione nella semionda negativa, in modo da ottenere sia la saturazione di griglia che la limitazione per inter-

dizione. In fig. 8-17*b* è riportato il risultato di questo tipo di limitazione; si vede che a causa della resistenza griglia-catodo, che non è trascurabile

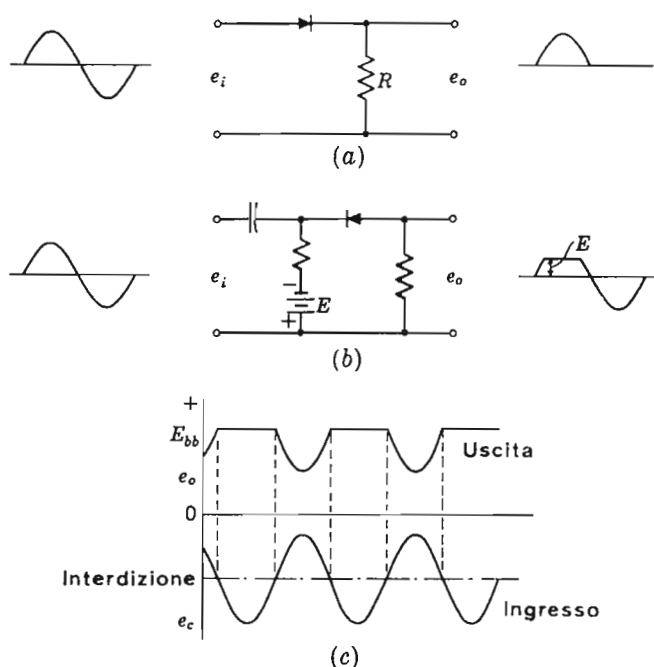



FIG. 8-16 — *a*) Limitatore con diodo serie. *b*) Limitazione sui picchi positivi. *c*) Funzionamento del limitatore con diodo polarizzato.

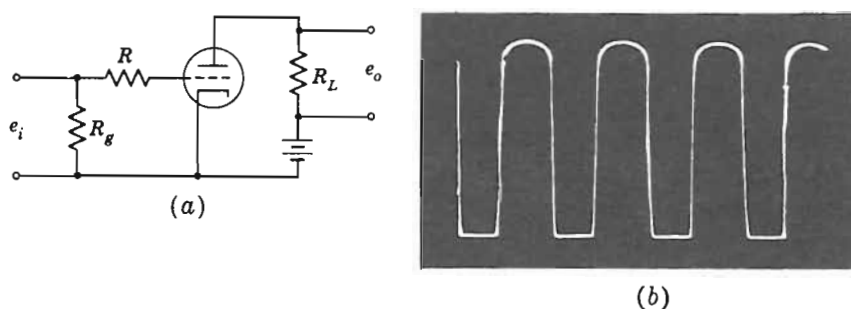



FIG. 8-17 — Limitazione di un'onda sinusoidale mediante saturazione e interdizione del tubo a vuoto.

rispetto a R, la forma d'onda è leggermente arrotondata nell'elongazione positiva. Ripetendo lo stesso processo in uno stadio successivo, dopo la solita rotazione di fase di 180°, entrambe le semionde risulteranno limitate e

si potranno così ottenere delle buone onde rettangolari da un'onda sinusoidale iniziale.

I circuiti limitatori trovano impiego oltre che come formatori d'onda, anche in televisione dove sono impiegati per separare i segnali di sincronismo da quelli video. Gli impulsi di sincronizzazione sono posti tra i segnali di scansione del quadro e rispetto a questi hanno ampiezza maggiore. Il limitatore quindi separa i segnali di sincronismo, che invia ai circuiti degli oscillatori a dente di sega, da quelli video, che si trovano sotto il livello di limitazione, e che vengono inviati agli amplificatori video.

8-5. Circuiti di livellamento.

Si chiama *circuito di ripristino della componente continua*, o *livellatore*, un circuito che porti il picco positivo o negativo di un'onda ad un determi-

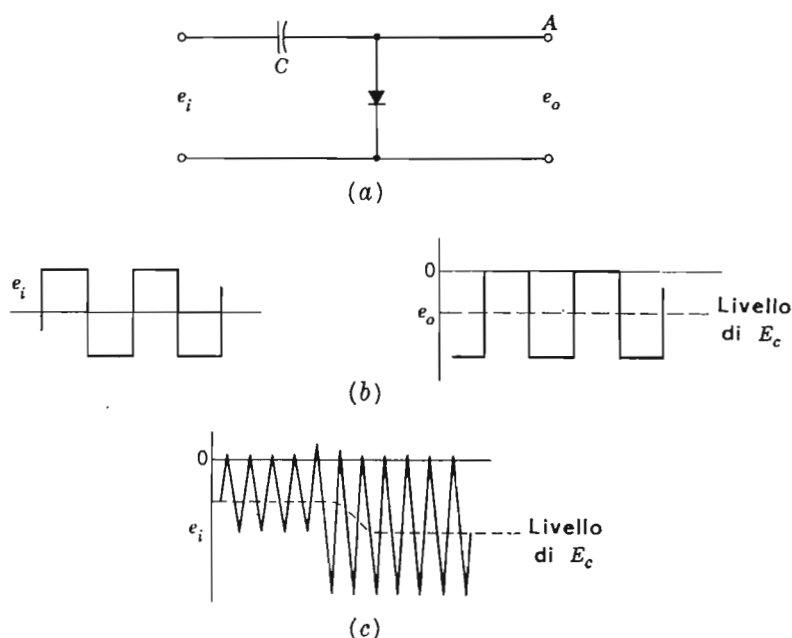



FIG. 8-18. — (*a*) Circuito livellatore a diodo. (*b*) Livellamento di un'onda quadra. (*c*) Livellamento di un'onda sinusoidale.

nato livello continuo. In fig. 8-18*a* è rappresentato un semplice circuito che può svolgere questa funzione. La costante di tempo di tale circuito, data dal prodotto della resistenza diretta R_f e della capacità C, deve essere piccola ri-

spetto al periodo del segnale applicato, mentre la costante di tempo, data dal prodotto della resistenza inversa R_b del diodo e della capacità C, deve essere grande. Il generatore deve inoltre avere una bassa resistenza interna.

Quando il terminale A è positivo il diodo conduce e connette questo terminale a massa, ossia livella i picchi positivi del segnale, mentre la tensione applicata e_i compare ai capi di C, che si carica rapidamente attraverso la R_f del diodo ed il generatore supposto a bassa resistenza interna. Quando la tensione di ingresso cade istantaneamente a zero o a un valore negativo, il potenziale a destra di C deve diminuire della stessa quantità, portando il punto A ad un valore negativo di tensione. Poiché ora il diodo è aperto e la costante di tempo R_bC è grande, C non può scaricarsi apprezzabilmente durante l'intervallo di tempo in cui la tensione applicata è negativa e A rimane a potenziale negativo. Quando l'ingresso e_i cresce di nuovo, come nell'onda quadra di fig. 8-18*b*, l'uscita torna di nuovo a zero. Quindi, nell'ipotesi che R_b sia grande e che la resistenza del generatore sia piccola, i picchi positivi di e_i sono livellati a zero e si introduce nell'onda una componente continua.

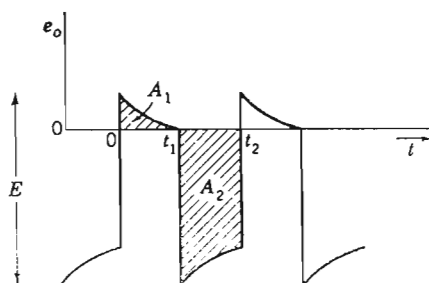



FIG. 8-19. — Analisi dell'azione di livellamento.

Il livellamento non sarà mai perfetto; infatti C si scarica leggermente durante il semiperiodo negativo, poichè R_b ha valore molto elevato ma non infinito. Di conseguenza il picco positivo deve superare leggermente lo zero per permettere a C di riaccumulare la carica perduta nel periodo di scarica. La durata di questo tempo di ricarica dipende dal valore della costante di tempo R_fC. La precisione del livellamento del circuito, ad un dato valore di tensione, è quindi funzione del rapporto tra la resistenza diretta e quella inversa del diodo.

Nella semionda positiva, la capacità si carica attraverso la resistenza diretta R_f del diodo (trascurando l'eventuale resistenza del generatore). Riferendosi alla fig. 8-19, detta $e_f(t)$ la tensione durante l'intervallo positivo,

la corrente di carica del condensatore è $i_f = e_f/R_f$. Quindi:

$$\frac{1}{C}\int_0^{t_1} i_f \, dt = \frac{1}{CR_f}\int_0^{t_1} e_f \, dt = \frac{A_1}{CR_f} \tag{8-24}$$

dove l'integrale di e_f è l'area A_1 compresa nel picco positivo in fig. 8-19.

Detta $e_b(t)$ la tensione di uscita durante l'intervallo negativo in cui la capacità C si scarica attraverso la resistenza inversa R_b del diodo, si ha $i_b = e_b/R_b$ e quindi:

$$\frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i_b \, dt = \frac{1}{CR_b}\int_{t_1}^{t_2} e_b \, dt = \frac{A_2}{CR_b} \tag{8-25}$$

Dopo pochi cicli, raggiunte le condizioni di regime, la variazione totale della tensione ai capi della capacità durante l'intero ciclo deve essere nulla. Si ha cioè:

$$\frac{A_1}{CR_f} = \frac{A_2}{CR_b} \tag{8-26}$$

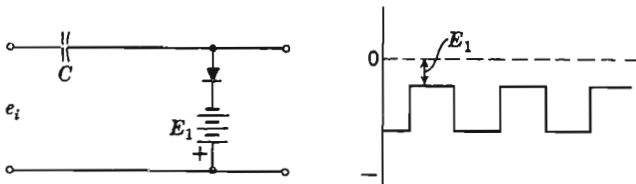



FIG. 8-20. — Limitazione e livellamento di un'onda sinusoidale per mezzo della saturazione dell'ingresso. Si notino le sovraelongazioni dovute al transitorio di carica di C.

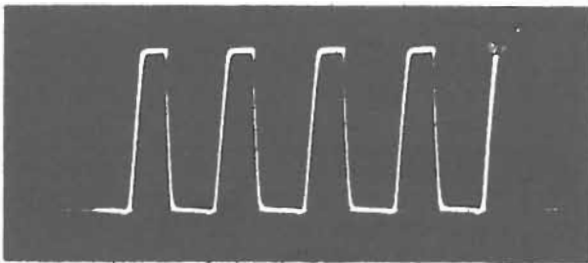



FIG. 8-21. — Livellamento a valori diversi dallo zero.

e di conseguenza

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_f}{R_b}$$

Questo risultato mostra come la sovraelongazione positiva sia piccola per un'onda simmetrica, se si assume quale rapporto tra le resistenze quello dei diodi reali.

Tuttavia, poiché sono le aree (in effetti le cariche) che vengono rapportate, un impulso positivo molto stretto non sarà livellato così esattamente al valore zero come un impulso largo. In fig. 8-20 si nota questo effetto piccolo ma evidente. Invertendo il diodo si possono livellare i picchi negativi e ponendo una polarizzazione in serie al diodo si possono ottenere diversi valori della componente continua in uscita, come in fig. 8-21.

8-6. Il livellamento nella tecnica televisiva.

Lo standard del segnale televisivo prevede che, prendendo come riferimento il livello dell'impulso di spegnimento, il bianco sia rappresentato da un valore elevato della tensione rispetto al riferimento e il grigio da un valore intermedio, mentre il nero dal livello di spegnimento.

L'impulso di spegnimento deve interdire la griglia del tubo a raggi catodici durante il tempo in cui il pennello ritorna da destra a sinistra, in modo

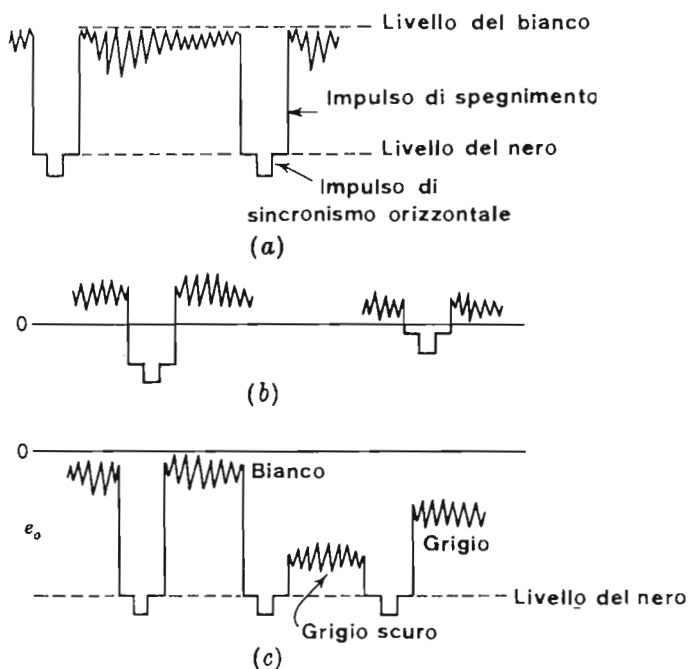



FIG. 8-22. — (*a*) Segnale video televisivo. (*b*) Segnale TV dopo il passaggio nell'amplificatore RC. (*c*) Segnale TV dopo il livellamento.

da evitare che sull'immagine compaiano le righe di ritorno. Quindi il livello di spegnimento deve essere fissato ad una tensione negativa sufficiente ad interdire il fascetto catodico e il livello del bianco ad una tensione di griglia che porti il tubo fortemente in conduzione.

Dopo che un segnale come quello di fig. 8-22*a* è passato in un amplificatore ad accoppiamento capacitivo, il riferimento, ossia il livello di spegnimento, viene perso e il segnale appare come in fig. 8-22*b*, riferito ad un livello determinato dal valor medio del segnale. Ciò dà luogo ad un'immagine in cui l'illuminazione media è sempre la stessa e in cui il livello di spegnimento può eliminare le righe di ritorno per alcune scene e non per altre.

Si effettua quindi un livellamento che fissa il livello in continua degli impulsi di spegnimento e dà luogo a delle forme d'onda come quelle in fig. 8-22*c*; in tal modo si ha una tensione negativa di spegnimento sempre sufficiente e viene ripristinato il livello medio di illuminazione dell'immagine al valore esatto.

8-7. La base dei tempi e la generazione di denti di sega.

La deflessione del pennello elettronico, nei tubi a raggi catodici a deflessione elettrostatica, è proporzionale alla tensione di deflessione e_d. Se si fa in modo che e_d sia funzione lineare del tempo, $e_d = kt$, la deflessione della traccia risulterà lineare nel tempo. Questa è la *base dei tempi* o *tensione di spazzolamento* utilizzata nei tubi a raggi catodici. La tensione di spazzolamento ha la forma d'onda a dente di sega della fig. 8-23, ossia è una rampa,

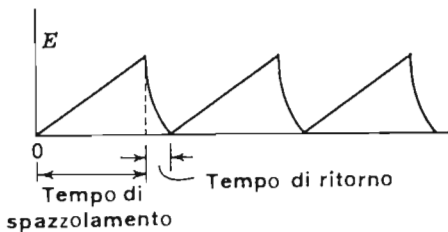
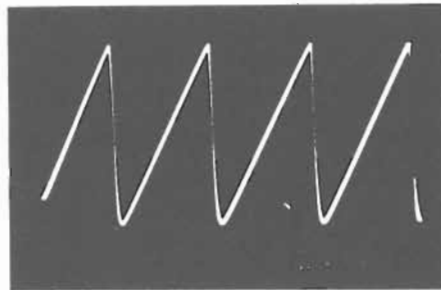



FIG. 8-23. — (*a*) Tensione di deflessione a denti di sega. (*b*) Tensione di deflessione vista allo oscilloscopio.

ripetitiva, che cresce linearmente. Questa tensione applicata alle placchette di deflessione dell'asse x, fa apparire sullo schermo le tensioni applicate alle placchette dell'asse y in funzione del tempo. La frequenza di ripetizione del

dente di sega è regolata in modo da far apparire sullo schermo, per ogni rampa, u cicli della tensione applicata all'asse y.

Durante il tratto lineare della tensione il pennello elettronico si muove attraverso lo schermo lungo l'asse x a velocità uniforme e, successivamente, ritorna molto rapidamente al punto di partenza; la traccia di ritorno o non viene registrata o appare con luminosità molto ridotta.

La forma d'onda ideale a dente di sega è difficile da ottenere elettronicamente; sono stati messi a punto vari metodi per avvicinarsi alla linearità. Alcuni di questi metodi saranno esaminati nei paragrafi seguenti.

8-8. La tensione di spazzolamento ottenuta mediante un circuito RC.

Le forme d'onda triangolari si ottengono di solito prelevando una piccola parte della tensione, ai capi di un condensatore che si carica ad una tensione E attraverso una resistenza R.

La differenza di potenziale ai capi di C segue la legge:

$$e_C = E(1 - \varepsilon^{-t/RC}) \tag{8-27}$$

Sviluppando in serie la funzione esponenziale si ha:

$$e_C = E\left(\frac{t}{RC} - \frac{t^2}{2R^2C^2} + \frac{t^3}{6R^3C^3} - \ldots\right) \tag{8-28}$$

Se si considera solo la parte iniziale della curva crescente della tensione, oppure se t/RC è sufficientemente piccolo, si ha:

$$e_C \cong \frac{Et}{RC} = kt \tag{8-29}$$

e si ottiene così un andamento approssimativamente lineare. Si può notare però che:

$$\frac{e_C}{E} = \frac{t}{RC} \tag{8-30}$$

e quindi se il rapporto t/RC deve essere piccolo per ottenere una elevata linearità, anche il rapporto tra la massima tensione raggiunta e la tensione E di carica sarà piccolo. Di solito è necessario un successivo amplificatore, con una buona risposta in frequenza, per ottenere una tensione sufficientemente elevata per la deflessione del fascetto del tubo a raggi catodici.

Poiché è spesso necessario ottenere una notevole precisione nella base dei tempi, ossia nella forma d'onda a rampa, è utile determinare lo scosta-

mento dall'effettiva linearità che si ha con la curva di carica esponenziale e definire la massima tensione e_c, per una data E, che dia luogo ad un prestabilitc errore di linearità.

Lo scostamento dalla linearità può essere definito in molti modi; uno dei più impiegati è quello illustrato in fig. 8-24 dove la curva esponenziale è paragonata ad una linea retta che passa per il punto definito da t_1 e dal valore prefissato di $e_c = e_1$. L'equazione della curva è:

$$e = \frac{e_1}{t_1/RC} \frac{t}{RC} = \frac{E(1 - \epsilon^{-t_1/RC})}{t_1/RC} \frac{t}{RC} \tag{8-31}$$

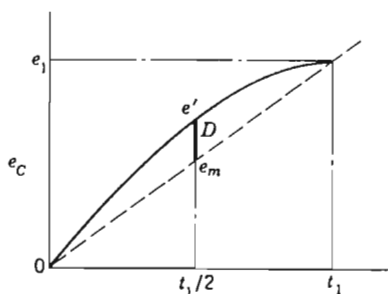



FIG. 8-24. — Deviazione dalla linearità della tensione di deflessione di un circuito RC.

Se il valore di t_1/RC è piccolo, il termine esponenziale può essere approssimato dai primi due termini della serie dell'eq. (8-28). L'eq. (8-31) si semplifica quindi nella relazione:

$$e \cong E\left(1 - \frac{t_1}{2RC}\right) \frac{t}{RC} \tag{8-32}$$

Il punto di massima deviazione dalla linearità si trova a circa metà del dente di sega e può essere individuato in corrispondenza di $t = t_1/2$ senza commettere un notevole errore. La tensione sul condensatore, può essere ottenuta dall'eq. (8-28):

$$e' \cong E\left(1 - \frac{t_1}{4RC}\right) \frac{t_1}{2RC} \tag{8-33}$$

La deviazione dalla linearità, D, a $t = t_1/2$, può quindi essere definita come

$$\begin{aligned} D,\% &= \frac{e' - e_m}{e'} \times 100\% \\ &= \frac{E(1 - t_1/4RC)t_1/2RC - E(1 - t_1/2RC)t_1/2RC}{E(1 - t_1/4RC)t_1/2RC} \times 100\% \\ &= \frac{t_1/4RC}{1 - t_1/4RC} \times 100\% \end{aligned} \tag{8-34}$$

Questa deviazione dalla linearità è riportata in funzione di t_1/RC nella fig. 8-25. Dall'eq. (8-30) si ha che $t_1/RC = e_1/E$, e quindi questa curva può anche essere impiegata per determinare quale sia la percentuale della tensione di carica utilizzabile, assegnata una data deviazione dalla linearità.

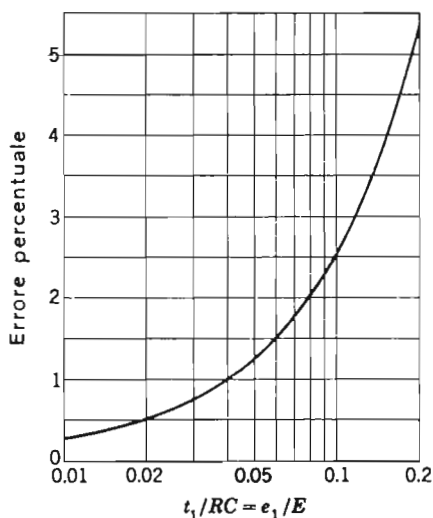



FIG. 8-25. — Errore percentuale di linearità della tensione di deflessione di un circuito RC.

Un circuito molto semplice, basato sul principio del circuito RC, è quello che impiega un diodo a gas per la scarica del condensatore; lo schema è riportato in fig. 8-26. La forma d'onda che si ottiene dipende dal principio di funzionamento del diodo a gas; quando e_0 raggiunge il potenziale di innesco, il gas si ionizza, circola corrente e il diodo si comporta, praticamente, come un cortocircuito. La tensione ai capi del condensatore cade bruscamente, e quando il potenziale raggiunge la tensione di spegnimento del diodo, la scarica nel gas cessa, e il diodo a gas si comporta di nuovo come

un circuito aperto. La tensione ai capi di C ricomincia ad aumentare e si ripete il ciclo.

Il processo è quindi periodico e si ottengono delle tensioni a dente di sega, di periodo T, pari al tempo necessario perché il condensatore si carichi a $e_{o\,max}$. Dall'eq. (8-27) si ricava il valore di T:

$$T = RC \ln \frac{E}{E - e_{o,max}} \tag{8-35}$$

quando l'ampiezza è $e_{o\,max}$. Il tempo di spazzolamento è di solito regolato grossolanamente variando C a scatti, e con continuità per mezzo di una resistenza variabile R.

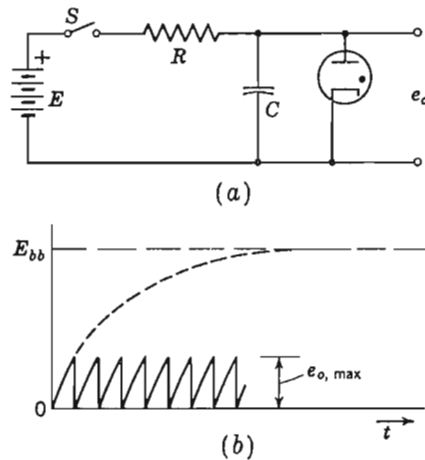



FIG. 8-26. — (*a*) Circuito di carica RC con diodo a gas. (*b*) Possibilità di ottenere denti di sega quasi lineari con diodo a gas.

Poiché il potenziale di innesco del diodo a gas non è stabile e poiché non è possibile controllare in nessun modo il valore di $e_{o\,max}$, si impiega di norma in questo semplice circuito il triodo a gas, o thyratron.

8-9. Generatore di tensione a dente di sega a thyratron.

L'impiego di un tubo a gas a tre elettrodi, thyratron, per generare la tensione di spazzolamento con un circuito di carica RC, anche se non elimina le limitazioni inerenti alla linearità, aumenta la stabilità; si può inoltre sincronizzare la frequenza di spazzolamento con quella del segnale da osservare. In fig. 8-27 è riportato un circuito di spazzolamento RC controllato a

thyratron; la resistenza R_g ha la funzione di limitare la corrente di griglia dopo che è iniziata la scarica.

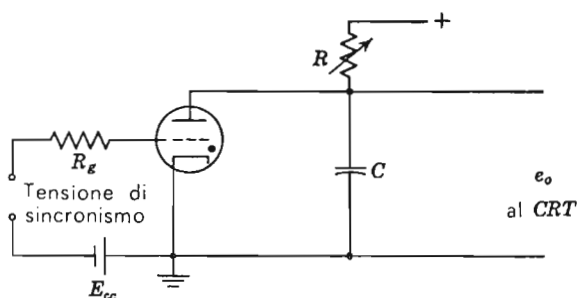



FIG. 8-27. — Generatore di tensione di deflessione controllato a thyratron.

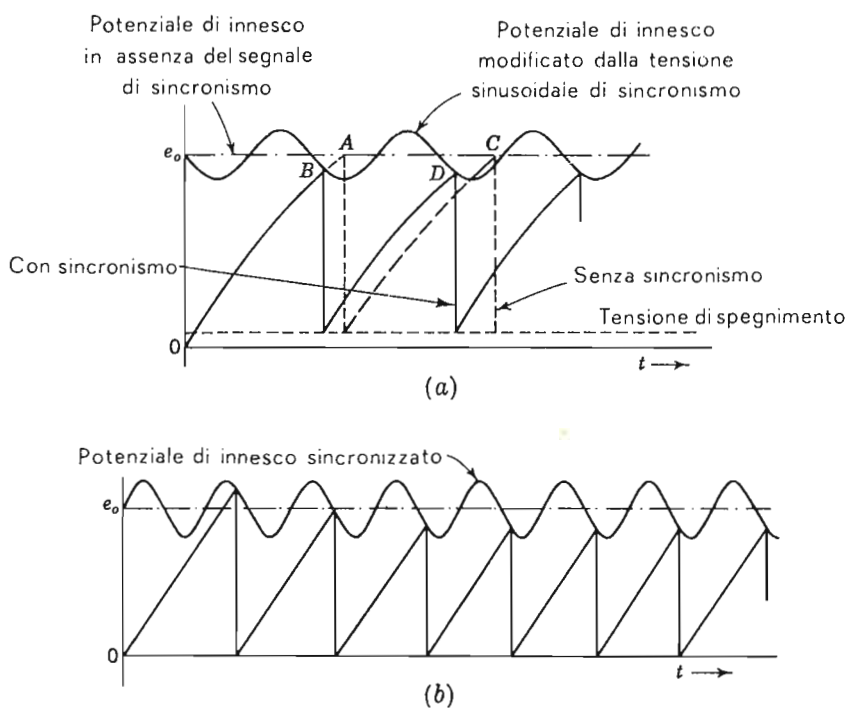



FIG. 8-28. — (a) Sincronizzazione di un generatore di denti di sega a thyratron. (b) Il transitorio all'accensione.

Per un dato valore della polarizzazione di griglia E_{cc} e della tensione anodica e_o, il thyratron si ionizza e permette la scarica di C; se si rende E_{cc} più negativa, si ottiene un più alto valore del potenziale di innesco. In fig. 8-28

si può osservare l'azione sincronizzante di un segnale inviato alla griglia. Se non è presente il segnale di sincronizzazione, il thyratron si innesca al punto A in cui la tensione sul condensatore raggiunge il valore critico di innesco e_0. Nel ciclo successivo il punto di scarica sarebbe C, e non vi sarebbe nessuna relazione fissa con la frequenza del segnale da visualizzare sullo schermo del tubo a raggi catodici. Negli spazzolamenti successivi, quindi, la posizione dell'immagine slitterebbe o avrebbe una certa incertezza.

Con l'introduzione del segnale di sincronizzazione, il potenziale anodico critico assume la forma della sinusoide riportata in fig. 8-28*a* e la scarica si ha in B nel primo ciclo e in D nel secondo. Il periodo dell'onda triangolare è leggermente ridotto e la scarica si verifica sempre allo stesso punto in ogni ciclo, ossia lo spazzolamento è agganciato alla frequenza da visualizzare sullo schermo.

In fig. 8-28*b* è riportato il transitorio al quale è sottoposto il circuito mentre adatta la propria frequenza di oscillazione a quella del segnale di sincronizzazione.

Tutti i generatori di dente di sega a thyratron possono funzionare solo a frequenze relativamente basse a causa del tempo necessario perché il gas si deionizzi tra due scariche successive. Il limite è di solito compreso tra 30.000 e 50.000 Hz circa. A causa di questa limitazione gli oscilloscopi più elaborati impiegano generatori di spazzolamento realizzati con tubi a vuoto o transistori, che possono funzionare fino a frequenze dei megahertz.

8-10. Il generatore di spazzolamento comandato.

Spesso si desidera che il segnale di spazzolamento parta nell'istante in cui si presenta un particolare evento o segnale, e che riparta solo se il segnale si ripete. Per questa applicazione sono particolarmente adatti i tubi ed i transistori; il loro impiego elimina la limitazione in frequenza dei circuiti con tubi a gas. Nel semplice circuito di fig. 8-29 la griglia è normalmente a potenziale zero in mancanza di segnale d'ingresso; la tensione ai capi di C è quindi uguale a $E_{bb} - i_b R_L = e_b = e_0$, cioè uguale alla tensione ai capi del tubo. Se si applica un impulso rettangolare all'ingresso, la griglia è portata oltre l'interdizione, il condensatore C si carica attraverso R e la tensione e_0 ai capi di C comincia a crescere verso il valore E_{bb}. Questo aumento continua lungo tutta la durata dell'impulso, che è detto *porta* (gate) perchè apre, ossia fa funzionare, il circuito.

Alla fine dell'impulso la griglia viene portata di nuovo a zero, e il tubo va in conduzione; il condensatore C si scarica rapidamente attraverso la via a bassa resistenza fornita dal tubo, e il circuito ritorna nella sua condizione

iniziale. Si ottiene quindi una forma d'onda di spazzolamento con durata ed istante di partenza molto ben definiti.

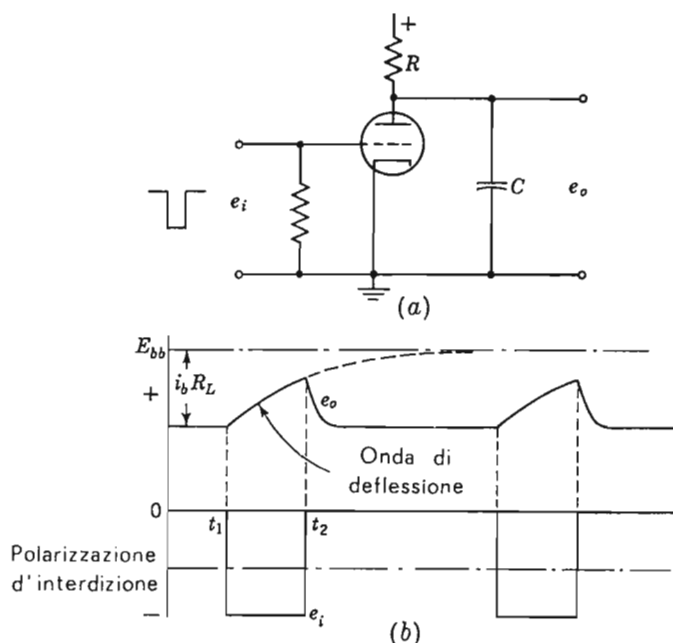



FIG. 8-29. — Deflessione con circuito RC e triodo.

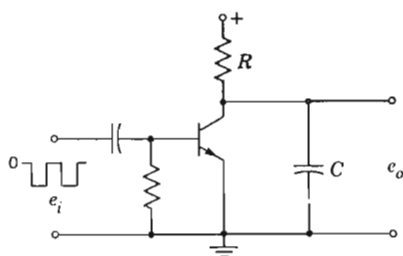



FIG. 8-30. — Generatore di tensione di deflessione a transistore.

Analogamente si può realizzare un circuito generatore di tensioni di spazzolamento a transistori, del tipo comandato, con il circuito di fig. 8-30. Il funzionamento è essenzialmente lo stesso che nel caso del triodo. Per un transistore del tipo N-P-N, come in figura, è necessario un impulso negativo per portare l'ingresso in interdizione; si ottiene in uscita un'onda positiva.

Con un transistore di tipo P-N-P le polarità dell'ingresso e dell'uscita saranno invertite.

Esempio — *Progettare un circuito a dente di sega con tubo a vuoto, impiegante il triodo* 6C4; *il circuito abbia un periodo di* 100 μs *e una non linearità dell'*1,25 *per cento.*

In base alla condizione sulla non linearità, dalla fig. 8-25 *si vede che* $e_1/E = 0{,}05$. *Se* $e_{bb} = 250$ *volt e se si pone R pari a* 50.000 *ohm, dalle caratteristiche del tubo si ricava una corrente anodica, per una polarizzazione nulla, di* 4,3 mA *e una tensione anodica di* 250 — 0,0043 · 50.000 = 35 *volt. La tensione utile per la carica di C è* 250 — 35 = 215 *volt. Quindi:*

$$e_0 = 215(1 - e^{-0{,}05}) = 10{,}5 \text{ volt}$$

è l'ampiezza di picco dell'onda in uscita al tempo t_2. *L'eq.* (8-30) *ci dà:*

$$\frac{e_1}{E} = \frac{t_1}{RC} = 0{,}05$$

$$RC = \frac{100 \times 10^{-6}}{0{,}05} = 0{,}002 \text{ s}$$

e poichè R = 50.000 *ohm, si ha:*

$$C = \frac{0{,}002}{50{,}000} = 0{,}04 \times 10^{-6} = 0{,}04\ \mu F$$

Durante il tempo in cui la griglia è a potenziale zero, il valore della r_b *del tubo è:*

$$r_b = \frac{35}{0{,}0043} = 8100 \text{ ohm}$$

Il condensatore si scaricherà fino a 35 *volt attraverso il parallelo della resistenza del tubo e di R, ossia circa* 7.000 *ohm. La costante di tempo* r_bC *è:*

$$r_b = 7000 \times 0{,}04 \times 10^{-6} = 0{,}00028 \text{ s}$$

Il transitorio di scarica sarà completato approssimativamente in quattro costanti di tempo, ossia:

$$T = 4 \times 0{,}00028 = 1120 \mu s$$

Questo valore pone un limite superiore alla frequenza di ripetizione degli impulsi di circa 800 *impulsi al secondo, a meno che il progetto non sia ulteriormente modificato per diminuire la costante di tempo* r_bC.

Lo spazzolamento può talvolta essere di durata molto inferiore al periodo totale, per cui il fascetto elettronico resta ad un'estremità della zona di deflessione per la maggior parte del tempo. Con l'impiego di un altro amplificatore pilotato dalla tensione che si ha ai capi di R, si può ottenere un impulso che, applicato alla griglia del tubo a raggi catodici, porti in conduzione il tubo solo durante il tempo dello spazzolamento.

8-11. Miglioramento della linearità delle tensioni a dente di sega.

Poichè è importante disporre di basi dei tempi estremamente precise nel radar e negli altri sistemi che effettuano misure di tempo, si sono elaborate molte modifiche del circuito elementare RC per migliorare la linearità delle tensioni a dente di sega. Un circuito comunemente impiegato è *l'integratore di Miller* di fig. 8-31, che genera una rampa lineare di tensione per integrazione di un'onda rettangolare di ingresso. Il circuito impiega un pentodo a μ costante, e l'onda rettangolare di ingresso, ossia la tensione « porta » viene applicata al soppressore polarizzato normalmente ad una tensione negativa sufficiente ad interdire la corrente anodica; la corrente catodica va quindi tutta sulla griglia schermo.

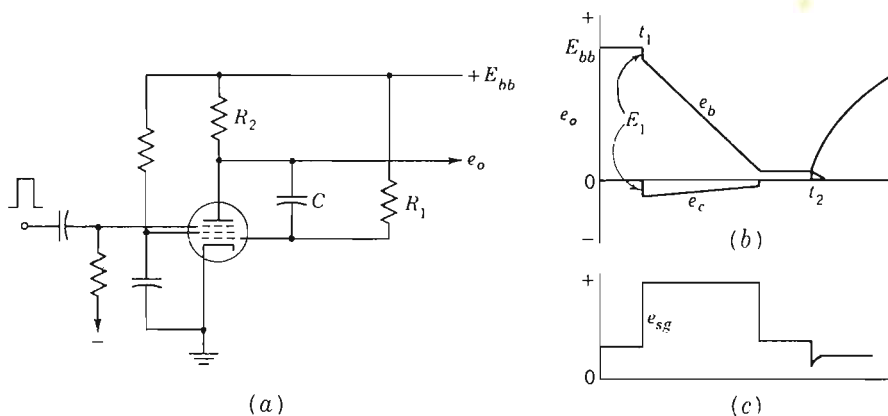



FIG. 8-31. — (*a*) Circuito Miller. (*b*) Forma d'onda anodica e di griglia. (*c*) Forma d'onda sulla griglia schermo.

Il potenziale della griglia controllo è livellato ad un valore prossimo a quello del catodo per mezzo della resistenza R_1, collegata alla tensione positiva di alimentazione, e che può raggiungere il valore di 1 megaohm. La resistenza R_2 ha un valore di circa 0,1 megaohm. Nella condizione di riposo, ossia durante l'interdizione, la capacità di integrazione C si carica fino ad

un valore prossimo a E_{bb}. All'istante t_1 viene applicato un impulso rettangolare positivo, detto tensione « porta », al soppressore, per far partire l'onda triangolare; questo impulso fa sì che la corrente catodica si trasferisca in massima parte sull'anodo, per cui il potenziale anodico diminuisce di E_1 volt. La tensione ai capi di C non può variare bruscamente, per cui anche la griglia subirà una variazione di potenziale di E_1 volt. La griglia limita il valore di E_1: infatti se il potenziale di griglia andasse sotto l'interdizione, la corrente anodica si annullerebbe e la tensione anodica tornerebbe di nuovo a E_{bb}, annullando l'effetto precedente.

Si raggiunge quindi un equilibrio con un valore di E_1 compreso tra lo zero e il valore della tensione di interdizione. Per i pentodi usuali, con $E_{bb}=$ $=300$ volt, il potenziale di interdizione è di circa — 5 volt, per cui E_1 deve essere minore di 5 volt.

Allo scalino iniziale, dovuto ad E_1, segue una diminuzione lineare della tensione durante la scarica della capacità C attraverso R_1 e la via anodo-catodo; la tensione di griglia cresce leggermente mentre la tensione ai capi di C diminuisce.

La corrente di scarica passa attraverso R_1, ma la caduta ai capi di R_1 è fissata da $E_{bb} - e_c$; poiché la tensione di griglia e_c varia molto poco, la capacità si scarica praticamente a corrente costante e la tensione di spazzolamento prodotta è praticamente lineare, come ci si attendeva dalla teoria dell'amplificatore integratore basata sulla ipotesi che $|A|$ sia grande. È utile trovare le condizioni di funzionamento del circuito per poter determinare lo scostamento dalla linearità.

La tensione ai capi della capacità è:

$$e_b - e_c = -\frac{1}{C}\int_0^t i_C \, dt = -\frac{i}{sC} \qquad (8\text{-}36)$$

La griglia è a potenziale negativo durante l'onda triangolare, per cui si può trascurare la sua corrente. La corrente i_c è quindi la corrente di carica che circola attraverso R_1, data da:

$$i_C = \frac{E_{bb} - e_c}{R_1} \qquad (8\text{-}37)$$

Detto $A = e_b/e_c$ il guadagno, si ha:

$$(1 - A)sR_1Ce_b + e_b = AE_{bb} \qquad (8\text{-}38)$$

Introducendo il coefficiente a definito come:

$$a = \frac{1}{(1 - A)R_1C} \qquad (8\text{-}39)$$

l'equazione differenziale del circuito diventa:

$$e_b = \frac{a}{s + a} AE_{bb} \tag{8-40}$$

Imponendo la condizione che $e_b = E_{bb}$ per $t=0$, la soluzione è data da:

$$e_b = E_{bb} - AE_{bb}(1 - \epsilon^{-t/(1-A)R_1C}) \tag{8-41}$$

Questa equazione fornisce la diminuzione della tensione dal valore E_{bb}, a partire da $t=0$ e trascurando E_1. Questa diminuzione è proprio l'onda triangolare, e quindi la tensione di spazzolamento è data dall'equazione:

$$e_o = - AE_{bb}(1 - \epsilon^{-t/(1-A)R_1C}) \tag{8-42}$$

Il circuito ha quindi l'effetto di aumentare la costante di tempo del fattore $(1 - A) \cong |A|$. In effetti esso impiega una parte molto piccola della curva esponenziale di carica, e sfrutta quasi integralmente la E_{bb}, fornendo una tensione di spazzolamento quasi pari alla tensione di alimentazione.

Sviluppando in serie l'esponenziale dell'eq. (8-42) si ha:

$$e_o = - \frac{A}{(1 - A)} E_{bb} \frac{t}{CR_1} \left(1 - \frac{t}{2(1 - A)CR_1} + \ldots\right)$$

Poiché $|A|$ viene scelto grande ($\cong 100$ per i pentodi), questa espressione si semplifica in:

$$e_o \cong - E_{bb} \frac{t}{CR_1} \left(1 - \frac{t}{2ACR_1} + \ldots\right) \tag{8-43}$$

Questo risultato giustifica la caduta di tensione quasi lineare riportata in fig. 8-31*b*. Se l'impulso rettangolare di ingresso è molto lungo la tensione anodica va in saturazione, ossia scende a pochi volt sopra lo zero, prima dell'istante t_2 e la tensione di griglia va a zero a partire da t_2 con una costante di tempo CR_1. Al termine dell'impulso rettangolare, il soppressore interdice di nuovo la corrente anodica, e la capacità C si ricarica alla tensione E_{bb} attraverso la resistenza R_2 e il circuito griglia-catodo, che presenta di solito una bassa resistenza. Poichè l'amplificatore va in saturazione, per la forma d'onda d'uscita viene praticamente sfruttato l'intero valore di E_{bb}; la velocità di salita della rampa è $(E_{bb}+E_1)/CR_1$ volt al secondo.

La deviazione dalla linearità, trattandosi sempre di una curva esponenziale di carica, può essere calcolata con l'eq. (8-34) ossia:

$$D = \frac{(t_2 - t_1)/4ACR_1}{1 - (t_2 - t_1)/4ACR_1} \cong \frac{t_2 - t_1}{4ACR_1} \times 100\% \tag{8-44}$$

La deviazione dalla linearità viene quindi ridotta, impiegando il circuito di Miller, di un fattore $\cong|A|$, rispetto a quella riportata in fig. 8-25.

La forma d'onda della tensione della griglia schermo di fig. 8-31*c* può essere utilizzata per portare in conduzione il tubo a raggi catodici solo durante la variazione lineare di tensione, rendendo visibile la traccia della deflessione solo per la durata della forma d'onda di spazzolamento.

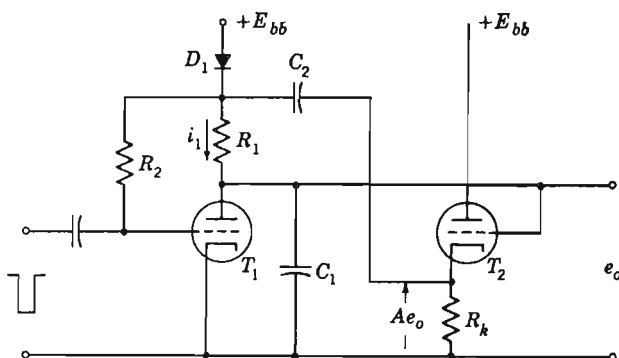



FIG. 8-32 — Circuito autoelevatore.

Il *circuito bootstrap* (auto elevatore) di fig. 8-31*c* è un altro circuito linearizzatore del dente di sega. Nella figura, il tubo T_1 è pilotato da un impulso rettangolare di commutazione. All'uscita di T_1 vi è il condensatore C_1, che si carica attraverso D_1 e R_1. La tensione e_o di uscita viene prelevata ai capi di C_1. L'inseguitore catodico T_2 fornisce una reazione di corrente al circuito anodico di T_1, mantenendo praticamente costante la corrente di carica di C_1. Il tubo T_1 è normalmente in conduzione, e C_1 è carico al valore della tensione anodica ai capi di T_1. Quando si applica l'impulso negativo, T_1 viene interdetto e C_1 comincia a caricarsi. Inizialmente C_2 è carico alla tensione E_{bb} perchè $e_o = 0$, e quindi la tensione di uscita dell'inseguitore catodico è $Ae_o \cong 0$. Appena C_1 comincia a caricarsi e_o cresce e sul catodo dell'inseguitore catodico si presenta la tensione Ae_o, che è in serie alla tensione ai capi del condensatore C_2. Quando $E_{bb} + Ae_o$ supera E_{bb}, il diodo D_1 disconnette il circuito dall'alimentazione, per cui la tensione d'uscita non è limitata a E_{bb} ma continua a crescere finchè non termina l'impulso di comando sulla griglia di T_1.

Si puó scrivere per la maglia con le due capacità:

$$i_1R_1 + e_o = E_{C2}(0) + Ae_o$$

Si è però detto precedentemente che $E_{c2}(0)=E_{bb}$, per cui:

$$i_1R_1 = E_{bb} + (A - 1)e_o \qquad (8\text{-}45)$$

Se $A = 1$, condizione che può essere molto vicina alla realtà per un inseguitore catodico ben progettato, ne segue:

$$i_1 \cong \frac{E_{bb}}{R_1} \qquad (8\text{-}46)$$

e il condensatore C_1 viene caricato a corrente costante, condizione necessaria per avere un aumento lineare della tensione ossia una rampa lineare.

In pratica il circuito fa in modo che il condensatore C_1, invece di caricarsi alla tensione E_{bb}, si carichi ad una tensione crescente $E_{bb} + \frac{1}{C} \int i \, dt$ Questo aumento della tensione di carica compensa l'aumento della tensione ai capi del condensatore, per cui la tensione ai capi di R_1 rimane costante e quindi anche la corrente che in essa circola rimane costante.

Il grado di linearità raggiungibile dalla tensione a rampa dipende dal grado di approssimazione con cui il guadagno $|A|$ si avvicina all'unità, in modo da annullare l'ultimo termine dell'eq. (8-45). Si è supposto che il rapporto C_2/C_1 sia grande, in modo che la tensione di C_2 rimanga costante e uguale a E_{bb} durante la rampa e che le variazioni di e_0 vengano riportate interamente su R_1. Vi è tuttavia un limite massimo per il valore di C_2, perchè esso deve ricaricarsi attraverso il diodo e la resistenza d'uscita dell'inseguitore catodico nel tempo intercorrente tra due successive onde di spazzolamento. Se C_2 è troppo grande, il periodo di ripetizione dell'onda di spazzolamento dipenderà dal tempo di ricarica di C_2. Poichè è possibile ottenere per T_2 un guadagno di 0,95 e oltre, si può rendere molto piccola la non linearità, che è $(1 - |A|)$ volte più piccola di quella che si ottiene con la carica non compensata di un circuito RC.

L'errore di linearità nel circuito di Miller è funzione di $1/|A|$, con $|A|$ grande, mentre quello del circuito autoelevatore (bootstrap) è funzione di $(1 - |A|)$, con $|A|$ molto prossimo all'unità ma minore di questa. Quindi un guadagno di 20 nel circuito Miller è equivalente per la linearità a un guadagno di 0,95 nel circuito autoelevatore.

Vengono spesso impiegate delle varianti di questi circuiti fondamentali. Una di queste è il circuito *phantastron* (che deriva il suo nome dalle sue prestazioni *fantastiche*) riportato in fig. 8-33. Questo circuito è simile al circuito Miller ma può essere comandato con un semplice impulso di scatto, perché genera da sè l'impulso rettangolare di pilotaggio. Le resistenze R_3, R_4 e R_5 e la tensione $-E_a$ sono scelte in modo da rendere negativa la griglia soppressore nelle condizioni di riposo e da interdire la corrente anodica. All'istante $t=0$, viene applicato al soppressore un impulso positivo di scatto; comincia allora a circolare la corrente anodica, e la tensione di placca diminuisce, mentre la tensione di schermo aumenta a causa della riduzione della corrente di schermo. Attraverso il partitore formato da R_3, R_4 e R_5 cresce anche la

tensione del soppressore che diventa positiva. La capacità C_2 serve a trasferire rapidamente l'aumento della tensione di schermo al soppressore, per cui anche un impulso di scatto molto stretto può dar luogo alla commutazione.

La rampa di tensione termina quando la tensione anodica scende al minimo, ossia quando il tubo raggiunge la saturazione. In questo istante la corrente anodica rimane costante, e poiché il potenziale dell'armatura destra di C_1 non può diminuire ulteriormente, C_1 comincia a caricarsi verso il valore E_{bb}, portando la griglia a tensione zero con conseguente aumento della

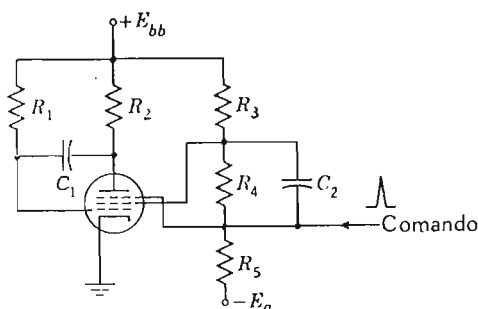



FIG. 8-33 — Fantastron comandato sulla griglia schermo.

corrente catodica. La corrente anodica a questo punto non può più aumentare, ma lo può la corrente di schermo, per cui la tensione di schermo diminuisce. Attraverso C_2, anche il soppressore è portato a tensione negativa e si ritorna alle condizioni iniziali di interdizione della corrente anodica, mentre C_1 si ricarica attraverso R_2 e la via griglia-catodo con costante di tempo R_1C_1, poichè la resistenza della via griglia-catodo è bassa.

La forma d'onda a rampa non risente delle variazioni della tensione anodica e della tensione del filamento perché il tubo funziona fondamentalmentalmente da interruttore. La tensione della rampa dipende invece dalle caratteristiche di stabilità di C_1, per cui bisogna scegliere un condensatore non variabile con la tensione. La durata della forma d'onda viene regolata variando il valore di R_1.

8-12. Circuiti di spazzolamento per tubi a raggi catodici a deflessione magnetica.

Poichè nelle bobine di deflessione avvolte in aria l'induzione B è proporzionale a *i*, nei tubi a raggi catodici a deflessione magnetica è richiesta per lo spazzolamento una corrente crescente linearmente col tempo. È

necessario quindi determinare la forma d'onda della tensione da applicare ad una bobina di deflessione che presenta una resistenza, un'induttanza e una capacità distribuita, per avere in essa una corrente variabile linearmente. Per semplicità di analisi, si trascurerà la capacità distribuita che di solito è piccola, Il circuito di fig. 8-34 impiega, come prima approssimazione al problema, una piccola parte del transitorio di corrente in un circuito RL. Il circuito è pilotato da un impulso rettangolare, che porta la griglia quasi a zero durante il tempo di spazzolamento. All'istante in cui la griglia passa dall'interdizione alla conduzione, la corrente anodica è nulla, e comincia a crescere secondo la legge:

$$i = \frac{E_{bb}}{R + r_b} (1 - \epsilon^{-(R+r_b)t/L}) \tag{8-47}$$

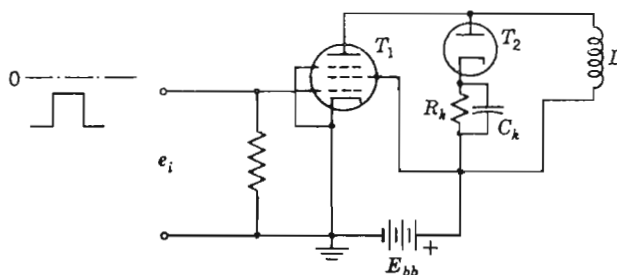



FIG. 8-34 — Generatore per la deflessione magnetica.

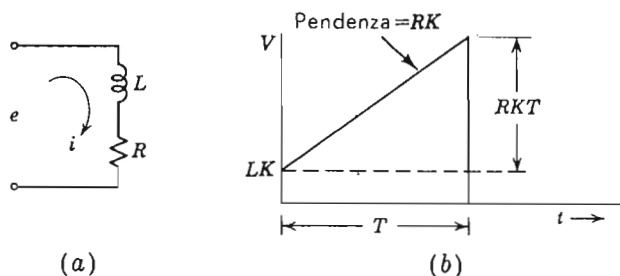



FIG. 8-35 — *a*) Circuito della bobina di deflessione. *b*) Forma d'onda richiesta per ottenere un dente di sega di corrente in un circuito RL.

dove R e L sono la resistenza e l'induttanza della bobina di deflessione. Se la costante di tempo $L/(R+r_b)$ è grande rispetto alla durata dell'impulso rettangolare, l'andamento della corrente di spazzolamento si avvicina alla linearità, e si potranno applicare le considerazioni sull'errore di linearità già svolte per il circuito RC, misurando il tempo di spazzolamento in frazioni della costante di tempo.

Durante il periodo di conduzione, la polarità della tensione L *di*/*dt* ai capi della bobina di deflessione è di segno tale che il diodo T_2 è interdetto.

Quando T_1 ritorna alla condizione di interdizione, la tensione L *di*/*dt* cambia segno e T_2 conduce, permettendo all'energia incamerata in L di dissiparsi nel diodo e in R_K. Per la presenza della capacità distribuita della bobina di deflessione il circuito può dar luogo ad oscillazioni, per cui R_K viene di solito scelta abbastanza piccola da smorzare rapidamente il transitorio di scarica.

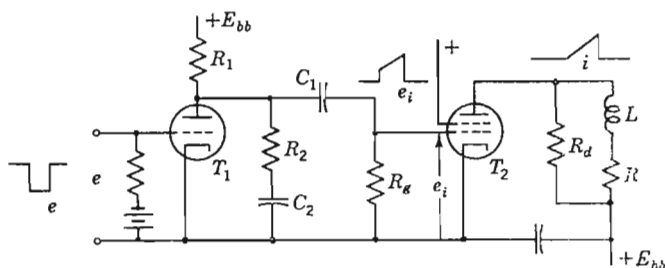



FIG. 8-36 — Generatore di un dente di sega lineare di corrente.

È possibile determinare la forma d'onda della tensione che, applicata ad un carico induttivo, faccia circolare in esso una corrente lineare col tempo. Per una corrente lineare che ha l'espressione $i = Kt$, la bobina di deflessione, di induttanza L e resistenza R, dovrà avere una tensione ai suoi capi data da:

$$\begin{aligned} e &= L \frac{di}{dt} + Ri \\ &= LK + RKt \end{aligned} \tag{8-48}$$

e questa tensione avrà l'andamento riportato in fig. 8-35*b*.

Il circuito di fig. 8-36 può generare un'onda di questa forma per mezzo dell'azione di R_2 e C_2 sull'impulso rettangolare positivo applicato a T_1, la cui uscita viene applicata all'ingresso dell'amplificatore T_2 in classe A. La tensione e_i deve essere in grado di dar luogo alla tensione data dall'eq. (8-48), quindi:

$$AE_{bb} \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \epsilon^{-t/(R_1+R_2)C_2}\right) = LK + RKt \tag{8-49}$$

dove A è il guadagno di T_2. Perciò il gradino iniziale dell'onda di fig. 8-35*b* deve essere:

$$AE_{bb} \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = LK \tag{8-50}$$

e la pendenza del tratto iniziale:

$$\frac{AE_{bb}R_1}{(R_1 + R_2)^2C_2} = RK \tag{8-51}$$

In fig. 8-37 è riportata la forma d'onda prodotta da questo circuito. Se la capacità distribuita della bobina di deflessione non è trascurabile, bisogna sovrapporre un breve guizzo di tensione alla parte iniziale della forma d'onda e_i per accelerare la carica iniziale della capacità distribuita.

Oltre questo esistono anche altri circuiti per la deflessione magnetica.

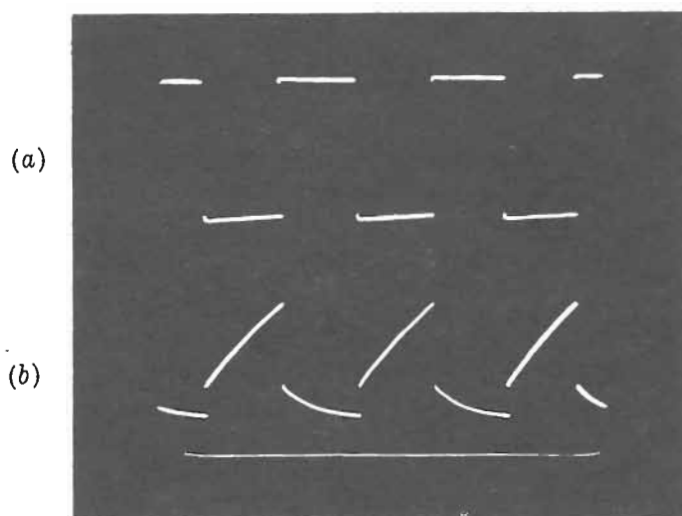



FIG. 8-37 — *a*) Onda quadra in ingresso. *b*) Tensione trapezoidale e_i di fig. 8-36.

8-13. Altri tipi di base dei tempi.

Sebbene la base dei tempi lineare dia luogo alla più comune forma di presentazione delle informazioni su uno schermo a raggi catodici, qualche volta vengono impiegate anche altre forme di base dei tempi. Una di queste è la deflessione circolare di fig. 8-38*a*, in cui i segnali appaiono come « guizzi » radiali o variazioni del raggio del cerchio. Come forme d'onda di deflessione vengono impiegate due tensioni sinusoidali:

$$E_v = A \text{ sen } \omega t$$

$$E_h = A \text{ sen } \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

ottenute con un appropriato sfasatore e due circuiti amplificatori.

I segnali possono essere applicati alla griglia schermo dei pentodi degli amplificatori in modo da aumentare istantaneamente il guadagno e quindi il raggio, dando luogo così ad un guizzo sullo schermo.

Si può ottenere così un asse di deflessione tre volte più lungo di quello con base dei tempi lineare.

In fig. 8-38*d* è riportato un semplice circuito atto a fornire le tensioni necessarie per la deflessione circolare.

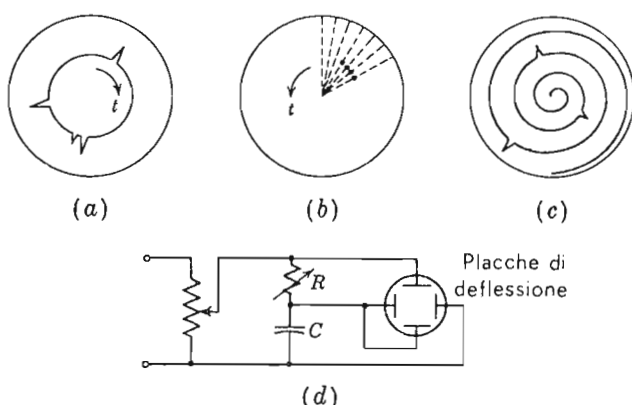



FIG. 8-38 — *a*) Deflessione circolare. *b*) Indicazione PPI. *c*) Deflessione a spirale. *d*) Circuito per la deflessione circolare.

Il potenziometro controlla le dimensioni dei cerchio, e il resistore variabile R controlla il grado di ellitticità. Per ottenere un buon cerchio è necessario disporre di una forma d'onda priva di armoniche, poichè la relazione $R = 1/\omega C$ può essere verificata per una sola frequenza.

In un altro tipo di deflessione impiegata nei radar, il fascetto elettronico si muove radialmente dal centro dello schermo verso l'esterno, e questa deflessione radiale ruota intorno al centro dello schermo in sincronismo con la rotazione dell'antenna del radar. I circuiti che generano i segnali fanno partire la deflessione radiale, e la distanza di un oggetto che dà luogo ad una eco è proporzionale alla distanza radiale dal centro dello schermo. Ogni eco prodotta da un bersaglio è ricevuta e viene indicata sullo schermo mediante un aumento della tensione di griglia del tubo a raggi catodici, che intensificando il fascetto provoca la comparsa sullo schermo di un punto luminoso.

Un radar posto su una nave vicina ad una costa presenterà sullo schermo una linea di punti luminosi corrispondenti alle riflessioni dei segnali dovute alla costa, e quindi si otterrà una mappa sullo schermo; da questo il nome di *indicatore della posizione nel piano* (PPI). La tensione di deflessione per

questo sistema è di solito ottenuta da un potenziometro rotante a filo non-lineare con la legge desiderata.

La deflessione a spirale è una forma modificata della deflessione circolare in cui la traccia è allungata per ottenere una maggiore precisione. La tensione di deflessione viene ottenuta come nel caso della indicazione PPI, ma in questo caso la velocità di rotazione è molto più grande di quella radiale di scansione, cosicché il moto radiale diventa un moto a spirale.

8-14. Generatori di gradinata.

Per convertire un segnale analogico in uno digitale è necessario quantizzarlo, e questo viene effettuato di solito campionando il segnale analogico e comparando l'ampiezza di ogni campione con una *forma d'onda a gradinata*, come quella di fig. 8-39. All'istante in cui la tensione della gradinata eguaglia quella del campione un *comparatore* fornisce un impulso che comanda il conteggio del numero di gradini. I circuiti che forniscono la gradinata, hanno delle analogie con i generatori di rampa esaminati precedentemente; in figura 8-40 è riportato come primo esempio un circuito a due diodi.

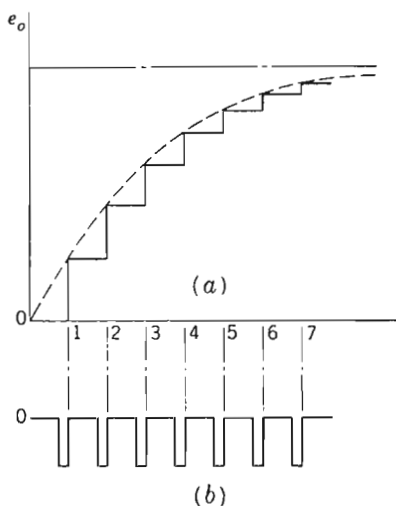



FIG. 8-39 — Tensione in uscita dal generatore di gradinata.

Entrambi i condensatori sono inizialmente scarichi. Quando viene applicato all'ingresso un impulso negativo di ampiezza E, il condensatore C_1 si carica attraverso il diodo D_1. La costante di tempo data dal prodotto della serie delle resistenze del generatore e del diodo per la capacità C_1, deve es-

sere piccola rispetto alla durata dell'impulso, per cui C_1 si carica completamente al valore di tensione E. Il diodo D_2 non conduce perché l'impulso ha polarità negativa.

Quando l'impulso d'ingresso termina, il punto 1 rimane negativo e il punto 2 diventa positivo. Questo provoca la conduzione del diodo D_2, mentre D_1 è interdetto, e la capacità C_2 si carica. Il valore di C_2 è di norma molto maggiore di quello di C_1, per cui l'incremento di tensione su C_2 è molto più piccolo di E. Se si ha un rapporto $C_2/C_1=a$, ne segue che $E_2=$ $=E/(1+a)$, considerando il condensatore C_2 inizialmente scarico. L'uscita e_o è quindi il primo gradino della gradinata.

Il secondo impulso d'ingresso ricarica C_1 al valore E, dopo di che C_1 si scarica nuovamente in C_2 attraverso D_2. Poichè C_2 ha ora una carica iniziale, il secondo incremento di tensione su C_2 è più piccolo del primo. Il processo così si ripete, dando luogo ogni volta a un gradino della tensione di uscita più piccolo del precedente, mentre l'inviluppo della gradinata si avvicina asintoticamente ad E. Gli impulsi di ingresso debbono ripetersi con una certa frequenza e usualmente ad uguali intervalli di tempo affinchè C_2 possa mantenere costante la sua carica tra gli intervalli e quindi la tensione ai suoi capi.

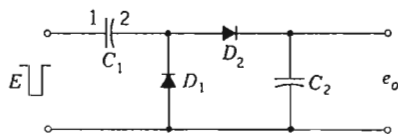



FIG. 8-40 — Generatore di gradinata

Riferendosi al circuito elementare con un condensatore che si scarica sull'altro, è possibile ottenere un'espressione per la tensione dell'ennesimo gradino e_n, data da:

$$e_n = E - (E - E_0)x^n \tag{8-52}$$

dove

$$x = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{8-53}$$

ed E_o è la tensione iniziale ai capi di C_2 per $n=0$; di solito si ha $E_o=0$. La differenza tra due gradini, $n+1$ ed n è:

$$e_{n+1} - e_n = (E - E_0)\,(1 - x)x^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8-54}$$

se $E=100$ volt, $E_0=0$ volt e $C_2=10\ C_1$, allora $x=10/11$. Il primo gradino ($n=0$) avrà un'ampiezza di 9,1 volt; il decimo gradino ($n=9$) sarà di:

$$100(1 - 10/11)(10/11)^9 = 3{,}8 \text{ volt}$$

I gradini possono essere resi quasi uguali in ampiezza per mezzo delle tecniche *bootstrap* o *Miller*. Un circuito di questo tipo è riportato in fig. 8-41;

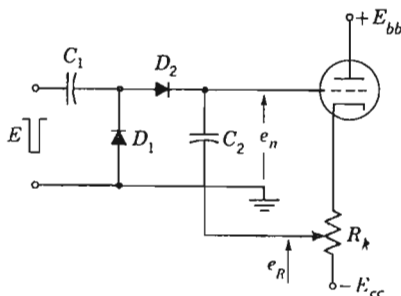



FIG. 8-41 — Modificazione del circuito precedente per ottenere le altezze dei vari gradini eguali

in esso se $e_R=e_n$, l'ampiezza del gradino diventa indipendente da n, e si ha:

$$e_{n+1} - e_n = E \frac{C_1}{C_1 + C_2} \tag{8-55}$$

8-15. Generatori di impulsi con circuiti a rilassamento.

Nei circuiti precedentemente trattati gli impulsi e le altre forme d'onda erano ottenute mediante deformazione di onde sinusoidali o per mezzo di circuiti RC. Vi è però una ampia classe di circuiti che generano direttamente le forme d'onda ad impulso. Questi circuiti sono usualmente classificati come *circuiti a rilassamento*; in essi l'energia viene accumulata lentamente in un condensatore e poi restituita rapidamente in un impulso quando si raggiunge un certo livello di tensione.

Nei *circuiti risonanti* durante la metà positiva di un'onda rettangolare di ingresso viene fornita energia ad un circuito parallelo RLC fortemente smorzato. Nella metà negativa dell'onda d'ingresso viene ridotto lo smorzamento del circuito che entra in oscillazione, ossia risuona. Il picco della prima oscillazione fornisce quindi un impulso stretto e ben definito in durata.

In fig. 8-42 è riportato il circuito formato da un triodo con un carico

anodico formato dal circuito parallelo RLC. Il circuito è pilotato da un'onda rettangolare i cui picchi positivi sono livellati a zero mentre i picchi negativi portano il tubo oltre l'interdizione. Durante la metà positiva del ciclo la griglia si trova al potenziale del catodo e il circuito anodico è fortemente smorzato dal valore relativamente basso della resistenza r_b del triodo corrispondente ad una tensione di griglia zero.

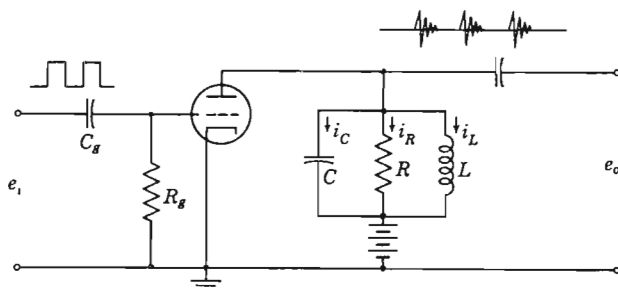



FIG. 8-42 — L'oscillatore a risonanza.

Quando la tensione di griglia è portata rapidamente a valori negativi e oltre l'interdizione, il valore di r_b diventa infinito, lo smorzamento del circuito è basso e il circuito RLC oscilla, restituendo l'energia immagazzinata in L e C.

Applicando il I principio di Kirchoff al circuito di carico per $t=0$, quando la griglia diventa negativa, si ha:

$$i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t e\,dt + C\frac{de}{dt} + \frac{e}{R} = 0 \qquad (8\text{-}56)$$

in cui i_0 è la corrente a regime attraverso L al tempo $t=0$. Differenziando l'espressione e introducendo l'operatore s, si ha:

$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) e = 0 \qquad (8\text{-}57)$$

Le radici sono date da:

$$s_1,\ s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}} \qquad (8\text{-}58)$$

Si hanno tre casi, potendo essere $1/4R^2C^2$ maggiore, minore o uguale a $1/LC$. Il circuito è usualmente progettato in modo da essere ipercritico, ossia $1/4R^2C^2 < 1/LC$, per cui il circuito entra in oscillazione quando si elimina il forte carico costituito dal triodo in saturazione. La radice dell'eq. (8-58)

diventa allora:

$$\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} = j\omega$$

L'equazione differenziale ha per soluzione:

$$e = (A_1 \cos \omega t + A_2 \operatorname{sen} \omega t)\epsilon^{-t/2RC} \tag{8-59}$$

L'induttanza può essere considerata priva di resistenza, conglobando in R la sua resistenza effettiva; poiché per $t=0$, $i_L=i_0$ ne segue che per $t=0$ $e=L di/dt=0$. Tenendo conto di questa condizione, si ha $A_1 = 0$, per cui:

$$e = (A_2 \operatorname{sen} \omega t)\epsilon^{-t/2RC} \tag{8-60}$$

Applicando i metodi normali si trova che:

$$A_2 = -\frac{i_0}{\omega C}$$

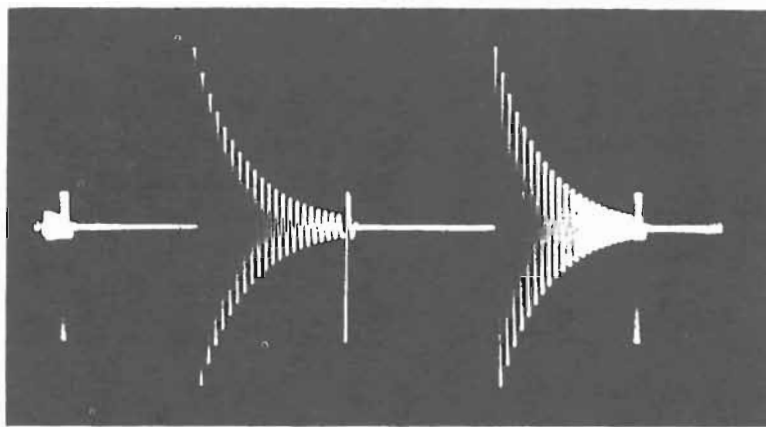



FIG. 8-43 — Uscita del circuito risonante.

La soluzione completa è data quindi da:

$$e = \left(-\frac{i_0}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t\right) \epsilon^{-t/2RC} \tag{8-61}$$

Il risultato è una tensione oscillante, variabile in ampiezza secondo i termine esponenziale. La frequenza dell'oscillazione si ricava da ω:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \tag{8-62}$$

Questa frequenza è indipendente dalla tensione di alimentazione e dalle caratteristiche del tubo, tranne che dalla capacità di uscita del tubo, che è compresa in C.

Si può impiegare un forte carico, per cui l'oscillazione riportata in fig. 8-43 decresce rapidamente e la forma d'onda d'uscita può essere limitata ad un solo impulso dato dal picco della prima oscillazione. Questa può poi essere defferenziata per ottenere un impulso molto stretto, che è sempre ritardato rispetto al fronte negativo dell'onda rettangolare d'ingresso di un tempo fisso.

La corrente i_0 che circola inizialmente nell'induttanza può essere ricavata dalle caratteristiche del tubo per una tensione di griglia nulla. La tensione di picco di uscita, che si raggiunge durante la prima oscillazione, può essere calcolata ricordando che se le perdite sono piccole l'energia induttiva incamerata viene praticamente trasferita integralmente alla capacità, ossia:

$$\frac{Li_0^2}{2} = \frac{Ce^2_{max}}{2}$$

da cui

$$e_{max} = - i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (8\text{-}63)$$

Trattando precedentemente della risposta di un circuito ad un'onda quadra si è accennato che queste onde possono dar luogo a delle oscillazioni transitorie. In questo paragrafo si descrive il meccanismo con cui vengono generate queste oscillazioni spurie.

Un altro circuito a rilassamento che fornisce impulsi stretti di durata definita è *l'oscillatore bloccato*. Il circuito fondamentale di fig. 8-44 impiega una reazione mediante trasformatore dal circuito anodico a quello di griglia, con un circuito accordato a basso Q, per cui vengono create delle oscillazioni fortemente smorzate. La capacità distribuita C della bobina dà luogo ad un circuito risonante con il secondario del trasformatore.

La costante di tempo RgCg deve essere grande rispetto al periodo della frequenza di risonanza del circuito di griglia.

L'accoppiamento mutuo tra L_1 e L_2 deve essere molto stretto e realizzato in modo da dar luogo ad una reazione positiva. In questo modo ogni variazione della corrente anodica indurrà una tensione di griglia tale da aumentare la variazione precedente della corrente anodica. Quindi un aumento della corrente anodica rende la griglia più positiva, e ciò provoca un ulteriore aumento della corrente anodica mentre nello stesso tempo il condensatore Cg si carica con la corrente che circola nella griglia positiva. Quando la corrente anodica diventa costante per la saturazione, la tensione $L\,di/dt$ ai capi di L_1 diminuisce, la griglia diventa meno positiva, e la corrente anodica si

riduce. Questa diminuzione della corrente induce una tensione negativa su L_1, portando così la griglia oltre l'interdizione. Nell'avvolgimento di griglia, come in un circuito oscillante si creano delle oscillazioni che vengono però subito smorzate a causa del basso Q del circuito. Tutto quanto si è detto è riportato graficamente nella parte della curva compresa tra i punti 1 e 2 della fig. 8-44*b*.

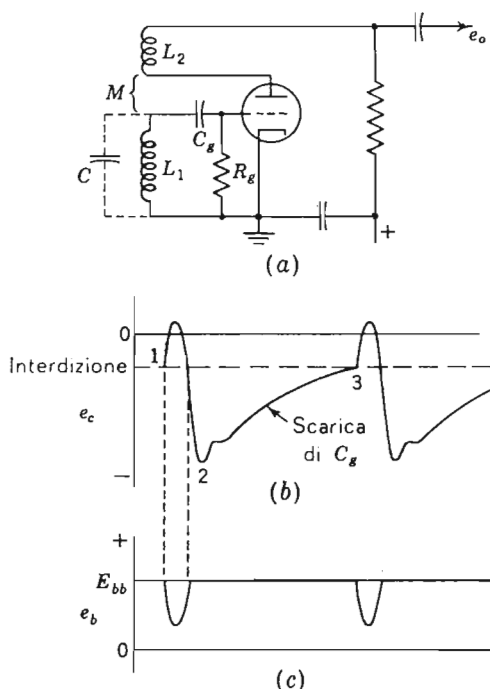



FIG. 8-44 — *a*) L'oscillatore bloccato. *b*) Forma d'onda della tensione di griglia. *c*) Forma d'onda sull'anodo.

Con la griglia negativa, l'unica via di scarica per il condensatore Cg è la resistenza Rg, e poiché questa costante di tempo è grande, il tubo rimarrà all'interdizione per un tempo piuttosto lungo. Quando la scarica di Cg raggiunge il punto 3 il tubo inizia a condurre, viene di nuovo indotta una tensione positiva nel circuito di griglia, e il ciclo precedente si ripete.

L'intervallo di tempo tra due impulsi è determinato essenzialmente dalla costante di tempo RgCg ed è indipendente dal circuito risonante e dalle caratteristiche del tubo. Il rapporto di trasformazione del trasformatore è regolabile in modo da adattarlo al tipo di tubo ed alle volute variazioni di corrente e di tensione; di solito si impiegano dei rapporti di 3:1 tra placca e

griglia. Il trasformatore deve avere una piccola capacità parassita di avvolgimento, delle notevoli induttanze e una grande permeabilità del nucleo.

Gli impulsi possono essere sincronizzati con degli impulsi esterni applicati al circuito di griglia, come si può vedere nella fig. 8-45, nella quale gli impulsi dell'oscillatore sono sincronizzati, cioè comandati, da un impulso ogni due applicati in ingresso. L'intervallo di tempo è così legato strettamente alla cadenza degli impulsi di ingresso.

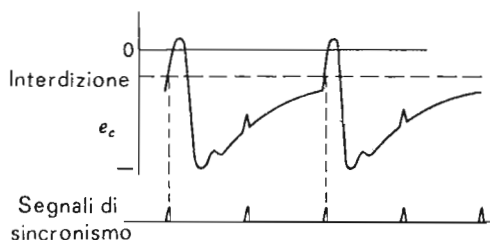



FIG. 8-45 — Sincronizzazione ad impulsi dello oscillatore bloccato.

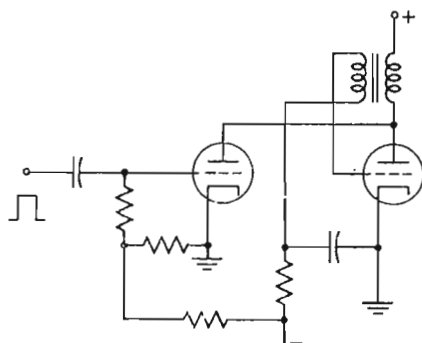



FIG. 8-46 — Comando in parallelo, o sullo anodo.

I circuiti descritti finora oscillano liberamente, ossia determinano da sè stessi la loro frequenza di funzionamento. Si può invece avere un altro tipo di oscillatore bloccato che oscilli solo quando viene applicato un impulso dall'esterno. In questo circuito viene applicata alla griglia una polarizzazione negativa tale da portare il tubo oltre l'interdizione; l'impulso di comando fa diminuire la tensione anodica e rende la griglia più positiva. In fig. 8-46 è riportato un tale circuito di comando. La forma d'onda di comando deve avere un fronte piuttosto ripido in modo da indurre una tensione di griglia sufficiente a portare la griglia fuori dall'interdizione.

La realizzazione a transistore dell'oscillatore bloccato è riportata in fig. 8-47. Il pilotaggio viene ottenuto con impulsi di comando negativi e il funzionamento è analogo a quello esaminato nel caso del triodo. Il diodo D protegge il transistore dai picchi di tensione indotti nell'avvolgimento del collettore quando il dispositivo si interdice e la corrente che circola in L_2 si annulla bruscamente.

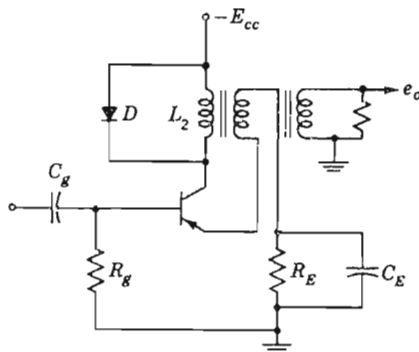



FIG. 8-47 — Oscillatore bloccato a transistori.

8-16. I multivibratori.

Il termine *multivibratore* è impiegato per la classe dei circuiti a rilassamento illustrata in fig. 8-48. Questo nome fu dato in origine da Abraham e Bloch, nel 1918, al circuito di fig. 8-48*a*. I multivibratori vengono impiegati come interruttori rapidi, oltre che come generatori di impulsi e di altre forme d'onda.

Il circuito è fondamentalmente un amplificatore a due stadi in cui l'uscita di ogni stadio è accoppiata all'ingresso dell'altro in modo da ottenere una reazione positiva. In ognuno dei circuiti di questo tipo, quando un tubo o transistore è in saturazione, l'altro è interdetto. Queste condizioni possono invertirsi in seguito ad un comando. Le varianti del circuito base, riportate in fig. 8-48, e valide sia per tubi che per transistori, danno luogo a tre circuiti fondamentali:

1) Un circuito detto *astabile*, o ad *oscillazione libera*, che non ha punti stabili di funzionamento ma che oscilla continuamente tra due stati quasi stabili.

2) Un circuito che ha uno stato stabile ed uno quasi-stabile e che può essere comandato a passare dallo stato stabile a quello quasi stabile, dal quale

esso ritorna automaticamente alla condizione stabile, conosciuto come *circuito monostabile*, o « *one-shot* » (un colpo).

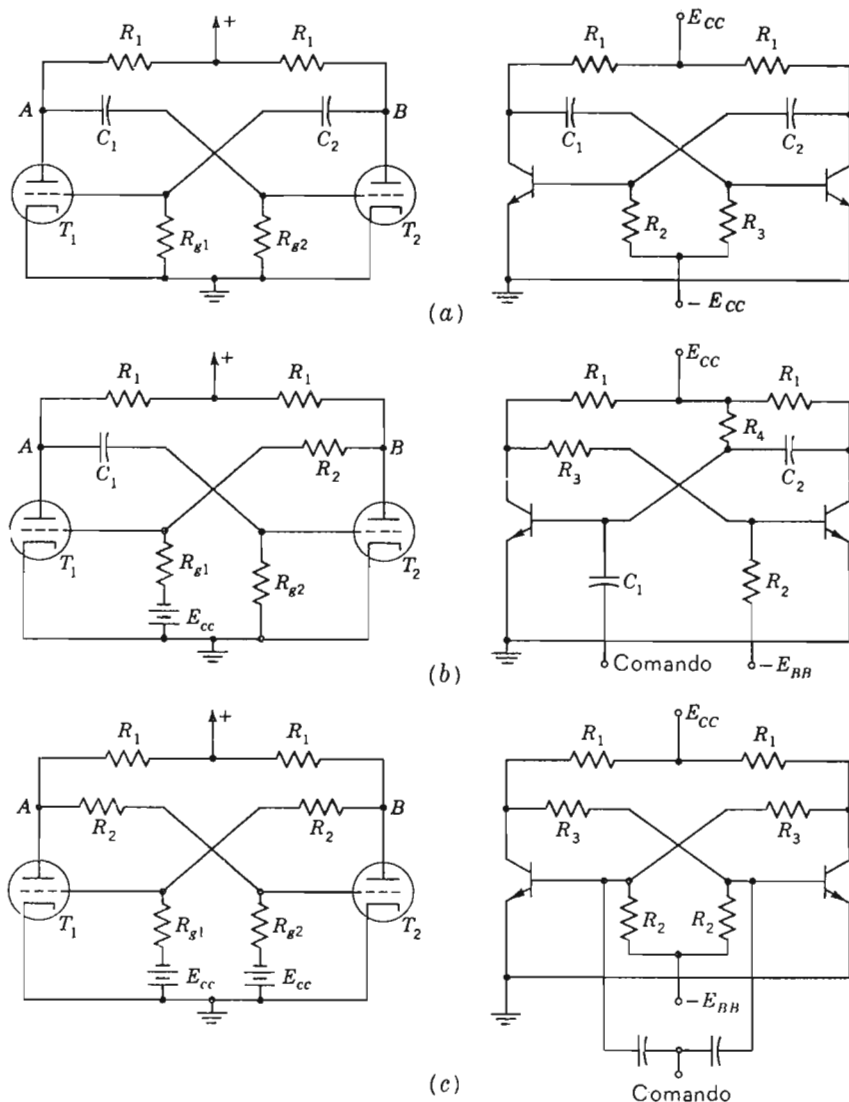



FIG. 8-48 — Circuiti multivibratori fondamentali: *a*) astabile, o ad oscillazione libera; *b*) monostabile, o ad un colpo; *c*) bistabile, o a comando.

3) Un circuito che ha due punti stabili di funzionamento separati da una regione instabile e che può essere commutato alternativamente dall'una

all'altra condizione stabile, conosciuto come *circuito bistabile*, *circuito a scatto*, o «*flip-flop*».

Come si può notare dalla fig. 8-48, la realizzazione pratica di questi circuiti a transistori è analoga a quella a tubi. Tuttavia i transistori non sempre danno luogo ad un buon funzionamento di questi circuiti se non si adottano particolari accorgimenti. La bassa resistenza d'ingresso di base, in contrasto con l'elevata resistenza di griglia dei triodi, riduce l'amplificazione dei circuiti a transistori, e quindi le auto-oscillazioni si innescano più difficilmente. Inoltre l'elevata corrente di base in saturazione che circola nello stato stabile fa sì che bisogna impiegare delle resistenze di base piccole e quindi ne conseguono degli elevati valori per i condensatori di accoppiamento. Ulteriori differenze saranno esaminate nello studio dei tre circuiti fondamentali.

Il circuito a oscillazione libera è impiegato per generare degli impulsi di sincronizzazione, ossia una cadenza regolare di impulsi, o per pilotare dei generatori di rampa; può inoltre essere sincronizzato con un altro segnale per ottenere una frequenza di funzionamento più stabile. Il circuito monostabile è spesso utilizzato per ottenere degli impulsi di durata variabile per comandare una « porta », e funziona con un segnale di comando.

Il circuito bistabile è impiegato nei circuiti di conteggio e di calcolo; in questo circuito è necessario un impulso di comando per ogni commutazione.

8-17. Il multivibratore astabile.

Il *multivibratore astabile*, o ad *oscillazione libera*, di fig. 8-49 oscilla tra due stati quasi-stabili ad una frequenza determinata dalla costante di tempo C_1R_2 o C_2R_3. In uno stato quasi-stabile T_1 conduce e T_2 è interdetto; nell'altro stato quasi-stabile, T_1 è interdetto e T_2 conduce.

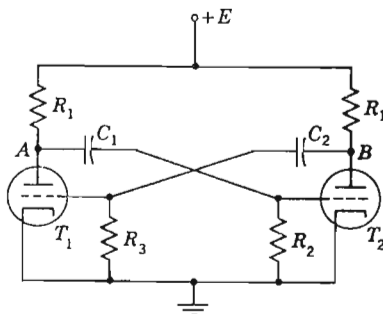



Fig. 8-49 — Multivibratore astabile a triodi.

Per comprendere il funzionamento del circuito si esamini lo schema a triodi riportato in fig. 8-49. Se la corrente di T_1 cresce, il potenziale del punto A diminuisce; la differenza di potenziale ai capi di C_1 e C_2 non può variare rapidamente, per cui la caduta di potenziale in A viene riportata attraverso C_1 alla griglia di T_2, provocando una diminuzione della corrente che circola in T_2. Questa diminuzione fa crescere il potenziale in B, e questo aumento è trasferito attraverso C_2 alla griglia di T_1, facendo aumentare ulteriormente la sua corrente. L'effetto è cumulativo e la corrente in T_1 cresce finché si raggiunge la saturazione, mentre la diminuzione di potenziale del punto A porta la griglia di T_2 a valori negativi oltre l'interdizione; tutto questo processo è praticamente istantaneo.

La capacità C_1 si scarica attraverso R_2; il potenziale della griglia di T_2 cresce e dopo un certo tempo supera il valore di interdizione, per cui T_2 conduce. Questo provoca una diminuzione della tensione della griglia di T_1 in seguito alla diminuzione del potenziale del punto B. La corrente in T_1 decresce, e il potenziale del punto A aumenta provocando un ulteriore aumento della tensione della griglia di T_2; il processo rigenerativo continua fino alla condizione in cui T_1 è interdetto e T_2 è in conduzione.

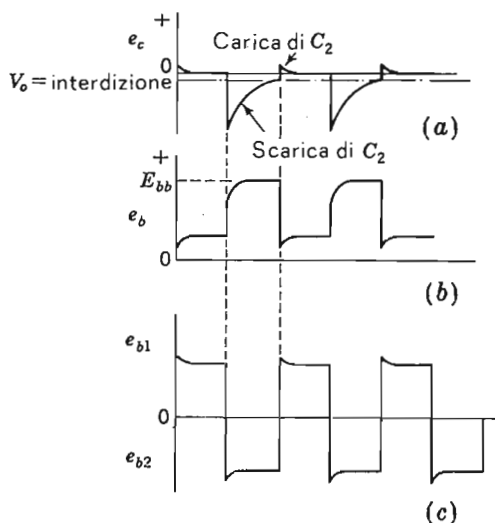



FIG. 8-50 — *a*) Forma d'onda sulla griglia di T_1, *b*) Forma d'onda sull'anodo di T_1. *c*) Tensione tra i due anodi.

Poiché quando la griglia è positiva può circolare nel tubo una corrente di griglia, le capacità ad essa associate si scaricano più rapidamente di quanto impiegano a scaricarsi col tubo a griglia negativa. Quindi è il tubo T_2 a griglia

negativa che determina l'intervallo di tempo tra le commutazioni, perché la capacità associata alla sua griglia si scarica attraverso la resistenza di griglia. La costante di tempo che determina l'intervallo di commutazione è quindi R_3C_2. Se le due metà del circuito non sono simmetriche, si avranno intervalli di commutazione ed impulsi dissimmetrici.

In fig. 8-50 e 8-51 sono riportate le forme d'onda delle tensioni di griglia e anodiche, rappresentanti rispettivamente il funzionamento teorico e quello effettivo. Si notino i piccoli guizzi positivi sulle forme d'onda della tensione di griglia, che corrispondono al tempo in cui C_1 o C_2 si caricano attraverso la via R_1, r_g. Si può osservare anche la lunga costante di tempo della scarica della capacità attraverso R_2 e l'andamento esponenziale della tensione di griglia che cresce fino a raggiungere il valore corrispondente alla tensione di interdizione del tubo.

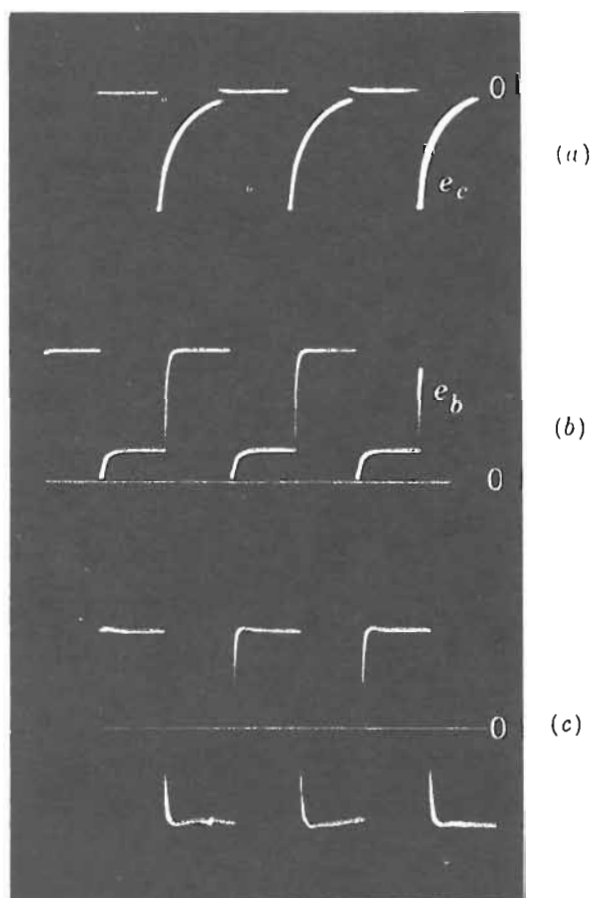



FIG. 8-51 — *a*) Tensione sulla griglia di T_1. *b*) Tensione sull'anodo di T_1. *c*) Tensione tra gli anodi.

Il potenziale di interdizione V_0, da cui inizia il rapido aumento della tensione di griglia, è dato da:

$$V_0 = (E_{bb} - e_b)\varepsilon^{t_1/C_2R_3} \tag{8-64}$$

in cui e_b è la tensione anodica del tubo in conduzione ed E_{bb} la tensione di alimentazione alla quale si era caricato C_2. Quindi $E_{bb}-e_b$ è la differenza di potenziale ai capi di C_2 all'inizio della scarica attraverso il circuito formato da R_1, C_2 e R_3, riportato in fig. 8-52.

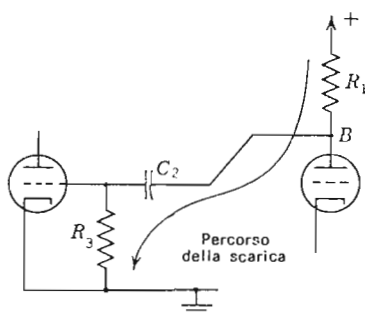



FIG. 8-52 — Percorso per la scarica di C_2.

Se $C_2R_3 = C_1R_2$, il circuito è simmetrico e il periodo di oscillazione è:

$$T = 2t_1 = 2C_2R_3 \ln \frac{E_{bb}-e_b}{V_0} \tag{8-65}$$

Questa espressione non tiene conto dell'effetto delle capacità interelettrodiche e di quelle distribuite.

Se si desidera un aumento della tensione estremamente rapido nelle forme d'onda di fig. 8-50 e 8-51, bisogna curare molto il progetto, impiegare bassi valori di resistenze anodiche, tubi con piccole capacità interelettrodiche e far uso delle tecniche impiegate per gli amplificatori a larga banda. Si possono avere in questo modo tempi di salita di frazioni di microsecondo.

Il circuito del multivibratore astabile a transistori riportato in fig. 8-53 è fondamentalmente costituito da due amplificatori a emettitore comune, con l'uscita di ognuno accoppiata ad RC all'ingresso dell'altro stadio. La reazione è rigenerativa per l'inversione del segnale operata dal circuito ad emettitore comune.

Il processo della commutazione è simile a quello del circuito astabile a triodi, e le forme d'onda sono riportate in fig. 8-54. Supponiamo che all'istante t_0 il transistore T_2 sia andato in interdizione e T_1 in saturazione. Quando T_1 va in saturazione, il potenziale del punto A varia da —10 volt a zero. Poichè la tensione ai capi di C_1 non può variare bruscamente, l'armatura destra di C_1 e la base di T_2 salgono a +10 volt, e T_2 si interdice. Il condensatore C_1 incomincia quindi a scaricarsi attraverso R_2 e la via collettore-emettitore di T_1.

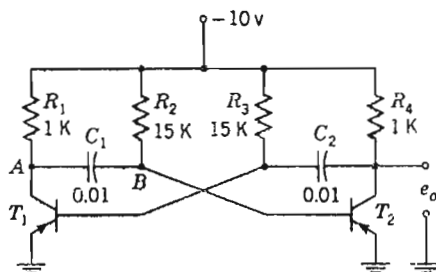



FIG. — 8-53 Multivibratore astabile a transistori.

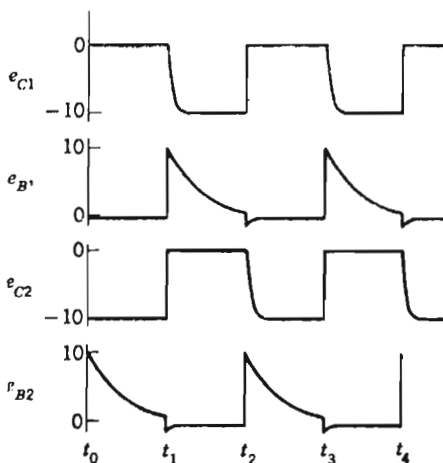



FIG. 8-54 — Forme d'onda nel circuito di fig. 8-53.

Quando la tensione del punto B, e quindi sulla base di T_2, raggiunge lo zero, il transistore T_2 comincia a condurre e la corrente di collettore, circolando in R_4, porta il potenziale del collettore di T_2 quasi a zero al tempo t_1.

Questa variazione, trasmessa a T_1, porta la sua base a tensione positiva e lo interdice; ciò fa variare il potenziale dei punti A e B, portando la base

di T_2 a valori negativi e determinando quindi la piena conduzione di T_2. Il processo di commutazione è cumulativo e rapido.

La carica e scarica di C_1 e C_2 possono essere meglio studiate con i circuiti di fig. 8-55. In fig. 8-55*a* la tensione del condensatore è portata verso lo zero a causa della scarica di C_1 attraverso R_2 e la via collettore-emettitore di T_1. Quando il potenziale di C_1 è prossimo allo zero, si ha la commutazione, T_1 va all'interdizione e C_1 trasmette la variazione negativa di tensione alla base di T_2, portando la base a valori negativi e facendo condurre T_2. La corrente di base in questo istante è notevole perché T_2 va in saturazione. La resistenza della via base-emettitore di T_2 è all'incirca 200 ohm, la resistenza del circuito all'istante della commutazione è quindi 1200 ohm, e la tensione effettiva è praticamente 10 volt, per cui la corrente di base risultante è di 8,3 mA. Nello stesso istante la corrente di collettore di T_2 che è in saturazione è data da 10/1000=10 mA, per cui va scelto un transistore di adeguate caratteristiche. Un pilotaggio ad elevata corrente di base accelera il processo di commutazione e riduce il tempo di salita dell'impulso al collettore.

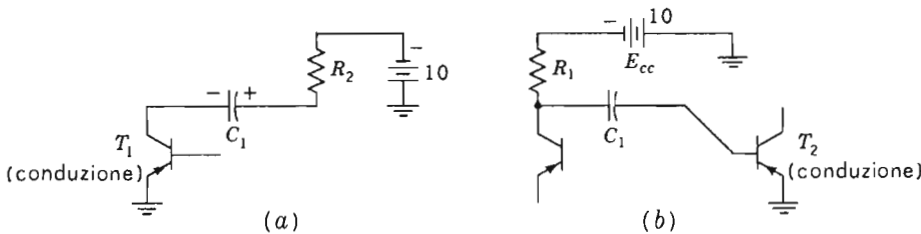



FIG. 8-55 — *a*) Circuito di scarica di C_1. *b*) Circuito di carica di C_1.

Le costanti di tempo che controllano i periodi di interdizione sono C_1R_2 e C_2R_3. In un circuito simmetrico, l'eq. (8-65) diventa:

$$T = t_2 - t_0 = 2C_1R_2 \ln {}^{20}/_{10} = 2C_1R_2 \ln 2 \qquad (8\text{-}66)$$

perché il condensatore C_1 tende a scaricarsi da —10 a +10 volt, mentre la commutazione avviene a zero volt.

Le forme d'onda quasi rettangolari della tensione di collettore possono essere limitate e in seguito amplificate in modo da ottenere delle buone onde rettangolari. La frequenza del segnale in uscita è principalmente funzione delle costanti di tempo RC, ma entrano in gioco anche le tensioni di alimentazione, le resistenze di carico, i parametri dei dispositivi e il rumore presente nel circuito, per cui la stabilità in frequenza non è molto buona.

Per un dato circuito è possibile ottenere una certa variazione della frequenza impiegando una polarizzazione variabile per le griglie o le basi. In

pratica questa regolazione varia le tensioni alle quali C_1 o C_2 si scaricano durante i periodi di interdizione; una tensione maggiore accelera la scarica, ossia fa diminuire il denominatore dell'eq. (8-65) o (8-66). In fig. 8-56 è riportato l'effetto di una polarizzazione variabile sul periodo di un circuito a triodi. Poiché la tensione esponenziale di griglia interseca la linea dell'interdizione con un angolo più grande nel caso di polarizzazione positiva, si ottiene così anche una maggiore stabilità in frequenza.

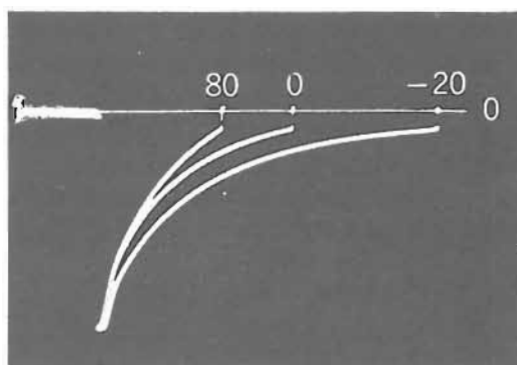



FIG. 8-56 — Forme d'onda della tensione di griglia per polarizzazioni di +80, 0, e —20 volt.

Nella commutazione dei transistori dalla saturazione all'interdizione si risente l'effetto dell'accumulo delle cariche nella regione di base, che rallenta la velocità di commutazione. Per evitare questo ritardo nella commutazione si possono impiegare dei circuiti che non vadano in saturazione; questi ultimi saranno esaminati in seguito.

8-18. Stabilizzazione della frequenza per mezzo della sincronizzazione.

La frequenza di un multivibratore astabile viene di solito stabilizzata con la sincronizzazione, ossia agganciandola alla frequenza di una serie di impulsi periodici esterni o di una tensione sinusoidale. In questo modo il periodo del multivibratore è forzato ad essere uguale o sottomultiplo di quello del segnale sincronizzante.

In fig. 8-57*a* viene mostrato un possibile modo per applicare il segnale sincronizzante; si possono impiegare anche altri metodi, quello che importa è che l'ingresso sia applicato ad entrambi i dispositivi del circuito. Nello schema a tubi, vengono impiegati impulsi positivi; questi non hanno effetto sul tubo che conduce, ma si sommano alla tensione negativa e crescente

della griglia del tubo in interdizione, dando luogo a dei guizzi come si può notare in fig. 8-57*b*. Uno di questi guizzi fa sì che la tensione di griglia superi la tensione di interdizione prima dell'istante in cui la supererebbe in assenza del segnale di sincronizzazione. Il multivibratore sarà comandato nei periodi successivi da un altro guizzo e risulterà agganciato al segnale. La frequenza del multivibratore aumenterà e se il segnale di pilotaggio varia leggermente di frequenza, il multivibratore resterà sincronizzato, variando anch'esso leggermente di frequenza.

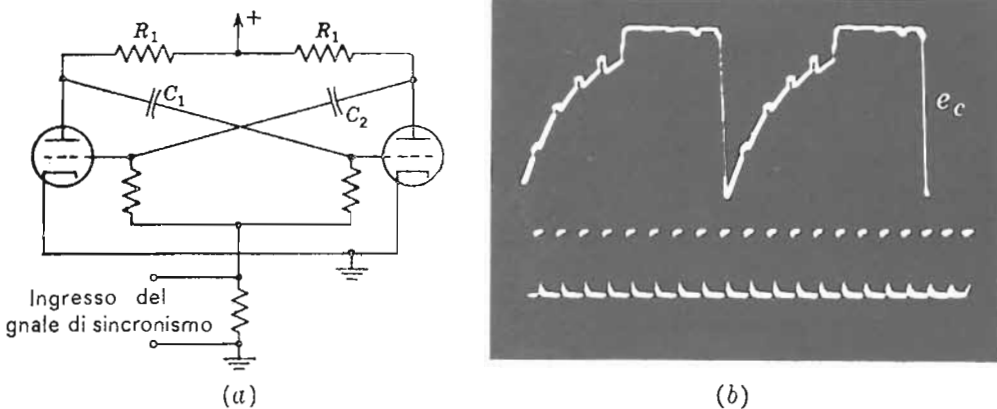



FIG. 8-57 — *a*) Circuito di ingresso per la sincronizzazione. *b*) Tensione di griglia del multivibratore sincronizzato ad impulsi.

Per i transistori, la polarità dell'impulso di sincronismo deve essere tale da portare in conduzione il transistore interdetto.

Spesso si usa la sincronizzazione per effettuare una *divisione di frequenza* del segnale; il circuito allora sarà pilotato da ogni n^{mo} impulso, dove n può raggiungere al massimo valori da 7 a 10.

8-19. Il multivibratore ad accoppiamento catodico.

Si è visto precedentemente che si può ottenere una reazione positiva collegando tra loro i catodi o gli emettitori di due stadi successivi a catodo comune o ad emettitore comune. In un tipo di multivibratore, il circuito *astabile ad accoppiamento catodico* di fig. 8-58, l'effetto rigenerativo viene appunto ottenuto in questo modo.

Questo circuito è importante sia perché si può ottenere un'onda rettangolare all'anodo di T_2, sia perché è facile ottenere una variazione della frequenza per mezzo dei numerosi elementi circuitali facilmente accessibili.

Si supponga che T_1 conduca e che T_2 sia interdetto nell'istante t_1. Il condensatore C_1 si scarica attraverso R_1, r_p del tubo T_1, e R_4, e la tensione di griglia di T_2 sale verso il valore di interdizione. All'istante t_2 la tensione di griglia raggiunge il valore di interdizione e T_2 comincia a condurre. L'aumento di tensione ai capi di R_5 è trasferito attraverso C_2 al catodo di T_1 e si somma alla tensione esistente ai capi di R_3, riducendo così la corrente in T_1. Per effetto della diminuzione di corrente in T_1, il potenziale del punto A aumenta, e questo incremento, trasferito attraverso C_1, fa aumentare il potenziale di griglia e quindi la corrente del tubo T_2. L'azione è rapida, e quindi all'istante t_2 il tubo T_2 va in saturazione mentre T_1 va in interdizione.

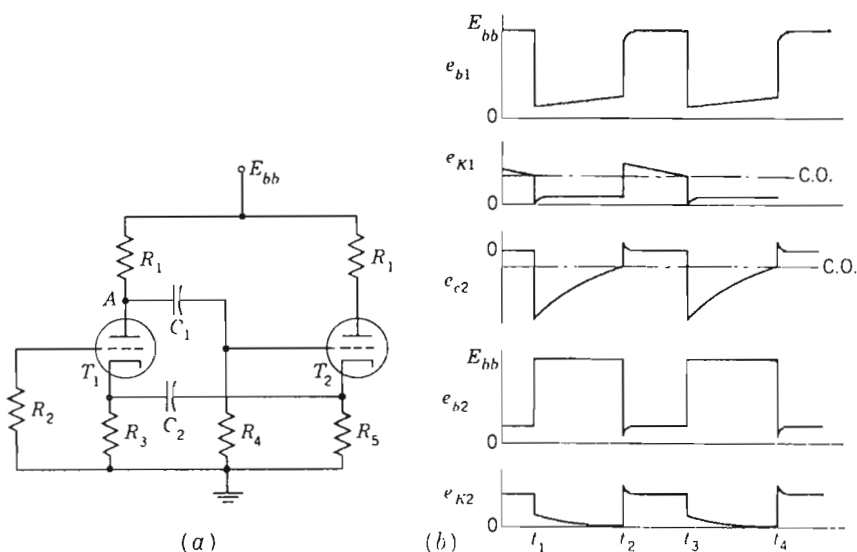



FIG. 8-58 — Multivibratore ad accoppiamento catodico.

Il condensatore C_2 si carica ora attraverso R_3, T_2 e R_1 alla tensione catodica di T_2; la sua corrente di carica dà luogo ad una caduta ai capi di R_3, ma questa caduta decresce man mano che il condensatore si carica. All'istante t_3 la tensione catodica di T_1 raggiunge il valore di conduzione, e T_1 comincia a condurre. La diminuzione di potenziale del punto A è trasmessa attraverso C_1 alla griglia di T_2, provocando una diminuzione della corrente in questo tubo. Ciò riduce la caduta in R_5, e questa variazione è riportata su R_3, riducendo ulteriormente la tensione catodica di T_1 che in tal modo conduce di più. Questa azione è molto rapida per cui T_2 va in interdizione e T_1 in conduzione. Non vi è arrotondamento del fronte

della tensione anodica di T_2 perché non vi è nessuna capacità connessa a quest'anodo, il che si traduce in un notevole vantaggio per questo tipo di circuito.

Il circuito può essere sincronizzato con impulsi positivi sull'anodo o sul catodo di T_1 o sulla griglia di T_2; gli impulsi negativi di comando debbono invece essere applicati alla griglia di T_1 o all'anodo o al catodo di T_2.

8-20. Il multivibratore monostabile.

Il *multivibratore monostabile, a un colpo*, o *multivibratore pilotato*, lavora con un tubo, o transistore, polarizzato oltre l'interdizione, per cui il circuito è stabile e inattivo finché non viene applicato un impulso di comando. L'impulso fa commutare il circuito dal suo stato stabile ad una condizione quasi-stabile, e dopo un intervallo di tempo determinato dalle costanti del circuito, questo ritorna nella sua condizione stabile, e vi rimane fino al nuovo impulso di comando.

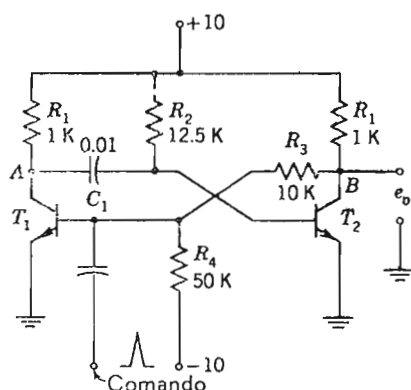



FIG. 8-59 — Multivibratore monostabile.

In figura 8-59 è riportato lo schema di un monostabile a transistori; questo circuito non è altro che una modificazione del multivibratore astabile, ottenuta con l'eliminazione di un condensatore, con l'aggiunta della resistenza R_3, e con la polarizzazione oltre l'interdizione del transistore T_1. La condizione stabile è quella con T_1 interdetto e T_2 in conduzione. Se si applica un impulso positivo alla base di T_1, di ampiezza sufficiente a portare in conduzione T_1, il potenziale del punto A si abbassa bruscamente quasi a zero. Questa variazione porta la base di T_2 da zero a quasi —10 volt; T_2 si interdice e il condensatore C_1 si carica attraverso la resistenza R_2 tendendo a +10 volt. Non appena però la base di T_2 diventa leggermente

positiva, T_2 ritorna di nuovo in conduzione, portando il potenziale del punto B quasi a zero, e la base di T_1, a cui viene trasferita questa variazione, va oltre l'interdizione, non essendo più presente l'impulso di comando. Viene quindi ripristinata la condizione stabile iniziale con T_1 in interdizione e T_2 in conduzione. Le forme d'onda ai vari elettrodi sono riportate in fig. 8-60.

La durata dell'impulso $T = t_2 - t_1$ è determinata dalla costante di tempo C_1R_2, che controlla il tempo in cui T_2 resta in interdizione:

$$T = C_1R_2 \ln 2 \tag{8-67}$$

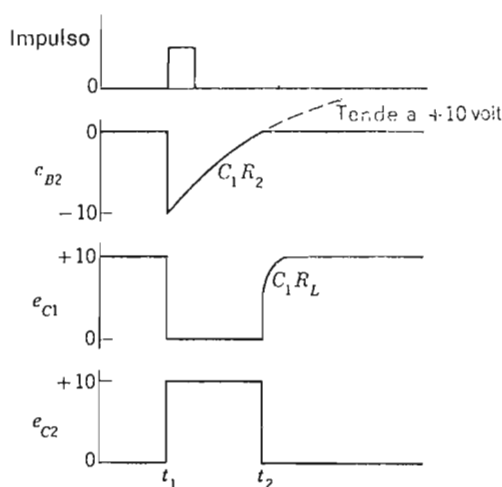



FIG. 8-60 — Forme d'onda nel multivibratore monostabile a transistori.

Il punto più importante nel progetto del circuito è la determinazione del valore di corrente di base necessario perchè T_2, al termine dell'impulso vada in conduzione. Questa corrente è di norma due a tre volte maggiore della corrente di saturazione, e questo oltre che per sicurezza anche per ottenere una rapida commutazione all'istante t_2. Con i valori dei parametri riportati sul circuito in esame e con un transistore che abbia $h_{FE} = 25$, la corrente di base dovrebbe essere:

$$I_{C,sat} = \frac{E_{CC}}{R_1} = \frac{10}{1000} = 0{,}010 \text{ A}$$

$$I_B = \frac{I_{C,sat}}{h_{FE,min}} = \frac{0{,}010}{25} = 0{,}0004 \text{ A} = 0{,}4 \text{ mA}$$

Per sicurezza, si pone I_B uguale al doppio di questo valore; ne segue che:

$$R_2 = \frac{E_{CC}}{2I_B} = \frac{10}{0{,}0008} = 12.500 \text{ ohm}$$

Viene così determinata R_2 che è il parametro più critico del circuito.
Il circuito monostabile a triodi di fig. 8-61 funziona allo stesso modo con T_1 interdetto e T_2 in conduzione.

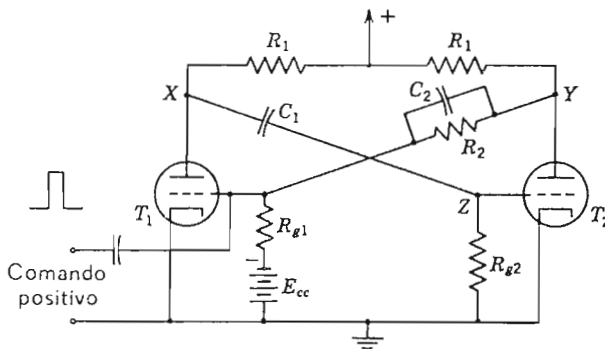



FIG. 8-61 — *a*) Multivibratore monostabile. *b*) Tensione di griglia del tubo T_1. *c*) Tensione di griglia di T_2.

Quando viene applicato un impulso positivo al tubo T_1, la variazione di potenziale del punto X viene trasmessa alla griglia di T_2, portandola oltre l'interdizione. C_1 ora si scarica attraverso R_{g2}, e il potenziale della gri-

glia di T_2 aumenta, finchè raggiunge il potenziale di interdizione; comincia allora a circolare corrente in T_2 e si abbassa il potenziale del punto Y e quello della griglia di T_1. L'azione di commutazione è molto rapida, e T_2 si porta alla piena conduzione mentre T_1 ritorna al suo stato stabile all'interdizione. La durata del periodo T è legata alla costante di tempo $R_{g2}C_1$ ed è data da:

$$T = C_1 R_{g2} \ln \frac{E_{bb} - e_b}{V_0} \tag{8-68}$$

La griglia di T_2 può essere polarizzata positivamente; si ottiene così un funzionamento più stabile, perché la curva esponenziale della tensione di griglia all'istante in cui raggiunge la tensione di interdizione ha una pendenza maggiore. Variando il livello di questa polarizzazione si può variare la durata dell'impulso, perchè il tempo T è proporzionale alla polarizzazione di griglia in un ampio campo di regolazione. In fig. 8-62 è ripor-

FIG. 8-62 — Controllo della durata dell'impulso.

tato un circuito atto ad effettuare questa regolazione. La capacità C_2 serve a ridurre il tempo della commutazione da T_2 a T_1. Riferendosi alla fig. 8-61*a*, si vede che la tensione del punto Y viene riportata alla griglia di T_1 attraverso un partitore di tensione formato da R_2 e R_{g1}; solo una frazione della tensione del punto Y appare quindi alla griglia di T_1. La capacità cortocircuita la resistenza R_2 durante la rapida variazione della tensione, e quindi all'istante della commutazione l'intera variazione di tensione del punto Y viene trasferita sulla griglia di T_1. Inoltre la capacità di ingresso del tubo T_1, che si trova in parallelo alla resistenza R_{g1}, in assenza della capacità C_2 si dovrebbe caricare attraverso R_2, mentre, se C_2 è notevolmente maggiore della capacità del tubo, quest'ultima si carica rapidamente e il potenziale della griglia di T_1 segue fedelmente quello del punto Y.

In fig. 8-63 è riportata la versione ad accoppiamento catodico del circuito monostabile. La polarizzazione negativa ai capi di R_4 è tale da portare T_1 oltre l'interdizione, mentre la polarizzazione positiva applicata alla griglia di T_2 attraverso R_2 mantiene T_2 in conduzione. Quando viene applicato un impulso positivo di commutazione all'ingresso del tubo T_1, questo va in conduzione, la tensione nel punto X diminuisce provocando, tramite l'accoppiamento attraverso C_1, una diminuzione della tensione della griglia di T_2 fin oltre l'interdizione. La caduta di tensione ai capi di R_4 diminuisce e

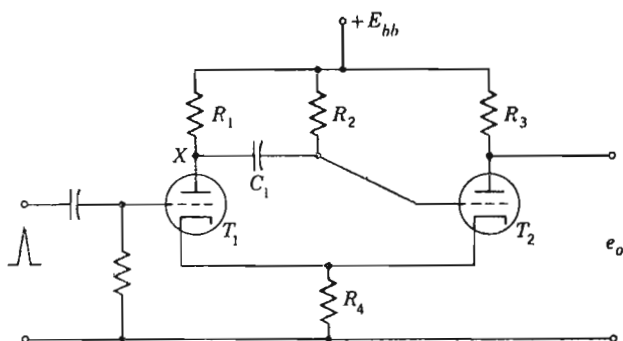



FIG. 8-63 — Circuito monostabile ad accoppiamento catodico.

quindi T_1 si porta in piena conduzione, mentre T_2 si interdice. Il circuito rimane in questo stato finché la capacità C_1 non si scarica tanto da portare la tensione della griglia di T_2 sopra l'interdizione. A questo punto il circuito commuta nel suo stato stabile iniziale.

Il circuito viene generalmente impiegato per generare impulsi a fronte ripido sull'anodo di T_2, e per ricostruire la forma di impulsi distorti che vengono prelevati rigenerati all'uscita del circuito.

8-21. Il multivibratore bistabile.

Il *multivibratore bistabile* (flip-flop) riportato in fig. 8-64, sfrutta un principio riportato da Eccles e Jordan nel 1919, ed è una modificazione dello schema base dell'oscillatore a rilassamento, in quanto presenta due condizioni di stabilità separate da una regione di instabilità. Le condizioni di stabilità corrispondono alla conduzione di T_1 e all'interdizione di T_2, o viceversa, e occorrono degli impulsi di comando per commutare il circuito da una condizione all'altra; le variazioni di potenziale nei punti A e B possono essere utilizzate per comandare altri bistabili, o per effettuare altre operazioni, principalmente nel campo dei calcolatori numerici. Questo circuito ha avuto,

a causa dell'importanza delle sue applicazioni, un grande sviluppo e quindi esistono molte varianti della configurazione base. Qui se ne considereranno solo alcune.

Il circuito è derivato da quello del multivibratore astabile sostituendo le capacità di commutazione con le resistenze R_2, R_3; le capacità C_2, C_3 sono piccole e servono solo ad accelerare il processo di commutazione come si era visto nel par. 8-20. Il transistore in conduzione è in saturazione e in questa condizione di funzionamento l'accumulo delle cariche minoritarie nella base provoca un ritardo nella commutazione del transistore dalla conduzione all'interdizione.

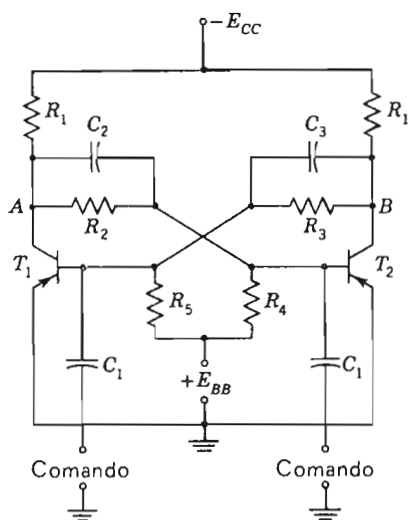



FIG. 8-64 — Multivibratore bistabile a transistori. Valori tipici dei parametri: $R_1 = 10$ kΩ; R_2, $R_3 = 100$ kΩ; R_9, $R_5 = 33$ kΩ; C_2, $C_3 = 50$ pF; $C_1 = 100$ pF.

Tuttavia anche se la corrente di saturazione è grande, la tensione di collettore è molto bassa e quindi in conduzione non viene dissipata una notevole potenza. Si può scegliere una retta di carico, come in fig. 8-65, che intersechi il luogo di massima dissipazione perché il tempo di commutazione è così breve che il transistore non viene danneggiato. In seguito si esamineranno i circuiti che evitano la saturazione, e che quindi non risentono dell'effetto dell'accumulo delle cariche.

Supponiamo che inizialmente stia conducendo T_1 e che T_2 sia mantenuto in interdizione per effetto del partitore R_2, R_4 e della polarizzazione negativa. Il transistore ha un h_{FE} minimo di 24, e le tensioni nei vari punti

del circuito possono essere ricavate come riportato in fig. 8-66. Con una corrente di collettore di 0,99 mA, la corrente di base è $0{,}00099/24 = 41 \times 10^{-6}$A, come si osserva in fig. 8-66*b*. Il transistore T_2, N-P-N, è certamente all'in-

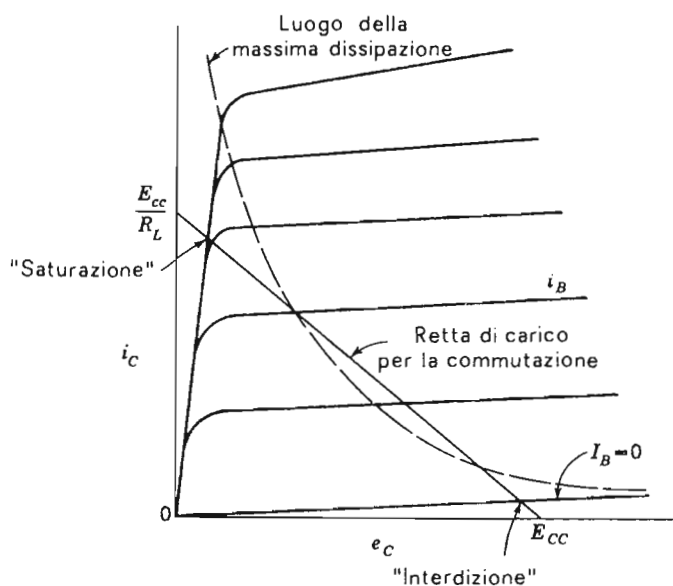



FIG. 8-65 — Retta di carico per la commutazione.

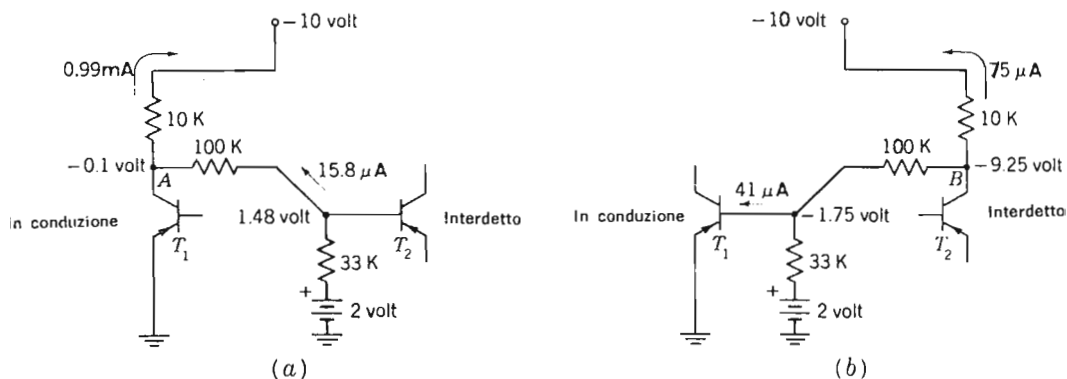



FIG. 8-66 — Distribuzione delle tensioni nel bistabile di fig. 8-64.

terdizione con una tensione $E_{BE} = +1{,}48$ volt, e T_1 è in conduzione per $E_{BE} = -1{,}75$ volt. Con la base a $-1{,}75$ volt e il collettore a $-0{,}1$ volt, il transistore T_1 è certamente in saturazione perché ha la giunzione base-collettore direttamente polarizzata.

Se viene applicato un impulso di circa —12 volt alla base di T_2, questo va in conduzione e la variazione di potenziale del punto B si trasmette alla base di T_1, portandolo all'interdizione; il circuito passa così nel suo secondo stato stabile. L'istante effettivo di commutazione è quello in cui le correnti nei due transistori sono uguali, e la sia pure minima differenza tra le correnti determina quale transistore vada in saturazione e quale in interdizione. Perciò l'impulso di comando deve essere di ampiezza tale da portare il transistore ben oltre il punto in cui le due correnti sono uguali. Poiché non vi sono transitori dovuti a gruppi RC, la velocità di commutazione è influenzata solo dal ritardo dovuto all'accumulo delle cariche nella base e alla capacità di diffusione del transistore; con particolari transistori si possono ottenere tempi di commutazione dell'ordine dei nanosecondi.

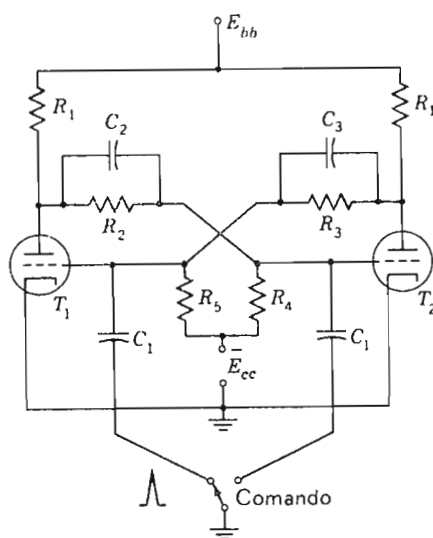



FIG. 8-67 — Multivibratore bistabile a triodi.

Il funzionamento del circuito bistabile a triodi di fig. 8-67 è molto simile a quello del circuito realizzato con transistori. A T_2 viene inviato un impulso positivo, che lo porta in conduzione e l'azione rigenerativa continua finché T_2 va in saturazione e T_1 in interdizione; il successivo impulso positivo viene inviato a T_1 e il ciclo si inverte. Si possono impiegare anche impulsi negativi, che non hanno alcun effetto sul tubo in interdizione e riducono la corrente nel tubo in conduzione dando luogo all'azione rigenerativa; inoltre gli impulsi di comando possono essere anche applicati agli anodi. In generale gli impulsi di comando positivi debbono essere più ampi di quelli

negativi perché quelli negativi debbono solo portare il tubo in saturazione sotto il punto di uguaglianza delle correnti, mentre quelli positivi debbono superare anche una polarizzazione negativa prima che cominci la conduzione.

I circuiti possono essere autopolarizzati con l'impiego di un resistore catodico o di emettitore, come in fig. 8-68. Si può porre un condensatore in parallelo per mantenere costante la polarizzazione lungo l'intero ciclo di oscillazione.

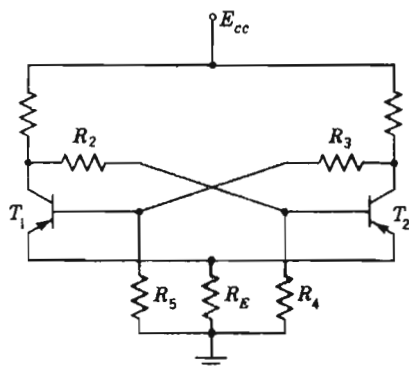



FIG. 8-68 — Polarizzazione di un circuito bistabile.

Il tempo richiesto per passare dalla conduzione di T_1 a quella di T_2, o viceversa, è detto *tempo di risoluzione*, ed è il minimo tempo che deve intercorrere tra gli impulsi perché il circuito possa funzionare correttamente. Per ridurre questo tempo bisogna rendere piccole le capacità distribuite, le resistenze di carico e di accoppiamento in modo da migliorare il tempo di salita della forma d'onda, ossia rendere migliore la risposta del circuito alle più alte frequenze presenti in una rapida commutazione.

8-22. Comando dei circuiti bistabili.

Nel caso di comando da un solo lato, di solito è preferibile portare un transistore in interdizione piuttosto che in saturazione, questo perchè nel secondo caso bisogna superare una polarizzazione inversa prima che possa iniziare la conduzione. Il ritardo che si ha nel portare all'interdizione un transistore è minore, e quando la conduzione cessa, è il circuito stesso che provvede a far condurre l'altro transistore. La costante di tempo che limita la velocità di interdizione può essere valutata come h_{FE}/ω_α, e questo rapporto può essere impiegato per scegliere transistori adatti per commutazioni veloci.

È frequente il caso in cui si debba inviare in un unico punto una suc-

cessione di impulsi che facciano commutare alternativamente i due transistori. A questo scopo si possono impiegare dei diodi per indirizzare correttamente gli impulsi, come si può vedere dalla fig. 8-69. I collettori sono comandati da impulsi negativi forniti da un generatore a bassa impedenza interna e gli impulsi sono applicati alla resistenza di carico del collettore. Supponiamo che T_1 sia in conduzione e T_2 in interdizione; l'impulso sarà inviato solo su T_2, il transistore in interdizione, perché i punti C e B si trovano allo stesso potenziale. Il diodo D_1 è invece contropolarizzato da una tensione pari a E_{cc} perché il punto A è praticamente a zero volt. L'impulso successivo sarà inviato a T_1 che si troverà interdetto.

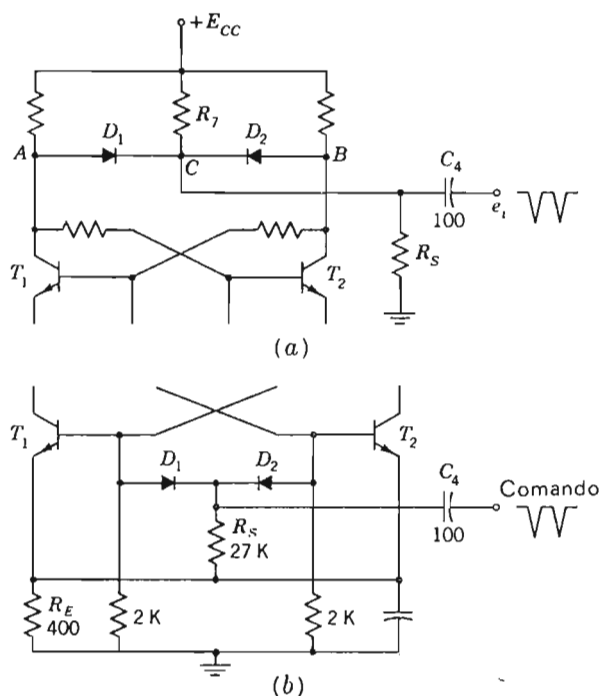



FIG. 8-69 — Diodi per il comando ad impulsi.

Il comando in base permette di impiegare impulsi più piccoli, perché si sfrutta l'amplificazione del circuito. In questo caso gli emettitori vengono polarizzati ad una tensione positiva rispetto a massa tramite la caduta di tensione su R_E, quindi il diodo D_1 è contropolarizzato e il diodo D_2 è polarizzato direttamente. Quando viene applicato un impulso negativo, questo può giungere solo sulla base di T_2 e provoca così la commutazione. La polarizzazione dei diodi, di conseguenza, si inverte perché variano i potenziali

delle due basi e l'impulso successivo viene inviato su T_1 attraverso il diodo D_1, e il circuito commuta nella sua condizione iniziale. La figura 8-69 conferma questo ragionamento.

Il comando sul collettore, sebbene richieda impulsi di maggiore ampiezza, aumenta la velocità di commutazione perché l'impulso di comando si somma all'azione del circuito nel portare in interdizione il transistore che sta conducendo; inoltre per questo tipo di comando l'ampiezza degli impulsi è meno critica.

L'intervallo di tempo tra due impulsi deve essere sufficiente a far ricaricare il condensatore C_4 di accoppiamento, perciò la costante di tempo C_4R_4 non deve essere più grande delle costanti di tempo C_2R_2 e C_3R_3 di fig. 8-64.

8-23. Verifica del progetto di un circuito bistabile saturato.

Le resistenze di collettore ed emettitore possono essere scelte in prima approssimazione in base alla corrente e tensione che si desiderano in uscita. Consideriamo come esempio il circuito di fig. 8-70, che fa uso di transistori P-N-P 2N525 con una dissipazione massima di 225 mW alla temperatura ambiente di 25°C e con un h_{FE} minimo di 30. Come è stato sottolineato pre-

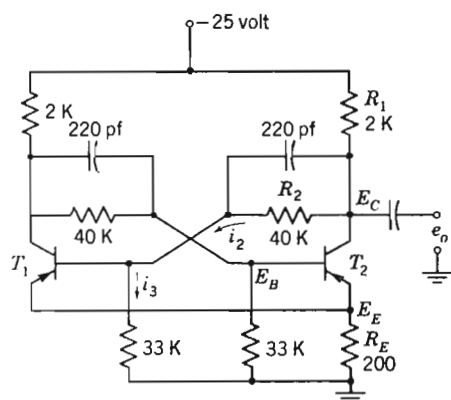



FIG. 8-70 — Elementi di progetto per un circuito bistabile.

cedentemente, un dato critico è la corrente di base necessaria per portare il transistore in piena conduzione, ossia per saturarlo. Si può impiegare una rete di accoppiamento come quella riportata nella figura, e studiarne il funzionamento. Quando il transistore è in conduzione, possiamo porre E_{BE}=

— 0,3 volt e E_{CE} = —0,2 volt; la giunzione collettore-base risulta allora direttamente polarizzata e il transistore in saturazione. Supponiamo anche che debba essere $E_{BE} = 0,2$ volt per l'interdizione. Il circuito debba inoltre funzionare fino alla temperatura ambiente di 50°C.

Con T_1 in conduzione e T_2 in interdizione, si può calcolare la corrente di base del transistore in conduzione:

$$E_E = E_{CC} \frac{R_E}{R_1 + R_E} = -25 \frac{200}{2000 + 200} = -2,3 \text{ volt}$$

$$E_{C,on} = E_E + E_{CE} = -2,3 - 0,2 = -2,5 \text{ volt}$$

Quindi il potenziale del transistore T_1 in conduzione è:

$$E_{B,on} = E_E + E_{BE,on} = -2,3 - 0,3 = -2,6 \text{ volt}$$

La corrente I_3 che circola nella resistenza di base è:

$$I_3 = \frac{E_{B,on}}{R_E} = \frac{2,6}{33.000} = 0,000079 \text{ A} = 79 \ \mu\text{A}$$

La corrente I_2, che circola attraverso la resistenza di carico R_1 del transistore in interdizione e R_2, è:

$$I_2 = \frac{E_{CC} - E_{B,on}}{R_1 + R_2} = \frac{-25 + 2,6}{42.000} = 0,00053 \text{ A} = 530 \ \mu\text{A}$$

La corrente di base di T_1 è quindi data da:

$$I_B = I_2 - I_3 = 530 - 79 = 451 \ \mu\text{A}$$

La corrente di collettore di T_1 è:

$$I_C = \frac{E_{CC} - E_{C,on}}{R_1} = \frac{-25 + 2,5}{2000} = 0,00113 \text{ A} = 11,3 \text{ mA}$$

La minima corrente di base richiesta per la saturazione del transistore è:

$$I_{B,min} = \frac{I_C}{h_{FE}} = \frac{11,3}{30} = 0,380 \text{ mA} = 380 \ \mu\text{A}$$

mentre il circuito fornisce 451 μA. Il transistore sarà quindi in saturazione anche se h_{FE} cade al di sotto del minimo valore dichiarato di 30; alle basse temperature h_{FE} potrà ancora scendere al valore

$$h_{FE,min} = \frac{I_C}{I_B} = \frac{11,3}{0,45} = 25$$

e il circuito continuerà a funzionare.

Si può concludere quindi che i valori delle resistenze della rete di accoppiamento sono stati ben scelti.

Bisogna anche verificare la dissipazione di potenza nel transistore. Per T_1 in conduzione, si ha:

$$P_d = E_{BE,on}I_B + E_{CE,on}I_C$$
$$= 0,3 \times 430 \times 10^{-6} + 0,2 \times 11,3 \times 10^{-3} = 2,39 \text{ mW}$$

Per T_2, che è in interdizione, la dissipazione è dovuta a I_{co}, e il valore di I_{co} a 25°C è di 10 μA. Per un transistore al germanio, questa corrente può aumentare fino a 54 μA a 50°C. Perciò:

$$P_d = E_{CB,off}I_{CO} = 25 \times 54 \times 10^{-6} = 1,35 \text{ mW}$$

Quindi la dissipazione non aumenta apprezzabilmente la temperatura della giunzione.

8-24. Tecniche di progetto di multivibratori bistabili non saturati.

Il funzionamento di un transistore nella zona di saturazione, nei normali circuiti bistabili, fornisce una tensione di collettore stabile e molto piccola, con l'impiego di un basso numero di componenti circuitali. Tuttavia il funzionamento nella zona di saturazione provoca un accumulo di portatori minoritari nella regione di base, e l'eliminazione di queste cariche nell'istante della commutazione verso l'interdizione crea un ritardo, che limita la risposta in frequenza del circuito. Inoltre l'eliminazione di queste cariche accumulate richiede una maggiore potenza per l'impulso di comando.

Vi sono delle tecniche per evitare il funzionamento in saturazione dei circuiti bistabili, ma in questi circuiti non saturati l'aumento delle velocità di commutazione viene ottenuto a scapito di una limitazione di altre grandezze caratteristiche. Per esempio, per una data dissipazione un bistabile saturato può commutare una corrente più grande di quella che puo essere commutata con un transistore non saturato. In saturazione, la dissipazione è bassa a causa della bassa tensione di collettore; in un circuito non saturato, il transistore in conduzione è mantenuto ad una tensione di collettore più alta e deve quindi dissipare una potenza maggiore a parità di corrente. Quindi per ottenere una maggiore velocità di commutazione col circuito non saturato, bisogna sacrificare, a parità di transistori, parte della potenza in uscita.

Per mantenere la tensione di collettore al di sopra del livello di saturazione si possono impiegare dei diodi livellatori, come in fig. 8-71. I diodi D_1 e D_3 sono al silicio e quindi hanno una caduta di tensione in diretta di

circa 0,7 volt per un grande campo di valori della corrente; i diodi D_2 e D_4 sono al germanio. Quando T_1 va in conduzione, la tensione del punto A diventa minore di quella del punto B e il diodo D_2 conduce, cortocircuitando l'eccesso della corrente di base attraverso il collettore. Viene così limitata la

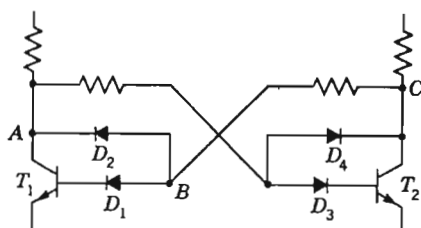



FIG. 8-71 — Diodi di limitazione della tensione di collettore per evitare la saturazione

corrente di base e inoltre, poiché D_1 mantiene una caduta di tensione costante di 0,7 volt ed A e B sono connessi da D_2, il collettore viene mantenuto a circa 0,7 volt rispetto alla base. Questo evita che la giunzione collettore-base sia direttamente polarizzata e impedisce al transistore di andare in saturazione.

8-25. Il trigger di Schmitt.

Il *trigger di Schmitt*, dal nome del suo inventore, è un circuito bistabile ad accoppiamento catodico comandato dalla tensione di ingresso. È impiegato per ottenere commutazioni ad un determinato livello di tensione o come squadratore di segnali sinusoidali e non-rettangolari. Il circuito fornisce in uscita un'onda quadra la cui durata è uguale all'intervallo di tempo durante il quale la tensione di ingresso supera un determinato valore. Il circuito non è un vero bistabile, perchè si trova nel secondo stato solo quando la tensione di ingresso supera il livello critico. La versione a transistori è riportata in fig. 8-72.

Supponendo che T_1 sia interdetto, il partitore di tensione formato da R_1, R_2, R_3 fornisce 7 volt alla base di T_2.

Poichè E_{BE} di T_2 sarà di circa 0,2 volt, il transistore condurrà una corrente tale da creare una caduta di 6,8 volt ai capi del resistore di emettitore R_E. Questa tensione è sufficiente a interdire T_1, e questo è lo stato normale, o a basso livello, del circuito. Quando la tensione di ingresso si avvicina al valore di 6,8 volt, T_1 conduce e, tramite la reazione rigenerativa, interdice T_2. Il circuito rimarrà in questa condizione finché l'ingresso non scende a valori più

bassi del livello critico di 6,8 volt; in questo caso la corrente di ingresso non è più sufficiente a mantenere T_1 in saturazione e il circuito ritorna nel suo stato iniziale.

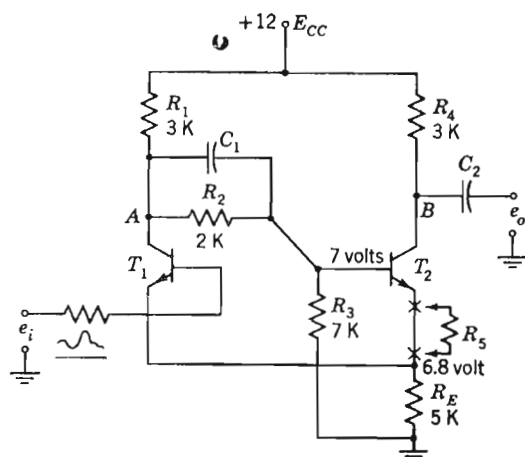



FIG. 8-72 — Circuito di Schmitt.

Vi è un effetto di isteresi di tensione tra l'interdizione e la saturazione, di T_2. L'ampiezza di questa isteresi di tensione può essere ridotta introducendo un resistore R_5 nel collegamento di emettitore di T_2. Il valore di R_5 va ricavato sperimentalmente, perché occorre ottenere un compromesso tra la riduzione dell'isteresi e la sicurezza della commutazione.

8-26. Contatori bistabili.

In un multivibratore bistabile, T_2 conduce una volta ogni due impulsi di ingresso, e quindi il numero degli impulsi negativi che si possono ottenere in uscita da T_2 è metà del numero degli impulsi di comando. Questo spiega il nome di *divisore per due* dato al circuito. Questi circuiti possono essere accoppiati in cascata per dividere per 4, 8 o per qualsiasi potenza intera di 2. Così una veloce cadenza iniziale di impulsi può essere contata da un contatore a bassa velocità di conteggio. L'intervallo di tempo tra i vari impulsi non deve essere necessariamente uguale; il circuito rimane nella sua ultima posizione finché non arriva l'impulso successivo.

Se si connettono in cascata cinque multivibratori, si può scalare di $2^5=32$, e in generale un circuito costituito da *n* multivibratori scala di un fattore 2^n. In fig. 8-73 è riportato un circuito divisore per 8, in cui gli impulsi negativi di uscita sono inviati al multivibratore successivo mediante

diodi. È anche previsto un comando di messa a zero, che porta in conduzione all'inizio del conteggio i tubi T_2, T_4 e T_6, permettendo così di conoscere la condizione di partenza di ogni bistabile.

Poiché i bistabili hanno due stati, è consuetudine indicarli come stato 0 e stato 1, associando lo stato 0 al lato in conduzione. Per la commutazione occorrono impulsi negativi, e questi impulsi vengono ottenuti da T_2, T_4 o T_6 nella commutazione da 1 a 0. Per conoscere il numero di impulsi contati è necessario avere un'indicazione dello stato di ciascun bistabile. Nei circuiti con tubi a vuoto ciò è realizzato connettendo una piccola lampadina indicatrice al neon in parallelo alle resistenze di carico di T_1, T_3 e T_5.

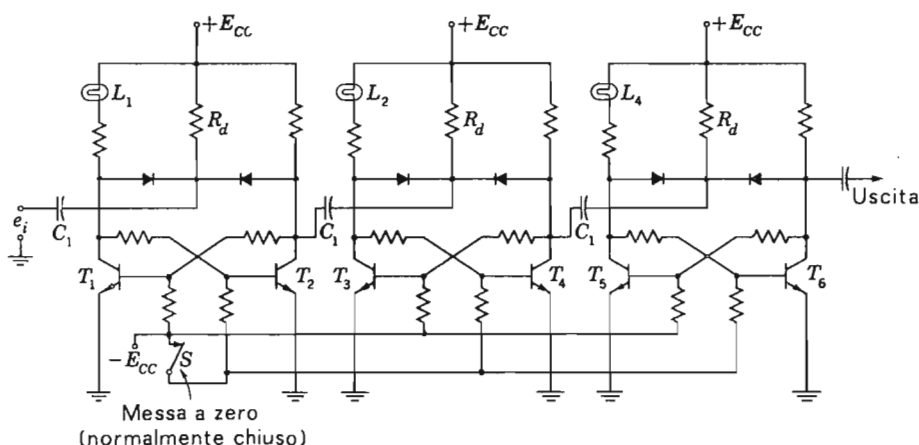



FIG. 8-73 — Circuito divisore per otto.

Nei circuiti a transistori viene connessa una piccola lampadina in serie al collettore, L_1, L_2 e L_4; se questa lampadina è spenta, ciò significa che sta conducendo l'altro transistore del bistabile.

All'inizio del funzionamento l'interruttore di messa a zero porta in conduzione T_2, T_4 e T_6, e tutte le luci sono spente, indicando così un conteggio zero.

Il primo impulso in ingresso è differenziato dal gruppo C_1 e R_d ed essendo negativo è indirizzato su T_1 portandolo in conduzione; T_2 va quindi all'interdizione. Il secondo bistabile non commuta perché T_2, andando in interdizione, genera un impulso positivo che non passa attraverso i diodi. L'indicatore L_1 è acceso. Il secondo impulso in ingresso è indirizzato su T_2 e lo porta in conduzione, mentre T_1 si interdice e l'indicatore L_2 si spegne. Quando T_2 va in conduzione si trasmette un impulso negativo attraverso il secondo gruppo differenziatore C_1, R_d, che viene inviato a T_3 portandolo in condu-

zione, mentre T_4 va in interdizione. Si accende quindi l'indicatore L_2, segnalando così che sono stati ricevuti due impulsi.

Un terzo impulso di ingresso porta di nuovo T_1 in conduzione, accendendo così L_1. Il quarto impulso riporta T_2 in conduzione e viene trasmesso un altro impulso negativo al secondo bistabile, che provoca la conduzione di T_5 e l'accensione di L_4.

Dopo quattro impulsi, T_2, T_4 e T_5 sono in conduzione ed è acceso l'indicatore L_4. Si può vedere facilmente che dopo otto impulsi in ingresso T_2, T_4 e T_6 sono in conduzione, tutti gli indicatori sono spenti ed è stato trasmesso un impulso in uscita. La sequenza delle commutazioni è riportata nella tabella seguente.

Numero di impulsi	*Indicatore*			*Segnale di uscita*
	L_1	L_2	L_4	
0	0	0	0	
1	1	0	0	
2	0	1	0	
3	1	1	0	
4	0	0	1	
5	1	0	1	
6	0	1	1	
7	1	1	1	
8	0	0	0	Si

Se alle luci degli indicatori vengono dati i valori 1, 2, 4, . . ., si può vedere che il numero degli impulsi ricevuti è la somma pesata delle lampadine accese; sette impulsi in ingresso sono contati dalle luci $1+2+4=7$.

8-27. Conteggio decimale.

Una serie di bistabili divide per potenze di 2, ossia conta nel sistema binario. Si può tuttavia applicare una reazione per far sì che il circuito si riporti alla condizione iniziale dopo l'arrivo dell'ennesimo impulso; in pratica vengono sottratti al conteggio r impulsi e si ottiene un fattore di scala di $2^n - r$.

In particolare, è conveniente dividere per il fattore 10, ossia contare per decadi nel sistema numerico decimale. Il circuito di fig. 8-74 per esempio fornisce un tale conteggio in base decimale con quattro bistabili in cui il rapporto di divisione sarebbe normalmente 16. Il circuito presenta un $r=6$, e quindi $2^n-6=10$; ciò è realizzato mediante un accoppiamento in senso inverso tra gli stadi.

La messa a zero del circuito nella condizione iniziale di partenza, ossia

con tutti gli stadi pari in conduzione, viene realizzata aprendo l'interruttore di messa a zero. Dopo questa operazione, il circuito fornirà un impulso in uscita ogni dieci impulsi in ingresso. Questa uscita può essere utilizzata come ingresso per le successive decadi di conteggio.

Tramite la reazione da T_7 attraverso i diodi D_1 e D_2 all'ottavo impulso vengono aggiunti due conteggi al secondo bistabile e quattro conteggi al terzo, spostando così il conteggio di 6. Dopo altri due impulsi, ossia dopo 10 impulsi in totale, tutti gli stadi ritornano nella loro posizione iniziale, e viene trasferito in uscita un impulso negativo quando T_8 va in conduzione.

Lo stato di ogni stadio dopo ogni impulso è riportato nella tabella seguente.

Numero di impulsi	*Situazione del contatore decadico*								*Uscita*
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	
0	no	si	no	si	no	si	no	si	
1	si	no	no	si	no	si	no	si	
2	no	si	si	no	no	si	no	si	
3	si	no	si	no	no	si	no	si	
4	no	si	no	si	si	no	no	si	
5	si	no	no	si	si	no	no	si	
6	no	si	si	no	si	no	no	si	
7	si	no	si	no	si	no	no	si	
8	no	si	no	si	no	si	si	no	
8*	no	si	si	no	si	no	si	no	
9	si	no	si	no	si	no	si	no	
10	no	si	no	si	no	si	no	si	si

* Per effetto della reazione attraverso D_1 e D_2.

La reazione da T_7 a T_3 e T_5 si ha dopo che T_8 ha portato in conduzione T_7 ed è quindi sufficientemente ritardata in modo che l'impulso di comando non porti all'interdizione T_3 e T_5 allo stesso istante in cui l'impulso di reazione li porta in conduzione.

Le lampade indicatrici, inserite come in fig. 8-73, non fornirebbero un'indicazione corretta dopo l'ottavo impulso perché il circuito si trova nella posizione corrispondente in effetti a 14 impulsi. Spesso viene impiegata una matrice di diodi, che sarà esaminata in seguito, per decodificare l'uscita della catena e per presentare direttamente il conteggio in numeri decimali. Le lampade possono essere pilotate da amplificatori a transistori per ottenere una potenza sufficiente.

Per ottenere rapporti di divisione differenti, si possono usare altre combinazioni dei circuiti di reazione. Inoltre, poiché per ogni stato stabile esiste nel circuito un insieme di tensioni che è diverso per ogni stato, è possibile incorporare nella catena un circuito di controllo che fornisca una in-

dicazione o un segnale dopo che è stato contato un numero prestabilito di impulsi. Per esempio, si può contare con una cellula fotoelettrica il numero di pillole che vengono introdotte in una bottiglia e l'operazione di riempimento viene arrestata quando si è raggiunto il numero desiderato. Questi

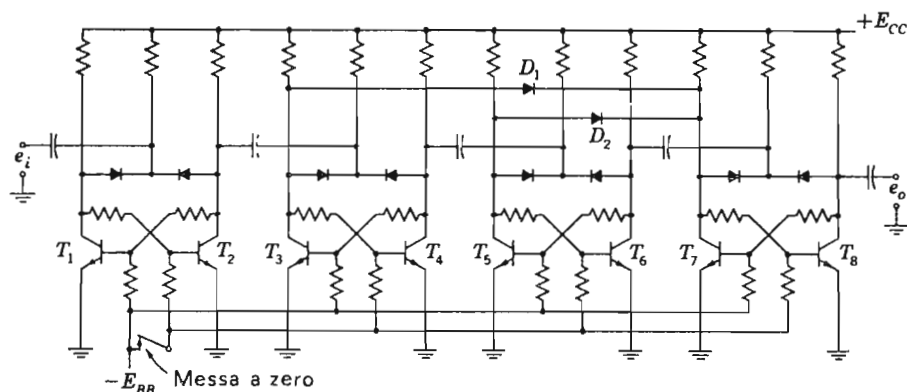



FIG. 8-74 — Contatore decimale, con impiego della reazione.

metodi di conteggio permettono di misurare in numero di eventi o un intervallo di tempo con una precisione ed una velocità che non hanno riscontro in altri sistemi di misura. In particolare ciò è vero per la misura di frequenza ottenuta contando il numero di cicli presenti durante un prestabilito intervallo di tempo accuratamente determinato. Questi tipi di contatori possono contare fino a numeri con otto cifre significative.

Un esempio di applicazione di molte delle tecniche precedentemente descritte in una sola apparecchiatura, è dato dal *voltmetro digitale.* Questo strumento misura potenziali con alta impedenza di ingresso, e fornisce il valore della tensione direttamente come valore numerico impiegando fino a quattro cifre significative. In fig. 8-75 è riportato lo schema a blocchi.

Un multivibratore astabile che determina il numero di letture al secondo, fa partire simultaneamente un oscillatore di frequenza opportuna e un generatore di rampa. Supponendo che l'ampiezza della rampa varii da 0 a 100 volt e che la durata della rampa sia di 0,1 s, se l'oscillatore ha una frequenza di 10.000 Hz, nell'intervallo di tempo che impiega la rampa a salire esso fornirà 1000 cicli; quindi durante ogni ciclo la rampa aumenta di 0,1 volt.

La tensione da misurare è applicata ad un circuito comparatore, che compara la tensione incognita con la tensione della rampa. Quando le due tensioni sono uguali, il comparatore genera un impulso che interdice l'oscillatore quando, ad esempio, sono stati generati 436 cicli. Tre decadi di bistabili contano questo numero di cicli, e, tramite il comando del tempo-

rizzatore astabile, questo numero viene presentato mediante appropriate luci numerate, come 43,6 volt. Dopo un certo intervallo di tempo il circuito ripete il ciclo e rimisura la tensione, in modo che il valore digitale possa seguire un ingresso lentamente variabile.

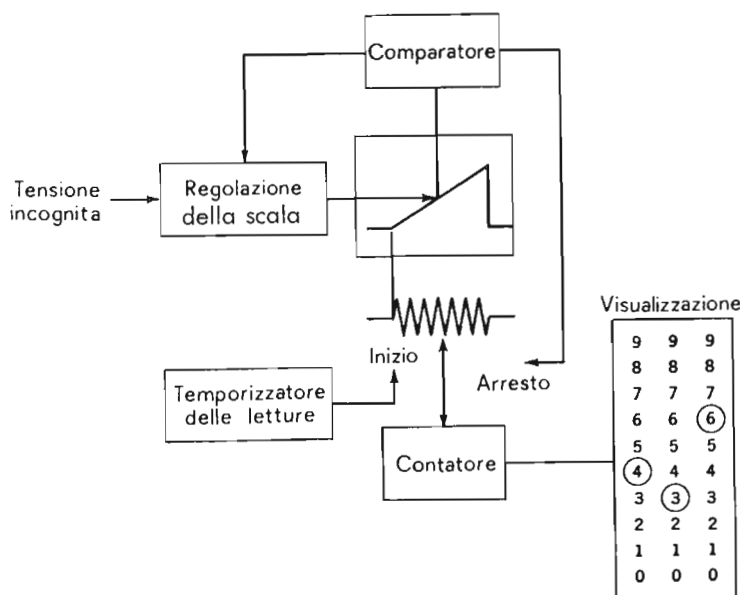



FIG. 8-75 — Schema a blocchi di voltmetro digitale.

Se la tensione di ingresso scende a valori prossimi all'inizio della rampa, e quindi non si possono ottenere valori con tre cifre significative della misura, si può inserire un trigger di Schmitt che cambi il campo di misura agendo su un selettore connesso ad una rete di resistori di valore molto preciso. Se la tensione di ingresso supera il valore del massimo della rampa, un altro trigger di Schmitt può agire in senso opposto sul partitore di ingresso.

Molte altre apparecchiature basate sulla conversione analogico-digitale impiegano le tecniche qui esaminate.

8-28. Il tubo contatore decadico.

Le complessità dei circuiti esaminati nei paragrafi precedenti ha portato allo studio di singoli tubi che effettuassero il conteggio in base deci-

male. Questi tubi sono adatti per conteggio a media velocità e il numero viene letto notando la posizione di una macchia luminosa, dovuta alla ionizzazione su uno dei dieci catodi numerati.

Un tubo del genere funziona sul principio che la tensione di innesco di una scarica nel gas è più bassa se sono già presenti degli ioni nello spazio tra anodo e catodo.

Se si dispone una serie di catodi intorno ad un anodo comune, si può spostare la scarica nel gas da un catodo all'altro con una successione di impulsi negativi, una volta che si sia creata una ionizzazione iniziale nello spazio tra l'anodo ed il catodo successivo.

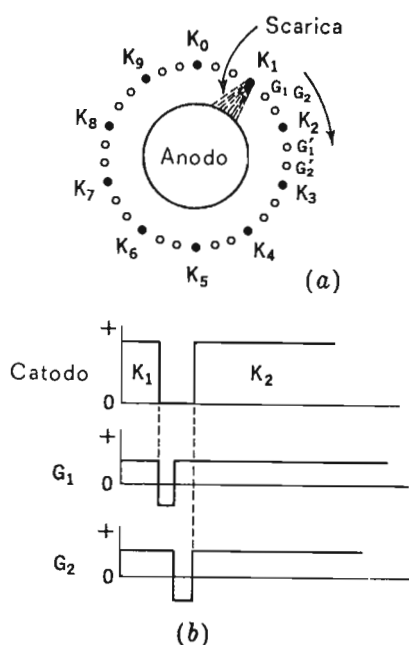



FIG. 8-76 — *a*) Tubo per conteggio decadico. *b*) Relazioni tra i potenziali degli elettrodi durante la commutazione.

In fig. 8-76*a* è riportata una vista dall'alto di questo tubo, con l'anodo centrale circondato da trenta catodi disposti in gruppi di tre. I catodi principali sono indicati con le lettere K_0, . . . , K_9 e sono tutti connessi in parallelo. Per ogni gruppo di tre catodi vi sono inoltre due catodi guida, G_1 e G_2, o G'_1 e G'_2, e così via per gli altri gruppi di catodi. Tutti i catodi G_1 sono connessi in parallelo, come anche sono connessi insieme i catodi G_2.

Supponendo che vi sia presente una scarica luminosa tra l'anodo e K_1, un impulso negativo in tutti i catodi guida G_1 provocherà lo spostamento della scarica sul catodo G_1 più vicino a K_1, in quanto questo catodo è l'elettrodo più negativo nella regione intorno a K_1. La scarica si può spostare facilmente perché gli ioni creati dalla scarica su K_1 sono presenti anche lungo il percorso verso il catodo G_1. Al termine del primo impulso negativo su G_1, viene applicato un secondo impulso negativo su tutti i catodi G_2, e la scarica si trasferisce sul catodo G_2 più vicino a G_1 perché questo elettrodo guida è ora l'elettrodo più negativo in prossimità di G_1. Al termine dell'impulso negativo su G_2, la scarica si trasferisce su K_2, che ora è ad un potenziale più negativo del potenziale normale dei catodi G_1 o G_2.

Nel tubo sono incorporati degli schermi in modo che la luce della scarica possa illuminare il numero appropriato su un cerchio, in modo da ottenere un dispositivo a lettura diretta. Si può far sì che la variazione di potenziale sul catodo K_c trasmetta un impulso ad un secondo tubo, in modo che possano funzionare anche più tubi decadici in cascata per estendere il conteggio alle centinaia, migliaia, o oltre. La massima frequenza di ingresso è però limitata a circa 4000 impulsi al secondo, a causa del tempo richiesto per deionizzare il gas.

PROBLEMI

8-1. Supponendo applicata la forma d'onda e_i, riportata in fig. 8-77*a*, con $t_1 = 200$ μs, $t_2 = 100$ μs, $E_1 = -100$ volt, $E_2 = 100$ volt, al circuito di fig. 8-77, tracciare l'andamento di e_1 ed e_2 fino alla fine del transitorio. Riportare tutte le tensioni nella stessa scala della tensione applicata.

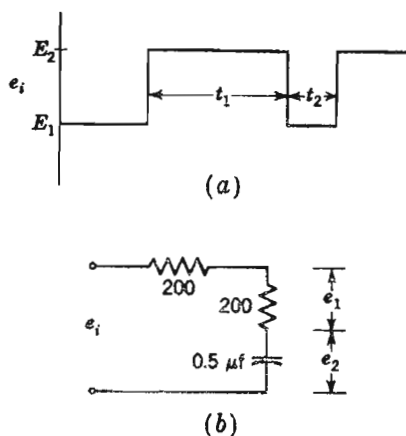



Fig. 8-77

8-2. Ripetere il problema 8-1, con $t_1 = 500$ μs, $t_2 = 500$ μs, $E_1 = 0$, $E_2 = 200$ volt. Qual'è il valore medio di e_1 e di e_2?

8-3. In fig. 8-78*a*, l'interruttore S, rimasto aperto per molto tempo, viene chiuso all'istante $t = 0$ per un periodo di tempo di 0,001 s e quindi di nuovo aperto. Riportare e_0 in funzione del tempo, e calcolare la potenza dissipata nella resistenza da 10.000 ohm.

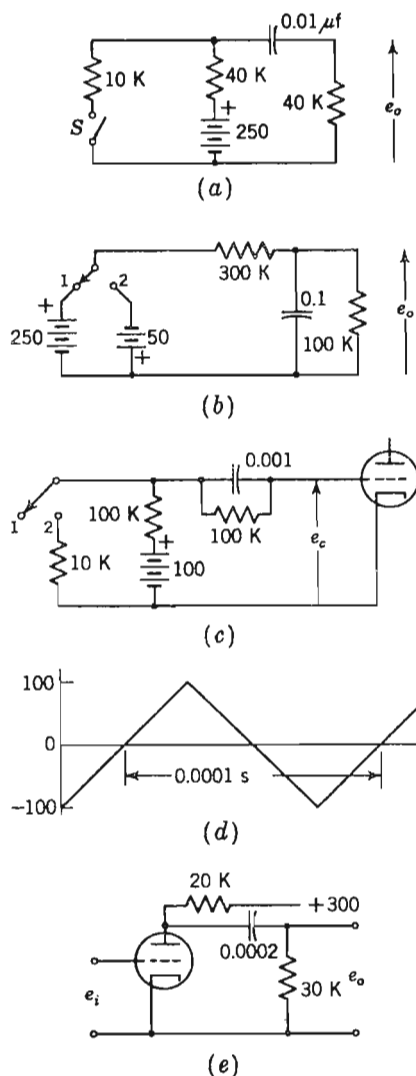



FIG. 8-78

8-4. L'interruttore di fig. 8-78*b* oscilla tra le posizioni 1 e 2, e il contatto su ciascun punto dura 0,5 s. Tracciare la forma d'onda di e_0.

8-5. In fig. 8-78*c*, la durata del contatto dell'interruttore su 1 e 2 è di 500 μs. Supponendo che $r_e=0$ quando la griglia è positiva, e infinita quando la griglia è negativa, disegnare la tensione griglia-catodo e_e in funzione del tempo.

8-6. Al circuito integratore RC con R = 100 K Ω, C = 0,01 μF viene applicata l'onda triangolare di fig. 8-78*d*. Riportare la forma d'onda in uscita supponendo l'onda simmetrica e di periodo 0,0001 s.

8-7. La forma d'onda di fig. 8-78*d* con i valori specificati nel probl. 8-6 viene applicata ad un circuito differenziatore con RC = 100 μs. Disegnare la forma d'onda in uscita.

8-8. Nel circuito in fig. 8-17*a* $R_g=1$ megaohm, R = 100.000 ohm, $R_L=30.000$ ohm, $E_{bb}=300$ volt, e il tubo è una sezione di 12AU7. Supponendo che $r_e=1000$ ohm quando la griglia è positiva, riportare la tensione anodica in scala, per una tensione di ingresso sinusoidale di 100 volt efficaci, a 1000 Hz.

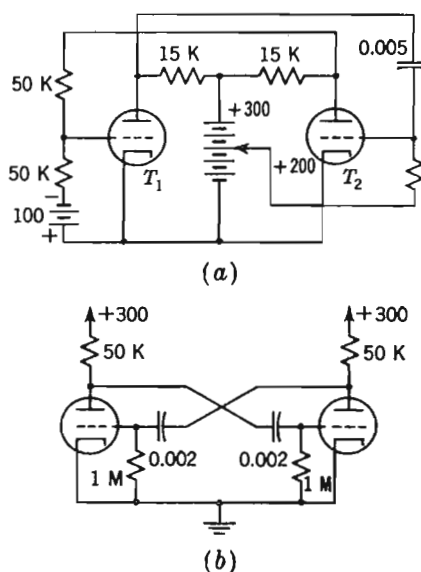



FIG. 8-79

8-9. Ad un circuito serie RL viene applicata una tensione trapezoidale $e=K_1+K_2t$. Supponendo $i_L=0$ per $t=0$ trovare l'espressione analitica per la corrente.

8-10. Al circuito di fig. 8-78*e* viene applicata un'onda rettangolare che vale 0 volt per 200 μs e —100 volt per 200 μs. Il tubo è un 6C4 con μ = 17. Disegnare in scala l'andamento di e_o per un ciclo della tensione di ingresso.

8-11. Il circuito di fig. 8-79*a* è comandato con un impulso positivo sulla griglia di T_1. Determinare (*a*) la polarizzazione di T_2 prima del comando, (*b*) la polarizzazione di T_1 prima del comando, (*c*) la polarizzazione di T_1 durante l'impulso, (*d*) la durata degli impulsi di uscita ottenuti tra anodo di T_2 e massa.

8-12. In fig. 8-80 è riportato un circuito limitatore all'interdizione per picchi sia positivi che negativi. Determinare i livelli di limitazione, e disegnare la forma d'onda in uscita supponendo in ingresso un segnale sinusoidale di 100 volt di picco. Il tubo è un 12AU7.

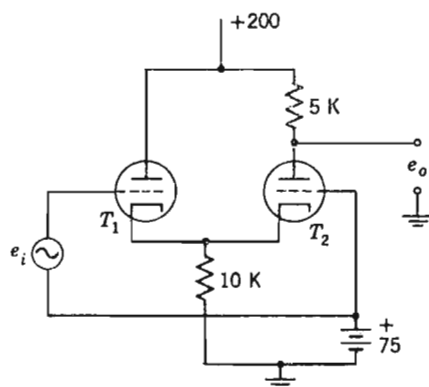



FIG. 8-80

8-13. Nel circuito di fig. 8-81, ponendo E=10 volt, r_b=500 ohm per il diodo, R=500.000 ohm, T_2=0,001 s e T_2=0,000001 s, supponendo inoltre che C sia sufficientemente grande in modo da trascurare il transitorio di carica; (*a*) determinare il livello zero della forma d'onda di uscita; (*b*) supponendo ora T_1 = 0,000001 s e T_2 = 0,001 s determinare il livello zero dell'uscita.

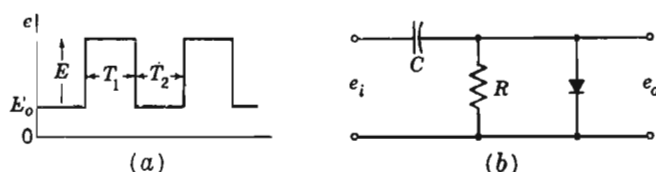



FIG. 8-81

8-14. Un'onda quadra di ampiezza 2 volt picco-picco e valor medio nullo è applicata ad un circuito integratore RC la cui costante di tempo è uguale a metà del periodo dell'onda. Determinare la forma d'onda e l'ampiezza picco-picco dell'uscita.

8-15. Mostrare che il circuito di fig. 8-82 è bistabile, supponendo che $E_{CE}=E_{BE}=0$ quando conduce, e supponendo anche che C mantenga E_E costante. Inizialmente T_1 è in conduzione e T_2 è interdetto. (*a*) Determinare I_{B1} e E_{BE2} (h_{FE} = 20). (*b*) La dissipazione è minore del valore massimo di 120 mW.

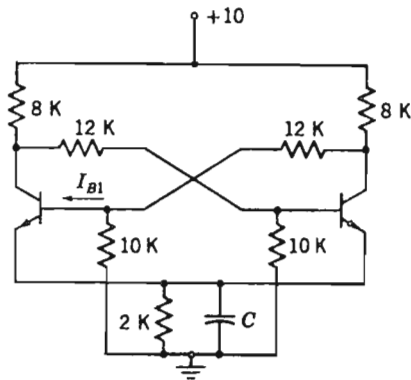



FIG. 8-82

8-16. Per il circuito di fig. 8-79*b*, che presenta una resistenza di griglia $r_e=500$ ohm per potenziali positivi, determinare r_b per $e_c=0$, ricavando questo dato dalle caratteristiche del tubo 6C4. (*a*) Determinare quindi la tensione di griglia del tubo interdetto, mentre l'altro tubo è in conduzione con $e_c = 0$. (*b*) Calcolare il periodo di interdizione. (*c*) Determinare la frequenza di ripetizione.

8-17. Progettare un multivibratore astabile che funzioni a 1000 Hz, impiegando transistori 2B525. Si ponga $E_{cc}=15$ volt, $h_{FE}=30$, $R_1=2K$, $P_d=225$ mW.

8-18. Con riferimento al circuito di fig. 8-48*c*, in cui $E_{cc}=20$ volt, $E_{BB}=10$ volt, $h_{FE}=20$, determinare i valori di R_1, R_2 e R_3 per ottenere una corrente di collettore di 20 mA nel transistore in conduzione. La polarizzazione del transistore interdetto è di 1 volt, e si desidera una corrente di base di valore doppio di quello di saturazione.

8-19. Nelle condizioni del probl. 8-18, con $R_1=2K\Omega$, $R_2=20K\Omega$, e $R_3=200K\Omega$, determinare la corrente di base nel transistore in conduzione e la tensione E_{FE} per quello in interdizione. Qual'è il fattore di sicurezza per la corrente di base?

8-20. Nel circuito di fig. 8-48*b*, con $h_{FE}=20$, si desidera una corrente di collettore di 1 mA nel trasnsistore in conduzione. Determinare R_1, R_o, R_3, R_4 e C per ottenere un impulso di uscita di 1 ms. La polarizzazione di base all'interdizione è 1 volt, e la corrente di base nel transistore in conduzione deve essere il doppio del valore richiesto.

8-21. Per il circuito di fig. 8-53, in cui $h_{FE}=20$, la corrente di base è il doppio del valore richiesto, e $C_1=C_2=5$ μF, determinare $R_1=R_4$ e $R_2=R_3$ per $T_1=T_2=1$ s.

BIBLIOGRAFIA

1. CHANCE B., V. HUGHES, E. F. MACNICHOL, D. SAYRE, and F. C. WILLIAMS: "Waveforms," McGraw-Hill Book Company, New York, 1949.
2. CHANCE B.: Some Precision Circuit Techniques Used in Waveform Generation and Time Measurement, *Rev. Sci. Instr.*, **17**: 396 (October, 1946).
3. MATHER N. W.: Clipping and Clamping, *Electronics*, **20**: 111 (July, 1947).
4. BATCHER R. R.: Circular and Polar Sweeps, *Electron. Ind.*, **3**: 80 (September, 1944).
5. CLARKE A. C.: Linearity Circuits, *Wireless Engr.*, **21**: 256 (June, 1944).
6. COCKING W. T.: Linear Sawtooth Oscillators, *Wireless World*, **16**: 425 (May, 1939).
7. HERRENDEN HARKER G. F.: The Mechanism of Synchronization in the Linear Time Base, *Phil. Mag.*, **26**: 193 (1938).
8. POTTER J. L.: Sweep Circuits, *Proc. IRE*, **26**: 713 (1938).
9. PUCKLE O. S.: "Time Bases," John Wilzy & Sons, Inc., New York, 1943.
10. ABRAHAM H., and E. BLOCH: Notice sur les lampes-valves à 3 électrodes et leurs applications, Ministère guerre *Publ.* 27, April, 1918.
11. ECCLES W. H., and F. W. JORDAN: Trigger Relay Utilizing Three Element Thermionic Vacum Tubes, *Radio Rev.*, **1**: 143 (Octobe, 1919).
12. MATHER N. W.: Multivibrator Circuits, *Electronics*, **19**: 136 (October, 1946).
13. PAGE C. H.: Digital Computer Switching Circuits, *Electronics*, **21**: 110 (September, 1948).
14. CLOSE R. N., and M. T. LEBENBAUM: Design of Phantastron Time-delay Circuits, *Electronics*, April, 1948.
15. ROTCHE D. K.: The Optimum D-C Design of Flip-flops, *Proc. IRE*, **41**: 1614 (1953).
16. MILLMAN J., and H. TAUB: "Pulse and Digital Circuits," McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
17. STANTON W. A.: "Pulse Technology," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
18. PULLEN KEATS A.: "Handbook of Transistor Circuit Design," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, N.J., 1961.
19. PETIT J. M.: "Electronic Switching, Timing, and Pulse Circuits," McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

CAPITOLO IX

CIRCUITI LOGICI; CALCOLO NUMERICO

Precedentemente esaminando i vari elementi di un calcolatore analogico si è prestata poca attenzione al loro impiego per la soluzione di problemi connessi con l'ingegneria, perchè il nostro interesse principale era quello di conoscere i principi basilari del calcolo analogico.

Noi ora vogliamo seguire lo stesso scopo nello studio dei calcolatori numerici. Nel capitolo precedente sono stati esaminati molti dei circuiti elettronici fondamentali per l'elettronica impulsiva e per i calcolatori numerici. Prima di esaminare il calcolatore nel suo insieme bisogna analizzare i principi fondamentali del calcolo algebrico e numerico, in modo da poter comprendere la logica della commutazione ossia il «modo di ragionare» del calcolatore.

Dopo avere esaminato questa logica, che ha un notevole valore come disciplina in sè stessa, si esaminerà l'organizzazione del calcolatore numerico. Anche qui, l'intento è quello di presentare i calcolatori ed i loro circuiti elementari in modo tale che i principi del calcolo numerico possano, successivamente, essere sfruttati come elementi di sistemi più ampi nel campo della ingegneria. Lo studio della programmazione e della soluzione dei problemi pratici su un calcolatore numerico viene invece rimandato ad altri testi.

9-1. Sistemi numerici.

Nella storia dell'uomo sono stati utilizzati molti sistemi numerici. Il sistema decimale ha avuto grande diffusione per gli importanti vantaggi che offre, sebbene le sue umili origini siano basate sul fatto che l'uomo ha dieci dita.

Nel sistema Romano le notazioni ed i loro pesi erano M = 1000, D = = 500, C = 100, L = 50, X = 10, V = 5, I = 1. Si può notare una certa logica nella scelta dei pesi, in quanto ogni valore è due o cinque volte più grande di quello della notazione immediatamente seguente. Il sistema Romano non dava valore alla posizione del simbolo; il peso di una notazione era indipendente dalla sua posizione eccetto che per la sua relazione con la

notazione immediatamente precedente o seguente. Per esempio, XC = 90, CM = 900, e

CMLXVI = 966
MCXLVI = 1.146

Si può notare subito come sia difficile effettuare la moltiplicazione o la divisione con questo sistema.

Il concetto di zero, inizialmente introdotto dagli Indi, ha reso possibile il sistema decimale, nel quale è importante la posizione assoluta del simbolo. Lo zero indica la presenza di una posizione ed inoltre il valore zero in quella posizione. Quindi si può definire la posizione delle unità, delle decine, delle centinaia, e così via, e se il numero da rappresentare non ha valori o notazioni in queste posizioni, noi possiamo tuttavia rendere noto la presenza di queste posizioni con l'uso di zeri, p. e., 60 o 6000.

Il concetto di posizione può essere evidenziato ulteriormente scrivendo il numero decimale 40375 come:

$$40.375 = 4 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Per convenzione noi scriviamo solo i coefficienti nella loro posizione appropriata; uno zero indica che non vi è peso o valore in quella posizione.

Per i numeri frazionari si segue la stessa notazione con esponenti negativi, per cui:

$$0{,}40375 = 4 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + 7 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5}$$

i moltiplicatori successivi sono quindi un decimo, un centesimo, etc.

I simboli del sistema decimale sono 10 (0, 1, 2, 3,. . . ., 9), e il numero dei simboli differenti viene detto *radice* del sistema. Ogni valore intero può essere scelto come radice, e un numero in un sistema basato sulla radice r viene scritto:

$$S = K_n r^n + K_{n-1} r^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + K_1 r^1 + K_0 r^0 \qquad (9\text{-}1)$$

essendo ovviamente r^0 l'unità.

Per convenzione, la colonna delle unità viene posta a destra, per cui la cifra più a sinistra è la *cifra più significativa*, cioè quella che ha la maggiore importanza; la cifra a destra è invece la *cifra meno significativa.*

Poichè quattro bistabili in cascata possono contare fino a 16 senza complicazioni, si sono sviluppati alcuni metodi di calcolo basati su un sistema di radice 16.

I simboli caratteristici di questo sistema potrebbero essere 0, 1, 2, ... , 9, a, b, c, d, e, f.

Il sistema ottale con radice 8 e quello ternario basato su tre simboli vengono usati qualche volta perchè presentano certi vantaggi di calcolo, ma il sistema adottato nella quasi generalità dei casi è il sistema binario, con radice 2. Nella tabella 15 vi sono degli esempi di numeri scritti con queste diverse radici.

TABELLA 15 — SISTEMI NUMERICI CON DIVERSI VALORI DELLA RADICE.

Decimale (10)	*Binario* (2)	*Ternario* (3)	*Ottale* (8)	*Esadecimale* (16)
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	6	6
7	111	21	7	7
8	1000	22	10	8
9	1001	100	11	9
10	1010	101	12	a
11	1011	102	13	b
12	1100	110	14	c
13	1101	111	15	d
14	1110	112	16	e
15	1111	120	17	f
16	10000	121	20	10
18	10010	200	22	12
20	10100	202	24	14
30	11110	1010	36	1e
40	101000	1111	50	28
50	110010	1212	62	32

9-2. Il sistema numerico binario.

Il sistema binario, o a radice 2, ha tali vantaggi da essere largamente impiegato come sistema numerico *interno* del calcolatore. Ciò non significa però che l'utente debba parlare col calcolatore in linguaggio binario, in quanto sia all'ingresso che all'uscita vengono utilizzati dei convertitori binario-decimale, e l'utente utilizza il sistema decimale. Ci interessa tuttavia il linguaggio binario, perche vogliamo sapere *come* la macchina effettua i calcoli.

L'aritmetica binaria è utile perchè è semplice ed adatta ad un funzionamento *sicuro* degli elementi e dei dispositivi elettronici. Per esempio, un

interruttore elettrico ha due stati, *aperto* e *chiuso*, o *si* e *no*, e lo stesso si può dire dei relè elettrici, usati nel primo calcolatore elettronico ad alta velocità, e del circuito bistabile, o flip-flop.

Con l'impiego del sistema numerico binario si rende necessario riconoscere solamente due simboli o livelli, interruttore *chiuso* o *aperto*, tubo o transistore *in conduzione* o in *interdizione*. Per rappresentare più di due stati, con tubi o transistori, bisognerebbe riconoscere dei valori discreti di corrente, e questo non lo si può fare con sufficiente sicurezza nei circuiti elettronici.

I due stati del sistema numerico binario sono indicati con *si* o *no*, o *vero* e *falso*, e i simboli usati sono 1 e 0. Per definizione di notazione posizionale, la notazione binaria impiega la potenza di 2, ossia la radice 2.

Il numero decimale 1066 equivale, nel sistema numerico binario, a:

$$S = 1 \times 2^{10} + 0 \times 2^{9} + 0 \times 2^{8} + 0 \times 2^{7} + 0 \times 2^{6} + 1 \times 2^{5} + 0 \times 2^{4} + 1 \times 2^{3} + 0 \times 2^{2} + 1 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0}$$

I termini precedenti rappresentano i numeri decimali:

$$S = 1.024 + 0 + 0 + 0 + 0 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = 1.066$$

e il numero binario è:

$$S = 10000101010$$

Nella teoria dei sistemi di comunicazione, la quantizzazione o la misura del contenuto di informazione di un messaggio è usualmente fatta con i numeri binari 0 e 1; è venuto perciò in uso di chiamare la singola unità elementare di informazione *bit* (*bi*nary digi*t*).

Quindi il precedente numero binario S impiega 11 bit per fornire la sua informazione numerica. Ovviamente nel sistema binario sono richieste molte più cifre per rappresentare un numero di quante siano necessarie nel sistema decimale; per esempio 11 invece di 4 nell'esempio precedente. Questo è il prezzo da pagare per la diminuzione degli stati o delle indicazioni da riconoscere.

Dalla tabella 15 si può notare che il numero di bit, o di simboli, necessari nel sistema binario e ternario è maggiore di quello del sistema decimale, mentre il sistema a base 16 usa un minor numero di bit. Si pone la questione di quale sia il numero di bit necessari per rappresentare un numero decimale in un sistema con una qualsiasi radice *r*. Si noti che per rappresentare 10^n numeri decimali sono necessari *n* cifre decimali; per rappresentare questi stessi numeri in un sistema con radice *r* si ha:

$$r^m = 10^n$$

$$m = \left[\frac{n}{\log r}\right] \qquad (9\text{-}2)$$

dove il secondo membro è un intero, o l'intero maggiore più prossimo. Per esempio nel sistema a base 16, n ha il valore di 8,3 per $n = 10$, perciò saranno necessari 9 bit esadecimali per rappresentare un numero di 10 bit decimali. Si può dimostrare che per $r > 10$, occorrono meno bit per il sistema con radice r che per la rappresentazione decimale.

Questo sembrerebbe comportare un'economia per i sistemi a grande radice, ma questa economia viene annullata dalla necessità di dover riconoscere molti più simboli o stati. Allo stato attuale, i circuiti più semplici e di maggior affidabilità sono quelli del sistema binario; il vantaggio dell'impiego di un numero minore di bit non è abbastanza grande da bilanciare la semplicità e l'affidabilità dei circuiti binari.

Si può argomentare che i dieci stati del sistema decimale sono troppi per poter identificare con precisione i vari stati e che i due livelli del sistema binario sono troppo pochi tenendo conto dei circuiti necessari per i bit in più. Si può fare il seguente ragionamento: detto n il numero di bit da utilizzare e r la radice o il numero di stati, allora i numeri che possono essere scritti sono r^n. Se si suppone che per ogni cifra e per ogni stato o simbolo è necessario impiegare un transistore e una unità dell'equipaggiamento ausiliario, la complessità o la quantità di circuiti viene espressa da rn.

Il più grande numero da scrivere sia $k = r^n$, per cui

$$\text{costo} = \text{rn} \qquad \text{ma} \qquad \text{r}^\text{n} = \text{K}$$

$$\text{n} \ln \text{r} = \ln \text{K}$$

allora

$$\text{Costo} = \frac{\text{r} \ln \text{K}}{\ln \text{r}} \tag{9-3}$$

Effettuando la derivata di questa funzione rispetto a r. si può vedere che il costo è minimo quando

$$\text{r} = \varepsilon = 2{,}718$$

Perciò i valori di r di 2 e 3 sono quelli prossimi a quello di minimo costo; si ha quindi un'ulteriore argomento a favore della scelta del sistema binario.

9-3-. Aritmetica binaria.

Per utilizzare i numeri binari è necessario conoscere le tabelle di addizione e moltiplicazione, che sono sorprendentemente semplici, come si può vedere dalle tabelle 16 e 17.

TABELLA 16 — Addizione binaria

	0	1
0	0	1
1	1	10

TABELLA 17 — Moltiplicazione binaria

	0	1
0	0	0
1	0	1

Il simbolo 10 va letto come « zero e riporto di 1 ». Ad esempio, si sommi 11010 al numero binario 10010

	11010	=	decimale 26
	10010	=	decimale 18
	01000	=	
riporto	1 1		
	101100	=	decimale 44

Convertendo i numeri negativi nei loro complementi, tutti i problemi di sottrazione vengono riportati a problemi di addizione. Nel sistema decimale il complemento a dieci di un numero è quel numero che, sommato al numero originale, dà per somma 10 e tutti zeri successivi. Il complemento di 452 è 548 perchè

452
548
1000

Il complemento a dieci può essere anche ottenuto sottraendo ogni cifra da nove per ottenere il complemento a 9 e poi sommando 1 per ottenere il complemento a dieci. Cioè

999	
— 452	
547	complemento a 9
+1	
548	complemento a 10

Nel sistema binario il complemento a 2 è quel numero che, sommato al numero originale, dà 2 (10) e tutti zeri successivi. Il processo è più facilmente effettuato, analogamente alla operazione decimale, sottraendo il numero da una serie di 1 per ottenere il complemento a 1 e poi sommando 1 per ottenere il complemento a 2, ossia:

11111111	
— 10010011	
1101100	complemento a 1
+ 1	
1101101	complemento a 2

La verifica del risultato è facile:

10010011	numero
1101101	complemento a 2
100000000	

Si noti che il complemento a 1 può essere ottenuto direttamente sostituendo ogni 1 con uno 0 e ogni 0 con un 1.

Nel processo di moltiplicazione decimale noi sommiamo il moltiplicando un numero di volte pari a quello specificato dall'ultima cifra significativa

del moltiplicatore; poi ci spostiamo verso sinistra e ripetiamo il processo per ogni termine del moltiplicatore.

Per esempio 451 × 321 sul calcolatore da tavolo viene effettuato così:

```
    451
  × 321
  -----
    451
   451
   451
  451
  451
  451
 ------
 144771
```

La moltiplicazione binaria viene effettuata anch'essa come una serie di addizioni, effettuate con ripetuti spostamenti del moltiplicando verso sinistra (o destra per numeri minori dell'unità) per ogni zero del moltiplicatore e con spostamenti e somma del moltiplicando per ogni 1 del moltiplicatore. Quindi 10101 × 1011 (decimali 21 × 11) dà:

```
   10101
    1011
 --------
   10101         moltiplicazione per 1
  10101          spostamento e moltiplicazione per 1
 00000           spostamento e moltiplicazione per 0
10101            spostamento e moltiplicazione per 1
 --------
11100111    =    decimale 231
```

Gli spostamenti corrispondono a quelli effettuati nella moltiplicazione decimale, ma il lavoro è notevolmente semplificato perchè ogni termine deve essere ripetuto solo una volta, per eseguire la moltiplicazione per 1.

L'operazione di divisione decimale viene effettuata nel calcolatore da tavolo con sottrazioni successive, sottraendo cioè il divisore dal dividendo finchè il resto diventa minore del divisore. Il numero di queste sottrazioni è la cifra più significativa del quoziente. Poi si sposta la posizione di una unità a destra e si ripete il processo finchè non si ottiene il numero voluto di cifre significative. Per esempio

```
144.771 | 321          16.371 \           321 \
 32.100 \               3.210 |           321  } 1
------- |              ------ |           ---  /
112.671 |              13.161 |           000
 32.100 |               3.210 |
------- |              ------ |
 80.571 |               9.951 |
 32.100  > 4            3.210  > 5
------- |              ------ |
 48.471 |               6.741 |
 32.100 |               3.210 |
------- |              ------ |
 16.371 /               3.531 |
                        3.210 |
                       ------ |
                          321 /
```

Il risultato decimale è 451

La divisione binaria segue lo stesso procedimento, ma con la semplicità del sistema in base 2. Quindi:

```
11100111 | 1011
10110000
--------                          )
  110111                          |
  101100   due spostamenti        >  10101
  ------                          |
    1011                          |
    1011   due spostamenti        )
  ------
    0000
```

Per sottrarre, il calcolatore numerico può usare i complementi e sommare.

La posizione della virgola decimale o binaria in un prodotto viene determinata con questa procedura:

1. Conteggio del numero di cifre del moltiplicando da destra fino al punto in cui compare la virgola e del numero delle cifre del moltiplicatore da destra fino al punto in cui compare la virgola.
2. Somma dei due conteggi; il totale dà la posizione della virgola nel prodotto indicando il numero di posizioni che essa lascia a destra.

Per determinare la posizione della virgola decimale o binaria in un quoziente si segue la procedura inversa:

1. Conteggio del numero di cifre del dividendo da sinistra fino alla virgola e del numero di cifre del divisore da sinistra fino alla virgola.
2. Sottrazione del conteggio del divisore da quello del dividendo; il risultato dà la posizione della virgola nel quoziente in numero di posizioni contate dalla sinistra.

Un metodo applicabile in generale ai calcolatori numerici è quello di moltiplicare tutti i numeri per opportune potenze di 10 o di 2 e poi trattare gli esponenti come parte del numero. Per la somma le potenze di 10 o di 2 debbono essere rese uguali, ma nella moltiplicazione gli esponenti sono semplicemente sommati e nella divisione sottratti.

9-4. Trasformazione dei numeri binari e decimali.

I numeri interi decimali possono essere trasformati in forma binaria con divisioni successive per 2, registrando il resto 1 o 0 dopo ogni divisione. Il primo resto è la cifra binaria meno significativa, l'ultimo resto è la cifra più significativa. Per esempio, si può trasformare il numero decimale 147 in forma binaria:

			resto
147/2	=	73	1
73/2	=	36	1
36/2	=	18	0
18/2	=	9	0
9/2	=	4	1
4/2	=	2	0
2/2	=	1	0
1/2	=	0	1

Quindi il numero 147 corrisponde alla forma binaria 10010011. Questo risultato può essere verificato ricordando che

1		0		0		1		0		0		1		1		
128	+	0	+	0	+	16	+	0	+	0	+	2	+	1	=	147

I numeri frazionari possono essere trasformati in forma binaria con successive moltiplicazioni per 2. Ogni volta che nel prodotto compare un 1 nella posizione delle unità, si trasferisce l'1 nella forma binaria e si continua con la parte decimale del prodotto. Per ogni moltiplicazione che dà luogo a un numero minore dell'unità, si trasferisce lo zero nella rappresentazione binaria e si continua. La prima cifra ottenuta è quella più significativa, l'ultima è la meno significativa.

Per esempio si converta 0,743 nella forma binaria:

					Binaria
0,743	×	2	=	1,486	1
0,486	×	2	=	0,972	0
0,972	×	2	=	1,944	1
0,944	×	2	=	1,888	1
0,888	×	2	=	1,776	1
0,776	×	2	=	1,552	1
0,552	×	2	=	1,104	1
0,104	×	2	=	0,208	0
0,208	×	2	=	0,416	0
0,416	×	2	=	0,832	0

Dopo dieci cifre, il risultato in forma binaria è: 0,1011111000.

La virgola avanti al numero binario è indicata come *virgola binaria.*

La trasformazione binario-decimale può essere effettuata utilizzando il numero binario come indicatore per la operazione. Si scriva un 1 sotto la cifra binaria più significativa, e lo si raddoppi, scrivendo un 2 sotto la seconda cifra. Se questa seconda cifra è un 1, si aggiunga un 1 al 2 e si raddoppi, scrivendo il 6 sotto la terza cifra. Se la seconda cifra è 0, si raddoppi il 2 scrivendo 4 sotto la terza cifra. Si continui aggiungendo un 1 o no e raddoppiando a seconda della cifra corrispondente; il numero decimale equivalente è l'ultimo numero scritto tenendo conto dell'ultima cifra significativa. Per esempio, per trasformare 10010011 in forma decimale,

Binario:	1	0	0	1	0	0	1	1		
Raddoppio:	1	2	4	8	18	36	72	146	=	147
				+1			+1	+1		

Un'altro metodo è quello di assegnare dei pesi binari alle posizioni delle cifre e poi sommare, ossia:

1	0	0	1	0	0	1	1		
128 +			16 +			2 +	1	=	147

Quest'ultimo metodo è comodo per la trasformazione di frazioni binarie. Per esempio,

$$0{,}10101 = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{32} \end{matrix} = 0{,}65625 \quad \text{decimale.}$$

Dividendo per 1010, ossia per l'equivalente binario del numero decimale 10, ogni quoziente successivo può essere trasformato in una cifra decimale del numero decimale equivalente. Per esempio:

```
10010011 | 1010
1010     |-----
-------- | 1110
 10000
  1010
  ----
   1101
   1010
   ----
    111 = 7

1110     | 1010
1010     |-----
-------- | 1
 100 = 4 |

   1 | 1010
     |-----
     | 1
```

Il risultato decimale è 147, e la cifra più significativa è quella ottenuta per ultima.

9-5. Logica grafica.

La logica matematica, o simbolica, è la scienza che impiega dei simboli per rappresentare delle dichiarazioni o asserzioni; dalla elaborazione algebrica di questi simboli la logica determina la verità o falsità delle conclusioni dedotte dalle dichiarazioni iniziali.

Un calcolatore numerico impiega questo tipo di logica matematica, ossia utilizza proposizioni logiche, per determinare le più adatte conclusioni (o risposte) che possono essere dedotte dalle dichiarazioni, o dai numeri, in ingresso.

La logica tratta delle relazioni tra classi di persone, di idee, di oggetti, di interruttori, ecc. I membri di una classe debbono avere almeno una caratteristica in comune. Utilizzando le lettere dell'alfabeto per indicare le classi e alcuni simboli matematici per stabilire le relazioni è possibile sviluppare un insieme di regole per un' *algebra* della *logica*.

Per esempio, possiamo iniziare considerando tutte le ragazze come una classe universale U; in due sottoclassi possiamo comprendere le ragazze bionde , A, e quelle con gli occhi blu, B. Le relazioni tra U, A e B sono riportate

nel diagramma di Venn di fig. 9-1. La classe generale di tutte le ragazze è rappresentata dai punti che si trovano nel quadrato U; le classi che si trovano dentro la classe universale sono indicate con cerchi interni al quadrato. La classe di ragazze bionde è indicata dal cerchio A, e quella delle ragazze con gli occhi blu dal cerchio B. Ovviamente vi saranno delle ragazze bionde con gli occhi blu, e queste sono rappresentate dai punti delle aree sovrapposte dei due cerchi.

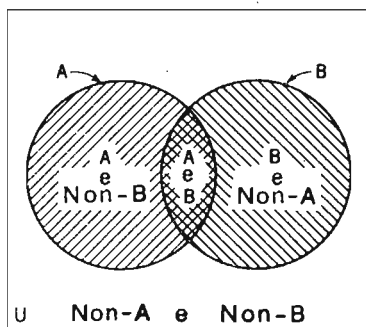



FIG. 9-1 — Diagramma di Venn impiegato per la logica grafica.

Si possono definire delle proposizioni che legano le due classi usando la congiunzione *e*, ossia:

1. *A e B*: *la classe di ragazze bionde che hanno gli occhi blu.* Questa è l'area di sovrapposizione dei due cerchi.
2. *A e non B*: *la classe di ragazze bionde che non hanno gli occhi blu.* Questa è l'area del cerchio A alla sinistra del cerchio B.
3. *Non-A e B*: *la classe delle ragazze non-bionde che hanno gli occhi blu.* Questa è l'area del cerchio B alla destra del cerchio A.
4. *Non-A e non-B*: *la classe delle ragazze non bionde e che non hanno gli occhi blu.* Questa è l'area esterna ai cerchi A e B.
5. *Non-*(*A e B*): *la classe di ragazze che non sono contemporaneamente bionde e con gli occhi blu.* Questa è l'area esterna all'area centrale « di sovrapposizione ».

Un analogo insieme di proposizioni può essere definito impiegando la congiunzione *o*.

Per le relazioni con *o*, bisogna decidere prima se ci si riferisce all'*o inclusivo* oppure all'*o esclusivo*, ossia

o Inclusivo = A o B oppure entrambi A e B
o Esclusivo = A o B ma non entrambi A e B

Nelle proposizioni che seguono è impiegato l'*o* inclusivo.

1. *A o B: la classe delle ragazze bionde o con gil occhi blu.*
2. *A o non-B: la classe delle ragazze bionde o di quelle che non hanno gli occhi blu.*
3. *Non-A o B: la classe delle ragazze non-bionde o di quelle che hanno gli occhi blu.*
4. *Non-A o non-B: la classe delle ragazze non-bionde o di quelle che non hanno gli occhi blu.*
5. *Non-(A o B): la classe di ragazze che non sono nè bionde nè con gli occhi blu.*

Si è divisa in tal modo una « popolazione » o una classe generale in raggruppamenti che definiscono completamente le singole classi. Il procedimento è stato sottolineato per l'importanza che avranno nel seguito le definizioni di *e*, *o*, *non.*

Le definizioni precedenti possono ora essere estese in proposizioni, del tipo « Se A *e* B sono veri allora C è la classe delle ragazze bionde con gli occhi blu ». E anche, « Se A *o* B è vero, allora C è la classe delle ragazze bionde e delle ragazze con gli occhi blu ». Nella logica delle proposizioni si assegnano due valori alle variabili vero o falso, normalmente indicati come 1 e 0.

È quindi possibile determinare le condizioni per cui C rimane vero ossia descrive un dato raggruppamento di ragazze.

Una *tabella della verità* è una posizione tabulare di tutte le condizioni del problema. Si consideri una tabella della verità per A *e* B, composta in questo modo:

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A *e* B = C

Uno zero sotto A o B indica l'assenza di quella particolare classe di ragazze; quindi solo se A e B sono presenti contemporaneamente, ossia solo se sono presenti le ragazze bionde e con gli occhi blu, è possibile che sia vero C, ossia che si abbia un 1.

Si consideri una tabella della verità per A *o* B, ossia

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A *o* B = C

Un analogo ragionamento mostra che se A è vero o B è vero o contemporaneamente A e B sono veri, si potrà avere una classe di ragazze bionde o di ragazze con gli occhi blu. Perciò C è vero per questi tre casi.

Per poter formare proposizioni di maggiore complessità e per rendere sistematici i metodi, bisognerà sviluppare ora i concetti della logica matematica, ossia *l'algebra Booleana.*

9-6. Logica matematica.

Le dichiarazioni logiche possono essere poste in forma matematica, e l'impiego del simbolismo matematico permette di semplificare il ragionamento deduttivo necessario per ottenere utili risultati dalle dichiarazioni logiche. Nel 1850, circa, George Boole sviluppò un'algebra della logica; questa algebra impiega i simboli AND, OR, NOT (*e*, *o*, *non*) nelle sue operazioni e permette solo due valori per le sue variabili: *vero* e *falso*, o 1 e 0. Sebbene quest'algebra impieghi numeri e simboli apparentemente matematici, essa va considerata come un'algebra di parole o di idee, non di numeri.

Si consideri la classe esaminata precedentemente « Le ragazze sono bionde e con gli occhi blu ». Nell'algebra Booleana questo viene scritto

$$\text{A AND B} = \text{A} \cdot \text{B} = \text{AB} \tag{9-4}$$

Un'altra posizione, « Le ragazze sono bionde o con gli occhi blu », viene scritta così:

$$\text{A OR B} = \text{A} + \text{B} \tag{9-5}$$

Un'altra classe ancora, individuata come « Le ragazze non sono bionde », viene scritta

$$\text{NOT} - \text{A} = \bar{\text{A}}$$

dove $\bar{\text{A}}$ (non-A) è il complemento di A.

Sebbene · e + abbiano altri significati nell'aritmetica ordinaria, qui quei significati vanno dimenticati e questi simboli logici vanno letti come AND e OR. Altri simboli impiegati nella letteratura per AND sono $\wedge$ e $\cap$ (chiamato « cappello ») e per OR sono V e U (chiamato « tazza »). NOT-A è qualche volta indicato come $\sim$ A.

Nel par. 9-5 sono state sviluppate alcune tabelle della verità che sono postulati dell'algebra Booleana, e cioè:

$$\begin{array}{lll} 0 \cdot 0 = 0 & \qquad & 0 + 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 & & 0 + 1 = 1 \\ 1 \cdot 0 = 0 & & 1 + 0 = 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 & & 1 + 1 = 1 \\ \quad \bar{1} = 0 & & \quad \bar{0} = 1 \end{array}$$

L'ultima dichiarazione discende dal fatto che quest'algebra è limitata a due soli simboli.

Due espressioni sono equivalenti se una espressione è sempre vera quando l'altra è vera ed è sempre falsa se l'altra è falsa. Due espressioni sono complementari quando la prima è sempre vera quando la seconda è falsa, e vice-

versa. Da questa posizione si può vedere che si ottiene il complemento di un'espressione cambiando ogni variabile nel suo complemento, ossia cambiando tutti i $\cdot$ in $+$, tutti i $+$ in $\cdot$, tutti gli 1 in 0, e tutti gli 0 in 1.

L'algebra Booleana ha un vantaggio notevole rispetto all'algebra ordinaria: è possibile verificare i teoremi per induzione completa, assegnando tutti i valori possibili, 0 e 1, alle variabili e verificando la validità del teorema. Consideriamo la proprietà di identità nel teorema

$$1 \cdot A = A$$

che è possibile riscrivere sostituendo ad A prima 0 e poi 1:

$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

La verifica quindi scaturisce dai postulati elementari dell'algebra Booleana. Un altro teorema è:

$$1 + A = 1 \qquad (9\text{-}8)$$

per il quale la verifica è:

$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

Queste condizioni soddisfano i postulati elementari e possono essere ricavate dal diagramma di Venn.

Per l'ultima posizione, il diagramma mostra che una classe *o* una classe è uguale a una classe.

Analogamente,

$$0 \cdot A = 0 \qquad (9\text{-}9)$$

dalla quale:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$

Il diagramma di Venn mostra che una classe senza membri non può coincidere con una classe con membri.

Le proprietà commutative, associative e distributive dell'algebra Booleana sono:

Commutativa:
$$A + B = B + A \qquad (9\text{-}10)$$
$$AB = BA$$

Associativa:
$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad (9\text{-}11)$$
$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

Distributiva:
$$AB + AC = A\,(B + C) \qquad (9\text{-}12)$$
$$(A + B)\,(A + C) = A + BC$$

Le proprietà commutativa ed associativa sono identiche a quelle dell'algebra ordinaria, mentre questo non è vero per la proprietà distributiva.

Verifichiamo che sia

$$(A + B)\,(A + C) = A + BC$$

assegnando tutti i possibili valori alle variabili e controllando l'equivalenza dei risultati. Questo viene fatto scrivendo in una tabella le variabili e i risultati ottenuti in base ai postulati:

A	B	C	A + B	A + C	BC	(A + B) (A + C)	= A + BC
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

La corrispondenza perfetta delle ultime due colonne è evidente, e il teorema risulta provato per ogni possibile valore e combinazione di valori delle variabili.

Nella tabella 18 sono riportati alcuni dei teoremi utili per la riduzione algebrica di espressioni logiche complesse. La verifica di questi e degli altri teoremi discende dai postulati elementari o dai metodi esemplificati precedentemente.

Stabiliti questi teoremi, si possono impiegare dei procedimenti algebrici per provare una gran quantità di relazioni. Per esempio il teorema 19 può essere verificato all'inverso sviluppando l'espressione ed impiegando i postulati.

Si ha infatti:

$$(A + B)(\bar{A} + \bar{B}) = A\bar{A} + \bar{A}B + A\bar{B} + B\bar{B} = \bar{A}B + A\bar{B} \qquad (9\text{-}13)$$

in base al teorema 8. Il teorema 21 si verifica allo stesso modo.

TABELLA 18 — Teoremi dell'algebra Booleana

1	$0 + A = A$	8	$A\bar{A} = 0$
2	$1 + A = 1$	9	$\bar{0} = 1$
3	$A + A = A$	10	$\bar{1} = 0$
4	$A + \bar{A} = 1$	11	$\bar{\bar{A}} = A$
5	$0 \cdot A = 0$	12	$A + AB = A$
6	$1 \cdot A = A$	13	$A + \bar{A}B = A + B$
7	$A \cdot A = A$	14	$A(A + B) = A$

15 $(A + \bar{B})B = AB$

16 $\overline{A + B} = \bar{A}\,\bar{B}$ } teoremi di De Morgan

17 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ }

18 $AB + A\bar{B} = A$

19 $A\bar{B} + \bar{A}B = (A + B)(\overline{AB}) = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$

20 $\overline{A\bar{B} + \bar{A}B} = AB + \bar{A}\,\bar{B}$

21 $AB + \bar{A}\,\bar{B} = (A + \bar{B})(\bar{A} + B)$

Per dimostrare il teorema 21 si può utilizzare un processo di riduzione più complicato:

$$\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{(A + B)(\overline{A} + \overline{B})} = \overline{(A + B)(\overline{AB})} = \tag{9-14}$$

$$= \overline{(A + B)} + AB =$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB \tag{9-15}$$

La prima riga discende dal teorema 19, la seconda impiega il secondo teorema di De Morgan (17) oltre al concetto di doppia negazione, e la terza riga discende dal primo teorema di De Morgan (16). Questo teorema viene spesso impiegato nello studio dei circuiti sommatori.

9-7. Circuiti logici.

Vi è una stretta analogia tra la logica di proposizioni come: « Se A *e* B sono veri, C è vero » e la connessione di interruttori elettronici per i quali si può dire « Se l'interruttore A *e* l'interruttore B sono chiusi, vi è una connessione elettrica tra i terminali 1 e 2. » Questa relazione esiste perchè una espressione Booleana è una funzione di variabili che ammettono due stati, e la condizione di un circuito elettrico formato da interruttori è una funzione dei suoi interruttori a due stati. I circuiti elettrici che effettuano le operazioni AND, OR, NOT, sono detti *circuiti logici* e le condizioni per cui si ha uscita (vero) da un circuito logico possono essere espresse da una relazione Booleana, in quanto ogni interruttore del circuito logico corrisponde ad una variabile Booleana.

Se una posizione matematica esatta viene semplificata con operazioni matematiche rigorose, il risultato deve ancora essere esatto, analogamente si può asserire che se una espressione logica Booleana esatta viene semplificata con operazioni rigorose nel campo dell'algebra Booleana, la proposizione logica che ne risulta deve essere esatta.

Si possono così utilizzare i postulati e i teoremi dell'algebra Booleana per semplificare le reti logiche ad interruttori.

Consideriamo questa proposizione:: « Se (l'interrutore A *e* l'interruttore B) *o* l'interruttore C sono chiusi, vi è connessione tra i terminali 1 e 2.» Si può provare questa proposizione riferendosi alla fig. 9-2*a*. Se l'interrutore A *e* l'interruttore B sono chiusi, vi è un collegamento tra 1 e 2. Se A è chiuso e B è aperto, o se B è chiuso ed A aperto o se sia A che B sono aperti, il circuito è aperto. Se si assegna il simbolo 1 ad un interruttore chiuso e quello 0 ad un interruttore aperto, si può costruire una tabella della verità per la connessione AND, come in figura. Ovviamente, questa tabella è la stessa di quella valida per la logica AND del par. 9-5.

Nella fig. 9-2*b*, se A *o* B sono chiusi, vi è una connessione tra 1 e 2. Se

A è chiuso o B aperto o B chiuso e A aperto vi è connessione tra i terminali del circuito, e si ottiene la tabella della verità della funzione OR. Anche questa corrisponde alla tabella della verità sviluppata per la logica OR.

Combinando queste due idee, la funzione degli interruttori di fig. 9-2*c* può essere espressa da: « Se (A *e* B) *o* C sono chiusi, esiste un collegamento tra i terminali 1 e 2 ».

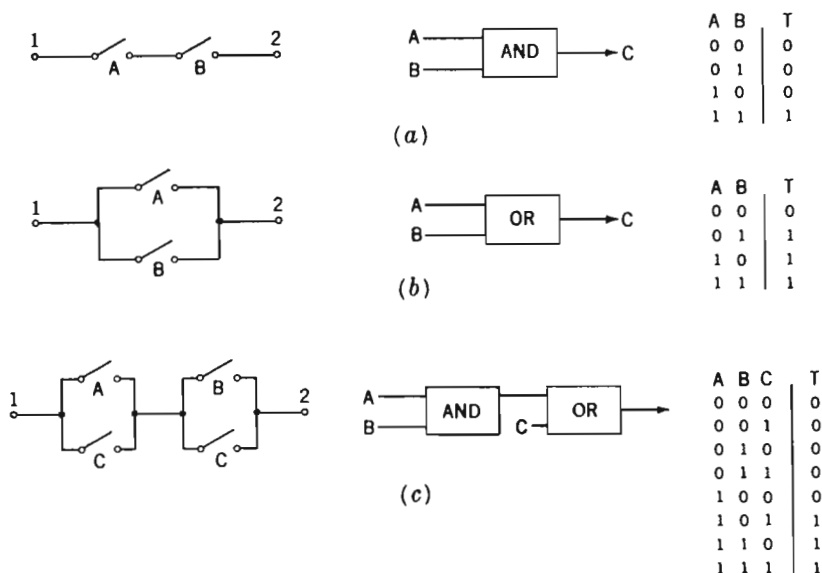



FIG. 9-2 — Interruttori AND, OR con le rispettive tabelle della verità.

Per evidenziare il significato fisico dei ragionamenti fatti per semplificare delle posizioni logiche complesse, si considerino alcuni dei teoremi fondamentali Booleani e la loro interpretazione in termini di circuiti di interruttori:

$$A + A = A \qquad AA = A \tag{9-16}$$

Interruttori identici in serie o in parallelo possono essere sostituiti con un solo interruttore.

$$A \cdot 0 = 0 \qquad A \cdot 1 = A$$
$$A + 0 = A \qquad A + 1 = 1 \tag{9-17}$$

Un interruttore in serie con un circuito aperto è un circuito aperto; un interruttore in parallelo con un circuito chiuso è un circuito chiuso.

$$A\bar{A} = 0 \qquad A + \bar{A} = 1 \tag{9-18}$$

Un interruttore e il suo opposto in serie costituiscono un circuito aperto; un interruttore e il suo opposto in parallelo formano un circuito chiuso.

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B} \qquad (9\text{-}19)$$
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

I teoremi di De Morgan mostrano che l'inverso di interruttori in parallelo è un circuito serie dei loro opposti e l'opposto di una connessione serie è un circuito parallelo degli opposti dei singoli interruttori.

In fig. 9-3 sono riportati altri blocchi logici, che esplicano tre nuove funzioni logiche: NOT, NOR e NAND. Il circuito NOT ha un solo ingresso e una sola uscita e serve a *negare* o *inibire* la funzione d'ingresso; ad esempio un circuito NOT-A è aperto quando A è chiuso. Questa operazione viene anche detta *inversione.*

A	C
0	1
1	0

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

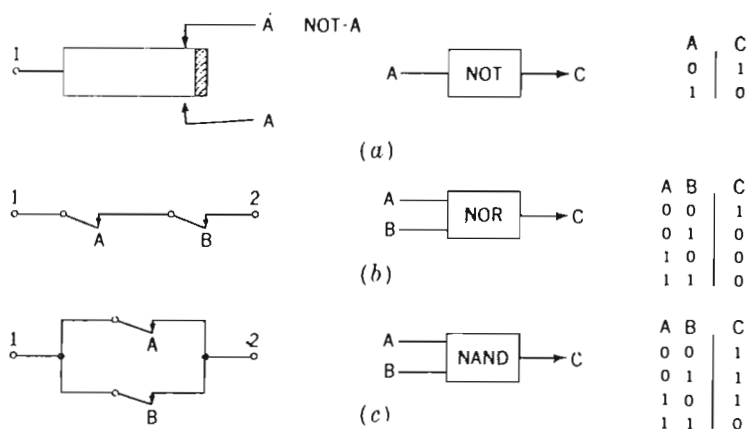



FIG. 9-3 — Funzioni logiche NOT - NOR - NAND.

Il circuito NOR ha una tabella della verità che è invertita rispetto a quella della funzione OR e viene realizzato fisicamente come una AND invertita. Se nè A nè B sono presenti, il circuito è chiuso; se A e B sono presenti il circuito è aperto.

Il circuito AND-negativo, o NAND, funziona analogamente a quello AND. Se A o B non sono presenti, il circuito è chiuso, se entrambi A e B sono presenti il circuito è aperto.

Si è così introdotto il concetto dei circuiti *duali* di commutazione, formati scambiando 0 con 1, + con · e viceversa.

Consideriamo queste coppie di equazioni duali:

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1 \qquad 0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1$$

o queste due posizioni:
1. Un interruttore *aperto* in *serie* con un interruttore *aperto* è un interruttore *aperto*.
2. Un interruttore *chiuso* in *parallelo* ad un interruttore *chiuso* è un interruttore *chiuso*.

Da queste discende che il duale di un circuito serie è un circuito parallelo formato dagli stessi interruttori, e il duale di un circuito parallelo è un circuito serie.

9-8. Semplificazione dei circuiti logici.

I teoremi precedenti possono essere impiegati per elaborare delle espressioni Booleane in modo da eliminare gli interruttori in sovrappiù e ridurre il numero e la complessità delle operazioni logiche o di commutazione. Per esempio si consideri la rete logica di fig. 9-4. L'uscita C può essere posta 1 per una combinazione di A *e non*-B, *o non*-A *e* B, *o* A *e* B. Cioè:

$$C = A\bar{B} + \bar{A}B + AB \tag{9-20}$$

Si può applicare la legge distributiva eq. (9-12) agli ultimi due termini

$$\bar{A}B + AB = (A + \bar{A})\,B$$

e quindi

$$C = A\bar{B} + (A + \bar{A})\,B \tag{9-21}$$

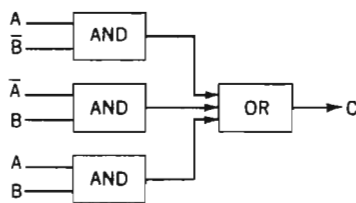



FIG. 9-4 — Circuito logico complesso.

Tuttavia, $A + \bar{A} = 1$ e $B \cdot 1 = B$, in base alla tabella 18, per cui dal teorema 13,

$$C = A\bar{B} + B \tag{9-22}$$

$$C = A + B \tag{9-23}$$

e il circuito complesso di fig. 9-4 è riducibile a un circuito OR formato dal parallelo di due interruttori.

Si possono sviluppare dei metodi generali per progettare i circuiti logici assegnando tutti i possibili valori alle variabili e scegliendo quindi quelle combinazioni che soddisfano alle specifiche del problema. Per esempio. si supponga di avere un problema che involve tre variabili A, B, C. I valori possono essere assegnati alle variabili in questo modo:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

dove F = 1 per le combinazioni indicate dalle condizioni del problema.

Si può quindi scrivere:

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}C + ABC$$

Si può semplificare la relazione in questo modo:

$$\begin{aligned} F &= \overline{A}\,\overline{B}\,C + AC\,(\overline{B} + B) \\ &= C\,(\overline{A}\,\overline{B} + A) \\ &= C\,(A + \overline{B}) = C \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio deriva dal teorema 13. Si è così progettato un circuito a tre interruttori.

Si possono avere altre connessioni in base ad altre specifiche, ponendo F vero per altre combinazioni di interruttori. Questo metodo permette di effettuare il progetto dei circuiti logici direttamente dalla tabella della verità, tecnica questa che verrà impiegata molto spesso.

Si può esemplificare ulteriormente questo metodo di progetto diretto dei circuiti logici considerando un semplice sistema di riscaldamento per un impianto di acqua calda. Il contenitore d'acqua è riscaldato da due resistenze; una resistenza viene inserita quando la temperatura dell'acqua è sotto un minimo prestabilito, e la seconda è inserita quando vi è efflusso d'acqua dal contenitore. Inoltre entrambe le resistenze vengono disinserite quando la temperatura dell'acqua supera un determinato valore. Se T è l'interruttore comandato dal valore minimo di temperatura, F l'interruttore di flusso e L il limitatore di temperatura massima, le due resistenze H_T e H_F saranno inserite (= 1) in accordo con la tabella seguente:

T	F	L	H_T	H_F
0	0	0	1	0
0	0	1	Impossibile	
0	1	0	1	1
0	1	1	Impossibile	
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Le situazioni impossibili si hanno quando T non è inserito ed L indica che il recipiente è sopra il limite di temperatura massimo.

Trascurando queste combinazioni, si vede che $H_T = 1$ quando

$$H_T = \overline{T}\,\overline{F}\,\overline{L} + \overline{T}F\overline{L} \tag{9-26}$$

Questo può scriversi:

$$H_T = \overline{T}\,\overline{L}\,(\overline{F} + F) = \overline{T}\,\overline{L} \tag{9-27}$$

La seconda resistenza sarà inserita, ossia $H_F = 1$, se:

$$\begin{aligned} H_F &= \overline{T}F\overline{L} + TF\overline{L} \\ &= F\overline{L}\,(\overline{T} + T) = F\overline{L} \end{aligned} \tag{9-28}$$

In fig. 9-5 è riportato il circuito risultante; il suo funzionamento può essere facilmente verificato.

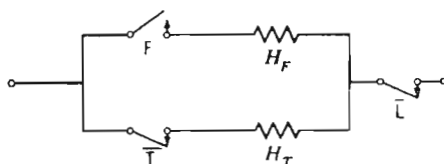



FIG. 9-5 — Controllo di un sistema di riscaldamento per l'acqua.

Per le combinazioni impossibili indicate precedentemente si possono fare le seguenti considerazioni. Esse possono essere rigorosamente impossibili, o possono essere delle situazioni « non interessanti » in cui non interessa se si abbia o no una uscita. Qualche volta si ha che il considerare i termini « non interessanti » può portare ad ulteriori semplificazioni, ma questo può essere stabilito solo verificando la soluzione semplificata con e senza i termini « non interessanti ».

Il metodo generale per trattare i circuiti logici è quello di porre i termini veri sotto forma di prodotti. Di solito per la semplificazione viene impiegato il teorema:

$$A\,(B + \overline{B}) = A$$

in cui A rappresenta una o più variabili..

Tutte le possibili coppie di termini vengono esaminate e quando il teorema precedente può essere applicato, i due termini si riducono ad un sol termine che ha una variabile in meno. Poi tutti i termini vengono di nuovo esaminati per effettuare ulteriori semplificazioni dello stesso tipo e per possibili appli-

cazioni di altri teoremi. Il risultato è una forma semplificata che soddisfa le specifiche date. Si possono anche sviluppare, in alcuni casi, delle tecniche per minimizzare il numero degli interruttori o il costo.

9-9. Il circuito OR-esclusivo.

Il circuito *OR-esclusivo* viene introdotto qui per illustrare ulteriormente il progetto di un circuito logico.

Il circuito OR è stato definito in una forma inclusiva, e il suo funzionamento include anche il caso AND.

La versione OR-esclusivo, invece, fornisce un'uscita solo se i due ingressi non si presentano contemporaneamente, ossia la condizione A AND B non fornisce un'uscita.

La tabella della verità per questa funzione è:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

da cui segue:

$$F = \bar{A}B + A\bar{B} \tag{9-29}$$

Questa relazione può essere modificata nel modo seguente:

$$F = (A + B)\,(\overline{AB}) \tag{9-30}$$

come posizione per il circuito *OR-esclusivo*. Il circuito è realizzato in fig. 9-6 con un circuito AND, un NOT, in parallelo a un OR, seguiti da un AND.

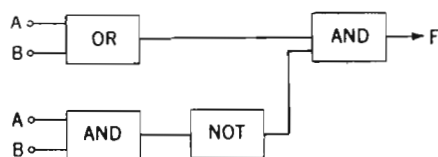



FIG. 9-6 — Diagramma a blocchi della funzione OR-esclusivo.

Alcune apparecchiature elettroniche sono volutamente progettate in maniera ridondante, ossia in modo da effettuare delle operazioni identiche in parallelo, per garantirsi da eventuali cattivi funzionamenti, in modo che se una delle apparecchiature va in avaria, la seconda possa ancora fornire il

risultato voluto. In questi casi è necessario poter sapere se uno dei circuiti non sta funzionando, e questa è una decisione OR, ma del tipo esclusivo. Perciò nei circuiti ridondanti, un circuito OR-esclusivo di controllo darà un'uscita solo se vi è un cattivo funzionamento nella via A o B, e non darà uscita se entrambe le vie funzionano.

9-10. Realizzazione circuitale delle funzioni logiche.

I circuiti dei calcolatori numerici funzionano fondamentalmente come interruttori ad alta velocità, connessi tra loro in accordo con le relative tabelle della verità. Sebbene nei paragrafi precedenti siano state esaminate cinque funzioni logiche, solo le funzioni AND, OR, NOT sono effettivamente fondamentali, mentre le funzioni logiche NOR e NAND sono funzioni derivate.

Il circuito AND può essere indicato come *porta a coincidenza* perchè si può supporre che un segnale apra la porta ad un secondo segnale simultaneamente presente. Per realizzare questa funzione viene impiegata una gran varietà di circuiti pratici, a seconda che si voglia ottenere elevata velocità di commutazione, riduzione del numero di componenti, sicurezza di funzionamento. Qui saranno esaminati solo alcuni di questi circuiti.

I diodi sono degli interruttori semplici e di piccole dimensioni, e i circuiti logici più semplici vengono realizzati a diodi. In fig. 9-7*a* è riportato un circuito AND a tre ingressi.

Normalmente i diodi sono polarizzati direttamente e sono in conduzione, per cui il terminale di uscita è praticamente a potenziale zero.

Se ad A viene applicato un impulso positivo maggiore di 20 volt, questo diodo diventa inversamente polarizzato e non conduce più. Il potenziale di uscita non varia apprezzabilmente perchè la corrente degli altri due diodi produce una caduta di 20 volt su R. Solo se tutti e tre i diodi vengono portati al potenziale positivo simultaneamente, la corrente in R si annulla, e il potenziale in uscita sale al valore positivo di 20 volt.

In fig. 9-7*b* è riportato un circuito OR a diodi a tre ingressi. Un ingresso positivo su uno o più dei tre diodi dà un'uscita positiva ai capi di R; se i diodi vengono invertiti, si crea un circuito a *logica negativa* che risponde ad impulsi di ingresso negativi.

In fig. 9-7*c*, si è combinato un circuito logico AND a diodi con un invertitore a transistore come esempio di circuito logico a diodi e transistori (DTL). Il funzionamento del circuito AND è identico a quello di fig. 9-7*a* ma con una inversione e amplificazione in più fornite dall'amplificatore ad emettitore comune.

In fig. 9-7d è riportato un esempio di circuito logico a resistenze-capa-

cità-transistori (RCTL), nel quale un impulso positivo in uno o entrambi gli ingressi annulla la polarizzazione negativa attraverso R e porta in conduzione il transistore. Quest'ultimo effettua un'inversione, e il circuito è quindi un NOR.

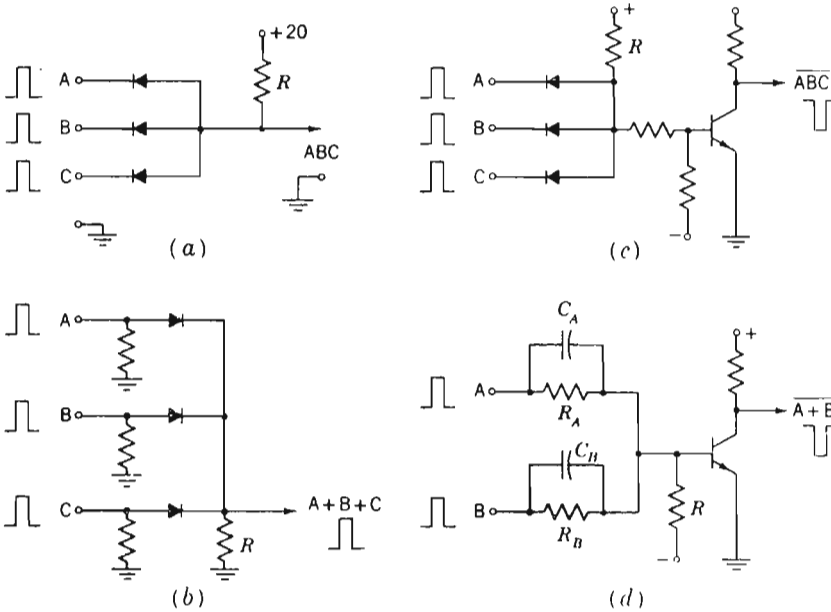



FIG. 9-7 — *a*) Circuito AND con logica a diodi (DL). *b*) Circuito OR DL. *c*) Circuito AND negativo con logica a diodi e transistori (DTL). *d*) Circuito OR negativo, con logica a resistenze-capacità-transistori (RCTL).

Il principale svantaggio di questo circuito NOR, e di altri circuiti logici a transistori, è la durata dei tempi di commutazione. Nella commutazione dall'interdizione alla saturazione, la tensione di base deve variare dal valore che ha in interdizione a quello di saturazione; si deve quindi caricare la capacità base-emettitore e quella di collettore; inoltre poichè il transistore va in saturazione, vi è l'accumulo di cariche nella base. Se in ingresso è presente più di un segnale, il transistore viene portato in forte saturazione e ne risulta un lungo ritardo dovuto all'accumulo delle cariche. Per migliorare la risposta si possono connettere le capacità C_A e C_B in parallelo alle resistenze di ingresso R_A e R_B. Quando il transistore viene portato in conduzione queste capacità forniscono le cariche richieste per caricare le capacità parassite più rapidamente di quanto avvenga attraverso le resistenze R_A e R_B. Anche nella commutazione verso l'interdizione queste capacità favoriscono l'eliminazione delle cariche immagazzinate. Nel progettare il circuito, le costanti di

tempo R_A C_A e R_B C_B debbono essere rese uguali a quella del circuito di base del transistore. Se è possibile, per accelerare la commutazione è da preferirsi l'impiego di transistori con elevati valori $f\alpha$.

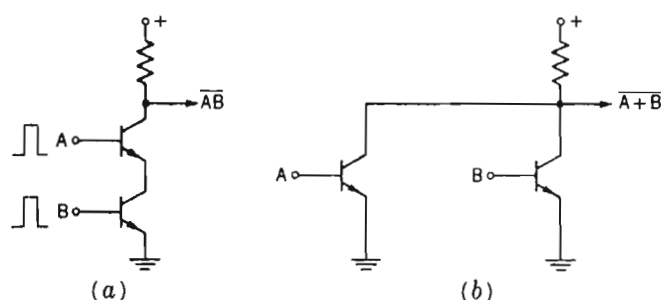



FIG. 9-8 — Circuiti DCTL: *a*) AND, *b*) OR.

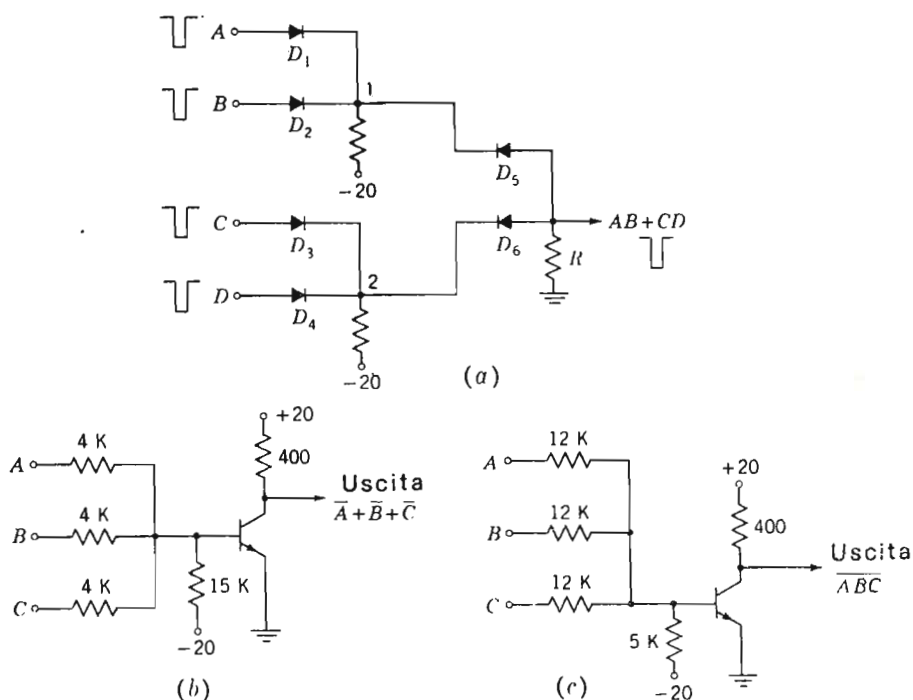



FIG. 9-9 — *a*) Logica a diodi per le funzioni AND e OR. *b*) Circuito NOR. *c*) Circuito NAND.

Si possono impiegare più transistori per ridurre il ritardo dovuto allo accumulo delle cariche, ma a spese di maggiore costo e complessità del cir-

cuito; in fig. 9-8 sono riportati dei circuiti AND e OR realizzati con transistori ad accoppiamento diretto (DCTL).

Nella logica a diodi (DL) la mancanza di inversioni semplifica i problemi di progetto. In fig. 9-9 è riportata una combinazione di circuito AND e OR. Il punto 1 si porta a —20 volt quando sia A che B ricevono dei segnali negativi e i diodi corrispondenti sono interdetti. Allora il diodo D_5 condurrà, e l'uscita sarà di circa —20 volt. Se si crea una analoga situazione in C e D si ottiene un'uscita analoga, e si ha così la funzione OR.

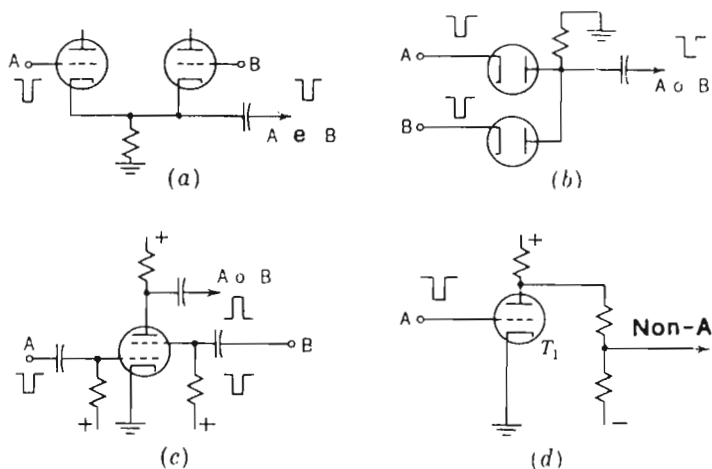



FIG. 9-10 — *a*) Circuito AND. *b*), *c*) Circuito OR. *d*) Circuito NOT.

In fig. 9-10 si riportano dei circuiti con triodi; il loro funzionamento è evidente se si suppongono in ingresso degli impulsi negativi. Nella fig. 9-10*a*, i triodi sono in saturazione e debbono essere entrambi interdetti per portare la tensione d'uscita a zero.

9-11. Progetto di un circuito NOR.

Un modo semplice e ampiamente impiegato per realizzare un circuito NOR è quello di combinare insieme una logica a resistenze con un circuito per l'inversione, come in fig. 9-11. Per il progetto del circuito occorre determinare I_K, I_B e I_T, che sono rispettivamente:

I_K = minima corrente di ingresso per portare in conduzione il transistore.

I_B = minima corrente di base per la saturazione.

I_T = corrente di polarizzazione per interdire il transistore.

Dalle specifiche del transistore si possono ottenere I_{COm}, il valore di I_{CO} alla massima temperatura ammissibile di funzionamento, E_{BE}, E_{CE}, h_{FE}, I_B alla saturazione e E_{CE} alla saturazione.

Il valore della corrente di uscita deve essere sufficiente a portare in conduzione il transistore successivo. La corrente I_K per *n* rami di uscita può essere determinata come:

$$I_K = \frac{E_{CC} - E_{BE} - I_{COm}R_L}{R_K + nR_L} \qquad (9\text{-}31)$$

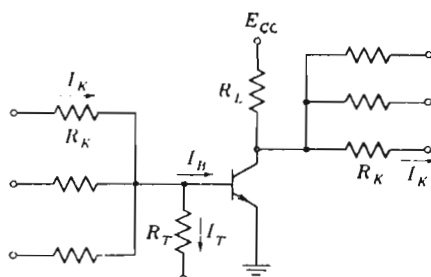



Fig. 9-11 — Circuito NOR; I_B = corrente di base per la saturazione, I_T = corrente di polarizzazione per l'interdizione.

ponendo un valore arbitrario per R_K; questo valore può essere variato se I_K non è sufficiente a dar luogo alla corrente di saturazione I_B data dalla seconda equazione del progetto:

$$I_B = I_K - I_{COm} - \frac{E_{CE,sat} - E_{BE}}{R_K/m} \qquad (9\text{-}32)$$

dove *m* è il numero dei rami di ingresso e *n* il numero di rami di uscita; i problemi relativi a questi rami saranno meglio esaminati nel par. 9-15.

Rimane da calcolare la corrente necessaria per polarizzare il transistore all'interdizione; detta E_{EB} la polarizzazione inversa necessaria per portare I_C a I_{CO}, polarizzazione che sarà di segno negativo, si ha:

$$I_T = I_{COm} + \frac{E_{CE,\,sat} - E_{EB}}{R_K/m} \qquad (9\text{-}33)$$

Il valore di I_B calcolato con l'eq. (9-32) è sufficiente a portare in saturazione il transistore, ma il tempo di salita in risposta al segnale di ingresso può essere migliorato impiegando una corrente di pilotaggio più grande, per esempio un valore doppio del valore I_B calcolato.

9-12. Matrici di commutazione a diodi.

Si rende spesso necessario nei circuiti dei calcolatori il dover alimentare una particolare linea di uscita in funzione di un determinato ingresso logico, o dopo un determinato numero di impulsi di ingresso. Questo caso si presenta ad esempio nella trasformazione di numeri binari in decimali, come si è già visto per il circuito di fig. 8-74.

Si può impiegare un circuito AND per leggere una particolare condizione di un insieme di circuiti bistabili, come in fig. 9-12. In questo circuito vi sarà una caduta di tensione su R finchè uno o più diodi rimarranno in conduzione e la tensione di uscita sarà quindi trascurabile. Se il transistore del bistabile, cui è connesso il diodo, è in conduzione, la sua tensione di collettore sarà bassa per la caduta su R_1 e il diodo sarà polarizzato direttamente e in conduzione. Quando il transistore va in interdizione, la tensione di collettore passa a + 20 volt e il diodo viene polarizzato inversamente.

	0	1	2	3	4	5	6
T_1	0	1	0	1	0	1	0
T_2	1	0	1	0	1	0	1
T_3	0	0	1	1	0	0	1
T_4	1	1	0	0	1	1	0
T_5	0	0	0	0	1	1	1
T_6	1	1	1	1	0	0	0

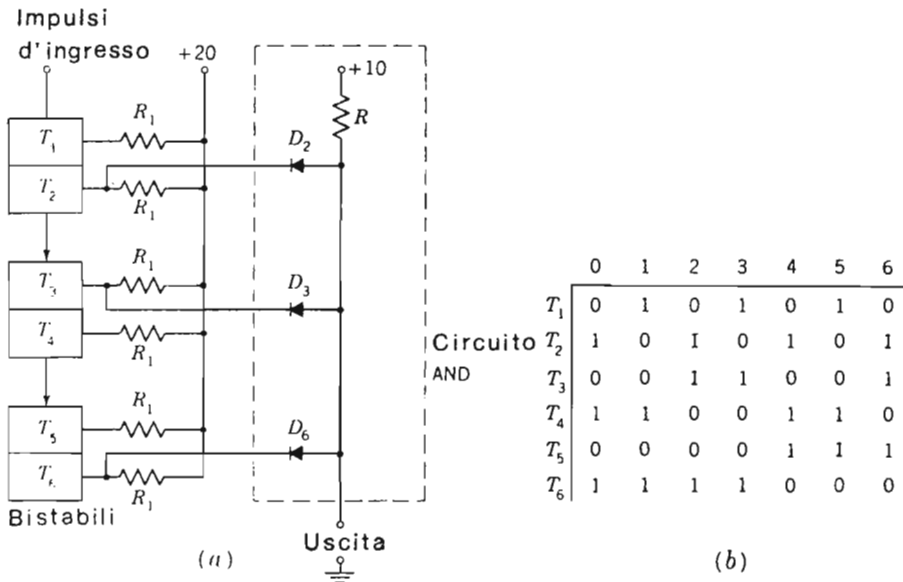



FIG. 9-12 — *a*) Circuito AND per le uscite di un contatore. *b*) Tabella della verità per i multivibratori.

Perchè compaia una tensione ai terminali di uscita tutti e tre i diodi debbono essere interdetti, ossia i transistori T_2, T_3 e T_6 debbono essere in interdizione, o nello stato 0, come si può vedere dalla tabella della verità di fig. 9-12*b*. Se i bistabili vengono utilizzati per un conteggio di impulsi, il cir-

cuito nel suo complesso darà un'uscita in corrispondenza del numero binario 101, ossia del numero decimale 5.

Quest'uscita può essere utilizzata come segnale per iniziare o terminare un'operazione dopo cinque impulsi, o può essere connessa a un circuito AND a due ingressi insieme all'uscita di un circuito analogo al primo; in questo modo il secondo circuito AND paragona i conteggi dei due contatori e dà un segnale quando i due conteggi sono uguali.

Si possono aggiungere altri bistabili e altri circuiti AND per aumentare le possibilità di questo circuito logico.

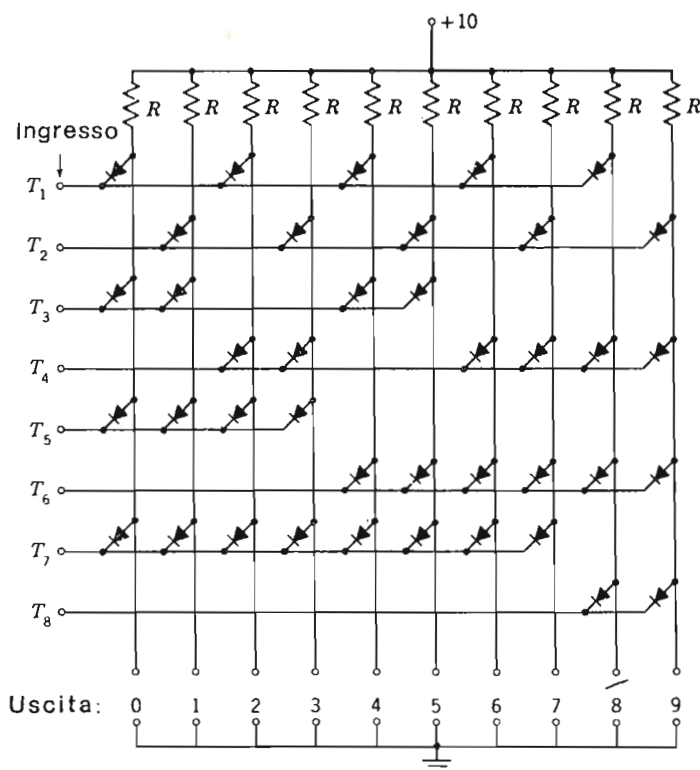



FIG. 9-13 — Matrice di conversione binaria-decimale per il circuito di fig. 8-74.

Si può realizzare quindi una completa *matrice di commutazione*, come in fig. 9-13, per effettuare la trasformazione binario-decimale del conteggio effettuato dal circuito di fig. 8-74. Si avrà così una tensione a ciascuna uscita decimale corrispondente al numero binario in ingresso.

I diodi vanno scelti con alta resistenza inversa, perchè nella condizione di interdizione vi sono molti diodi in parallelo; è anche necessaria una bassa resistenza in diretta.

9-13. Registri; funzionamento in serie e in parallelo.

Per effettuare le varie operazioni aritmetiche o logiche, di solito tutti i bit di un numero vengono introdotti simultaneamente in un calcolatore numerico; questo tipo di operazione viene detta in *parallelo.* In dispositivi più lenti, invece, i bit possono essere introdotti in serie, ossia uno alla volta, iniziando o dal più significativo o dal meno significativo; questo è il funzionamento in *serie.* Il funzionamento in parallelo è di solito più veloce di quello in serie, ma i calcolatori che funzionano in parallelo richiedono maggiore spesa per le apparecchiature. La decisione di quale tipo adottare dipende da un compromesso tra la velocità e il costo.

In ogni caso, il primo passo in una operazione aritmetica è quello di porre i bit in un *registro di immagazzinamento*, che ha una capacità di più bit. Si utilizzano così due registri per gli addendi in una operazione di addizione. Di solito vengono impiegati degli stadi a bistabili, come ad esempio per il numero binario a cinque cifre di fig. 9-14. Per poter immagazzinare numeri contenenti più cifre binarie occorre solo aggiungere un maggior numero di elementi.

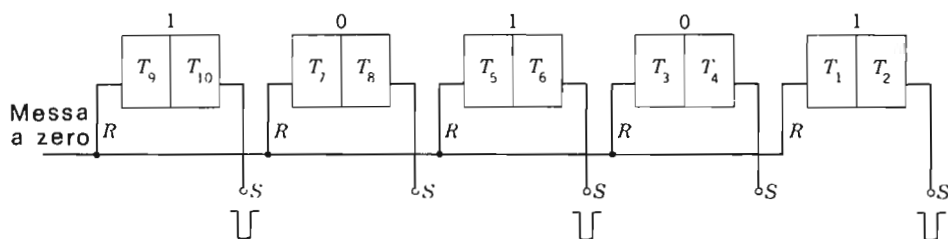



Fig. 9-14

Questi bistabili hanno dei terminali di messa a zero R (*reset*) e di messa in azione S (*set*) pilotati da appropriati circuiti a tubi o transistori, come ad esempio il tubo di messa a zero T_3 di fig. 9-15. Un impulso di polarità opportuna applicato al terminale di messa a zero annulla l'informazione, ossia riporta tutti i bistabili nella condizione 0, di solito con gli elementi a indice pari di fig. 9-14 in conduzione. Un impulso inviato ad uno qualsiasi dei terminali di messa in funzione dei bistabili lo fa commutare nella posizione 1, con lo stadio a indice dispari in conduzione. Nel circuito in figura è stato

registrato il numero binario 10101, e il registro è pronto per l'ulteriore impiego dei dati in esso immagazzinati.

Per effettuare la moltiplicazione e la divisione, o per permettere un ingresso o un'uscita in serie, è necessario poter spostare di posizione i vari bit, un posto per volta, e sia a sinistra che a destra. In fig. 9-16 sono indicate le condizioni di un *registro a spostamento* in tre istanti di tempo successivi. Ogni impulso che si presenta al terminale di comando provoca uno spostamento di un posto verso sinistra, nel registro.

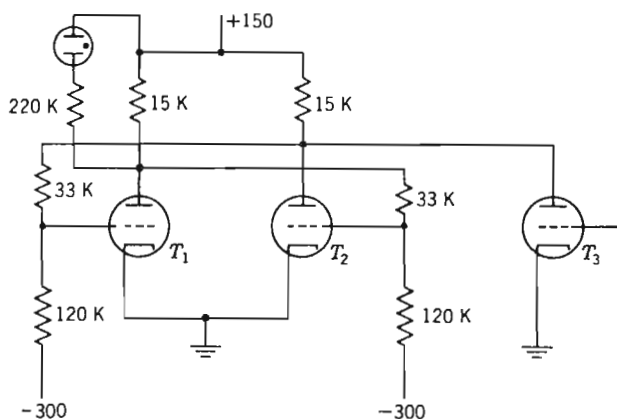



FIG. 9-15 — Circuito per riportare i multivibratori nella loro condizione iniziale.

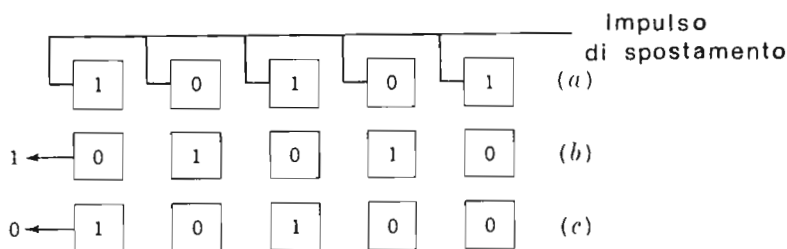



FIG. 9-16 — Funzionamento di un registro a spostamento (spostamento a sinistra).

Ad ogni spostamento viene estratto un bit dalla sinistra del registro; quindi un numero registrato in parallelo può essere portato fuori dalla sinistra, un bit alla volta, ossia viene trasferito dalla forma parallelo a quella serie. Il registro viene messo a zero quando tutti i bit sono stati portati fuori.

Anche il registro a spostamento è formato da bistabili ed è accoppiato con circuiti di ritardo a capacità, come in fig. 9-17. Per provocare lo sposta-

stamento di un bit verso sinistra bisogna applicare un impulso negativo di spostamento alla base di ogni transistore posto a sinistra nei bistabili. Se questo stadio era in conduzione, ossia nel suo stato 1, esso viene commutato nello stato 0. L'impulso provocato dalla diminuzione della tensione di collettore della metà di destra viene trasferito alla base della parte destra del precedente bistabile; questo stadio va in interdizione, forzando la parte sinistra in conduzione, ossia nello stato 1.

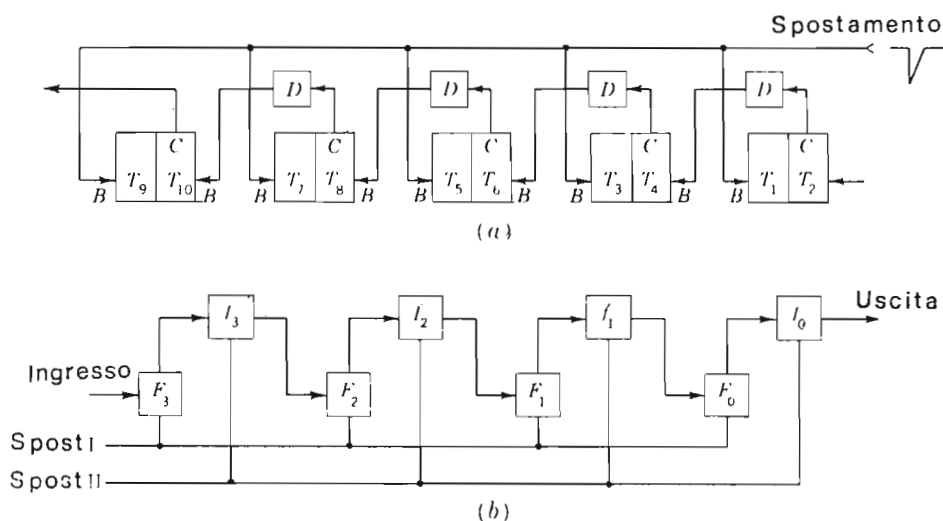



FIG. 9-17 — Registro a spostamento con multivibratori.

Quindi l'1 che era precedentemente in uno stadio viene trasferito di una posizione verso sinistra. Se nello stadio vi era inizialmente uno 0, questo non provoca nessuna commutazione; lo stadio precedente sarà portato a 0 dall'impulso di spostamento, e così lo 0 sarà stato spostato verso sinistra.

Gli impulsi inviati da uno stadio a quello adiacente vanno ritardati di un tempo pari circa metà dell'intervallo tra gli impulsi di spostamento tramite il circuito di ritardo D, in modo che l'impulso interstadio arrivi dopo che l'impulso di spostamento ha completato la sua funzione. Se non si fosse introdotto questo ritardo, l'impulso interstadio potrebbe porre lo stadio successivo nella condizione 1 nello stesso momento in cui l'impulso di spostamento lo pone nella condizione 0.

In fig. 9-17*b* è riportato uno schema di principio che evita i circuiti di ritardo degli impulsi, ma che richiede un maggior numero di componenti. I bistabili $F_0 \ldots F_3$ formano il registro effettivo, mentre $f_0 \ldots f_3$ sono degli ulteriori bistabili che consentono un immagazzinamento intermedio; gli

elementi $f_0 \ldots . f_3$ sono portati nella posizione 0 dopo che le cifre del numero sono introdotte nel registro principale. Per effettuare lo spostamento a destra di un posto si introduce nella linea I un impulso di spostamento a destra e le condizioni degli elementi F vengono trasferite agli elementi f, mentre gli F vengono posti a 0. Un secondo impulso sulla linea II riporta a zero i bistabili f e così il numero viene riportato negli elementi $F_0 \ldots . F_3$ ma spostato di una posizione verso destra.

Si può facilmente progettare un registro in modo che possa effettuare spostamenti sia verso sinistra che verso destra. Si noti che lo spostamento di un numero binario verso sinistra, con la cifra meno significativa a destra, equivale a moltiplicare questo numero per 2, mentre lo spostamento verso destra equivale a dividerlo per 2. Si comprende così l'importanza che ha il registro a spostamento nel processo di moltiplicazione.

9-14. Il sommatore parziale.

I circuiti effettivi dei calcolatori sono altamente specializzati e il loro studio andrebbe oltre gli scopi di questo libro, tuttavia può essere interessante indicare in via generale quale è il modo di progettare questi circuiti, e per questo scopo un esempio adatto può essere l'operazione di addizione data la vastità delle sue applicazioni.

Per effettuare l'addizione dei bit immagazzinati in due registri occorre studiare le operazioni logiche ad essa necessarie; si deve ottenere cioè la somma S dei due bit e un riporto C da inviare alla posizione successiva di ordine superiore quando se ne verifica il caso. Si può scrivere una tabella della verità per l'addizione di due cifre:

A	B	S_1	C_1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Si può scrivere quindi un'espressione Booleana per le funzioni del circuito:

$$S_1 = \overline{A}B + A\overline{B} \tag{9-34}$$

$$C_1 = AB \tag{9-35}$$

Semplificando l'eq. (9-34) si ha:

$$S_1 = (A + B)(\overline{A} + \overline{B}) = (A + B)(\overline{AB}) \tag{9-36}$$

Questa operazione può essere letta come S_1 uguale a (A OR B) e NOT (A AND B), che è la posizione per la funzione OR-esclusivo.

In fig. 9-18 è riportato un diagramma a blocchi delle unità necessarie per effettuare l'operazione logica indicata: un'uscita A OR B è combinata con un segnale NOT (A AND B) per fornire la somma S_1. Se $A = 1$ e $B = 1$ il circuito AND in basso fornisce un impulso all'uscita C_1, mentre il circuito NOT provvede un'uscita negata al circuito AND superiore per inibire l'uscita del circuito OR derivata dalla condizione A AND B. Così viene trasmesso uno 0 a S_1 come doveva essere. Questo circuito quindi somma due bit dei registri e fornisce l'adatto segnale di riporto nel caso $A = 1$ e $B = 1$, ma non può tener conto di un riporto che venga dalla posizione precedente di ordine inferiore; per questo il circuito di fig. 9-18 è detto *sommatore parziale* (half -adder).

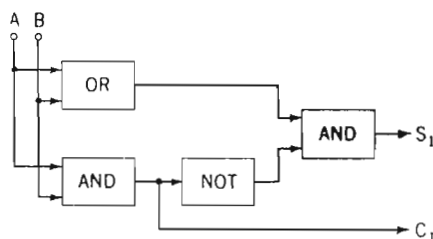



FIG. 9-18 — Schema logico di un sommatore parziale.

9-15. Il circuito sommatore completo.

La realizzazione di un *sommatore completo* può essere dedotta da una tabella della verità che includa un riporto precedente C_0 e i bit A e B dei registri come grandezze in ingresso. La tabella è:

A	B	C_0	S_2	C_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Quindi:

$$S_2 = A\bar{B}\bar{C}_0 + \bar{A}B\bar{C}_0 + \bar{A}\bar{B}C_0 + ABC_0 \quad (9\text{-}37)$$

$$C_2 = \bar{A}BC_0 + A\bar{B}C_0 + AB\bar{C}_0 + ABC_0 \quad (9\text{-}38)$$

La prima espressione può essere riscritta nel modo seguente:

$$S_2 = \bar{C}_0(A\bar{B} + \bar{A}B) + C_0(AB + \bar{A}\bar{B}) \quad (9\text{-}39)$$

Impiegando il teorema 20 si può scrivere questo risultato come:

$$S_2 = \bar{C}_0(A\bar{B} + \bar{A}B) + C_0(\overline{A\bar{B} + A\bar{B}}) \tag{9-40}$$

L'equazione (9-38) per la cifra di riporto si riduce a:

$$\begin{aligned} C_2 &= AB(\bar{C}_0 + C_0) + C_0(A\bar{B} + \bar{A}B) \\ &= AB + C_0(A + B)\,(\bar{A}\bar{B}) \end{aligned} \tag{9-41}$$

L'impiego delle eq. (9-34) e (9-35) in queste equazioni ci permette di utilizzare il circuito sommatore parziale come componente di un sommatore completo, ossia:

$$S_2 = S_1\bar{C}_0 + \bar{S}_1C_0 = (S_1 + C_0)\,\overline{(S_1C_0)} \tag{9-42}$$

$$C_2 = C_1 + S_1C_0 \tag{9-43}$$

Queste posizioni dicono che S_2 è uguale a (S_1 OR C_0) e NOT (S_1 AND C_0); il riporto C_2 alla posizione successiva dipende da C_1 OR (S_1 AND C_0). Quindi S_2 è ottenuta con l'impiego di un secondo sommatore parziale; C_2 richiede l'impiego di un circuito OR addizionale. Il sommatore completo consiste quindi di due sommatori parziali e di un circuito OR, come in fig. 9-19.

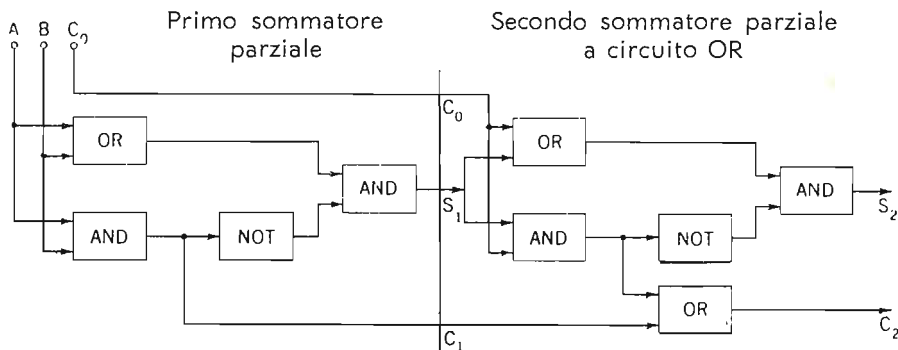



FIG. 9-19 — Due sommatori parziali e un circuito OR realizzano un sommatore completo.

Sono possibili anche altre varianti per i sommatori completi, trasformando differentemente le equazioni fondamentali. Le configurazioni che ne risultano possono impiegare un minor numero di diodi, o un maggior numero di blocchi logici uguali (diminuendo così la complessità del circuito), o possono effettuare le operazioni più rapidamente.

Come esempio di una disposizione circuitale che evita i blocchi NOT e può avere una maggiore velocità di operazione, si può considerare quella

discendente dall'impiego diretto dell'eq. (9-37). I registri a spostamento in ingresso possono fornire direttamente i segnali $\bar{A}$ e $\bar{B}$ con l'altra metà dei loro bistabili, per cui si può realizzare un sommatore direttamente dall'eq. (9-37). In questo caso l'eq. (9-38) va scritta:

$$C_2 = AB\bar{C}_0 + A\bar{B}C_0 + \bar{A}BC_0 + ABC_0 + ABC_0 + ABC_0 \tag{9-44}$$

L'aggiunta degli ultimi due termini è lecita perchè ulteriori interruttori identici in parallelo non alterano la logica del circuito. Questa equazione può essere ridotta a:

$$\begin{aligned} C_2 &= AB(\bar{C}_0 + C_0) + AC_0(\bar{B} + B) + BC_0(\bar{A} + A) \\ &= AB + AC_0 + BC_0 \end{aligned} \tag{9-45}$$

Il circuito per il sommatore completo di fig. 9-20 discende direttamente dalle eq. (9-37) e (9-45). Questo circuito richiede quattro circuiti AND a tre ingressi e tre circuiti AND a due ingressi, un circuito OR a quattro ingressi e un OR a tre ingressi. I sette circuiti AND possono essere identici nel progetto e nella realizzazione, in quanto il tipo a tre ingressi è derivato da quello a quattro ingressi portando un ingresso alla tensione che rappresenta il livello 1, perchè ABC · 1 = ABC. Così vengono ridotti i costi di montaggio.

Un segnale di riporto potrebbe aver origine dalla somma dei due bit

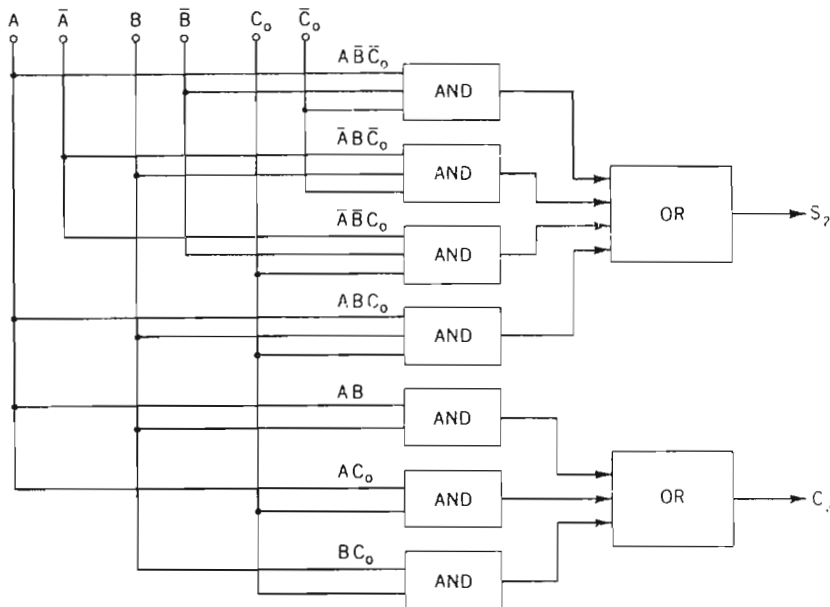



FIG. 9-20 — Un'altra forma di sommatore completo.

meno significativi e propagarsi, in un numero ad *n* cifre, fino all'ennesima. Ovviamente questa propagazione del riporto richiede tempo, e il sommatore non può procedere all'addizione successiva finchè non è passato il tempo necessario per completare la propagazione del riporto. Perciò è importante che il circuito di riporto sia veloce; nel circuito in discussione si può vedere che il riporto deve passare solo attraverso un circuito AND e un OR per arrivare all'uscita. Questo è anche vero per il sommatore di fig. 9-19, ma può non essere vero per altre versioni del circuito.

Paragonando le fig. 9-19 e 9-20 si può notare che in entrambe vi sono nove blocchi logici, ma il circuito di fig. 9-20 può presentare il vantaggio di una maggiore semplicità di progetto, in quanto le funzioni elementari sono identiche, e di una riduzione di costo a causa della realizzazione di blocchi identici.

Il numero di ingressi ad un circuito è detto assorbimento (*fan-in*) del circuito. Il numero di circuiti alimentati da un'uscita è detto capacità di erogazione (*fan-out*) del circuito. Si usa definire la corrente necessaria per pilotare un circuito logico come *carico unitario*, e predeterminare il numero di circuiti logici che una unità può pilotare; per definire la capacità di erogazione dell'unità bisogna dividere la massima corrente possibile in uscita del circuito per quella del carico unitario.

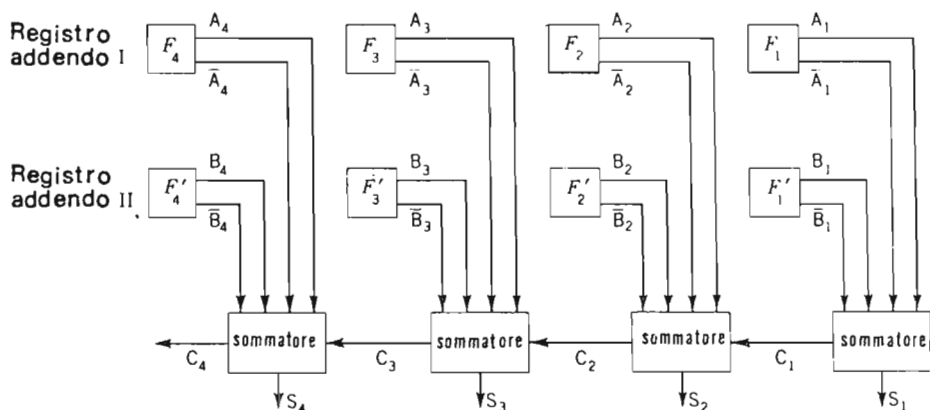



FIG. 9-21 — Sommatore in parallelo.

La fig. 9-21 illustra un insieme di sommatori e registri per il funzionamento in parallelo. Per la somma di due numeri di 30 bit è necessario l'impiego di 30 circuiti sommatori; il sommatore per il bit meno significativo può essere anche un sommatore parziale perchè non vi è un impulso di riporto in ingresso. I bit degli addendi sono prima posti nei registri, al ter-

mine di questa operazione le uscite dei registri vengono inviate nei sommatori. Dopo un tempo sufficiente per effettuare la propagazione dei riporti lungo la catena i bit della somma vengono di solito rinviati nel secondo registro per essere utilizzabili nelle operazioni seguenti.

In fig. 9-22 viene riportato uno schema più completo del sommatore serie. Il funzionamento in serie semplifica lo schema; è necessario un solo set di circuiti per l'impulso di spostamento e per la logica del sommatore. Tuttavia il sommatore serie effettua la sua operazione un bit alla volta e perciò la semplicità dei circuiti va a scapito della velocità.

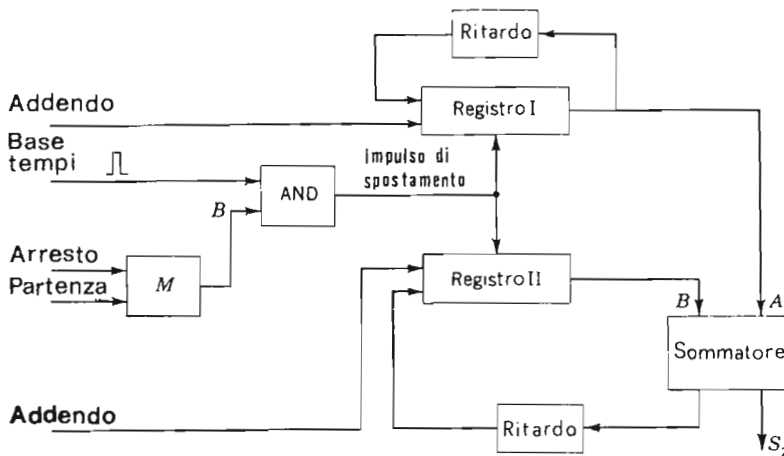



FIG. 9-22 — Sommatore in serie.

I bit degli addendi vengono inviati in serie nei registri I e II, e quando è terminata l'operazione di immagazzinamento un impulso di partenza comanda il bistabile M, che dà un ingresso costante al terminale B del circuito AND. Vengono così inviati attraverso il circuito AND gli impulsi di temporizzazione che agiscono come impulsi di spostamento per i registri; ogni impulso muove il contenuto del registro di un posto verso destra e fornisce i bit estratti agli ingressi A e B del circuito sommatore. Nello stesso tempo il bit in uscita dal registro I viene ritardato di mezzo periodo e riportato all'ingresso del registro stesso. L'impulso in uscita dal sommatore viene anch'esso ritardato e quindi inviato all'ingresso del secondo registro. Dopo n impulsi di spostamento, dove n è il numero di bit in gioco, un impulso negativo di arresto interdice il bistabile M e il circuito AND blocca gli impulsi di spostamento. In questo istante l'addendo originale è nel registro I e la somma è nel registro II; entrambi i numeri sono pronti per le ulteriori operazioni o per essere letti o immagazzinati.

9-16. Moltiplicazione.

Nel par. 9-3 si è già visto che la moltiplicazione è fondamentalmente una operazione consistente in somme e spostamenti di posizione. La moltiplicazione binaria è più semplice perchè occorre solo un'addizione per ogni 1 del moltiplicatore, mentre nella moltiplicazione decimale possono essere necessarie fino a nove addizioni per ogni spostamento.

In fig. 9-23 sono indicati i principi fondamentali di un tipo di moltiplicatore binario in cui viene impiegato un *accumulatore*. L'accumulatore è fondamentalmente un contatore a bistabili, ma con terminali di ingresso per ogni stadio. Se un segnale viene inviato al secondo stadio il conteggio viene aumentato di 2, se il segnale viene inviato all'ottavo stadio il conteggio viene aumentato di 8. Perciò un accumulatore tiene conto nei calcoli anche della posizione, o del peso dei bit.

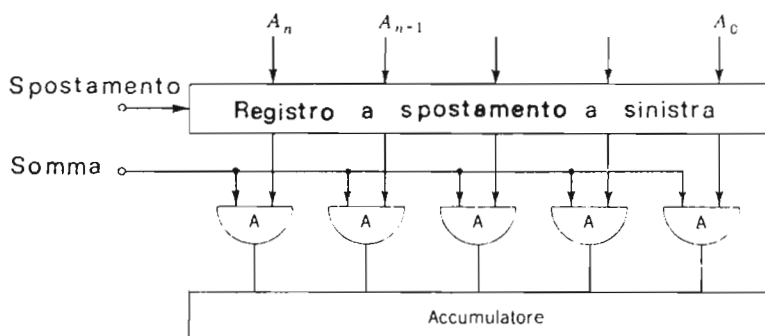



FIG. 9-23 — Moltiplicatore in parallelo che impiega un registro a spostamento.

In fig. 9-23, i bit del moltiplicando sono inviati in parallelo nel registro a spostamento, e l'accumulatore viene posto a zero. Per effettuare la moltiplicazione si inviano alternativamente impulsi ai terminali di spostamento e di somma; gli impulsi inviati al terminale somma sono degli impulsi in serie che rappresentano il moltiplicatore. Supponendo che il moltiplicatore sia 101, alla ricezione dell'impulso di partenza, la cifra 1 meno significativa viene inviata a tutti i circuiti AND, sui quali vi sono anche le tensioni che rappresentano i bit 1 del moltiplicatore. I circuiti AND che hanno 1 a tutti e due gli ingressi trasmettono uno 0. Nell'accumulatore si ritrova così l'insieme dei bit del moltiplicando.

Un impulso di spostamento sposta quindi il moltiplicando di una posi-

zione verso sinistra, e poiché la seconda cifra del moltiplicatore è 0, non vi è nessun impulso di somma. L'impulso di spostamento successivo sposta di nuovo il moltiplicando verso sinistra, ed è seguito da un impulso di somma derivante dal terzo bit 1 del moltiplicatore. Il risultato nell'accumulatore è il prodotto voluto.

Supponendo che nel problema precedente il moltiplicando fosse stato 1110, l'operazione sarebbe stata effettuata in questo modo:

```
      1 1 1 0
    ×   1 0 1
    ---------
      1 1 1 0
  1 1 1 0
-------------
1 0 0 0 1 1 0
```

L'operazione si potrebbe anche effettuare mediante uno spostamento a destra nell'accumulatore invece che a sinistra nel registro.

Il prodotto di due numeri di 4 bit può richiedere otto bit per la presentazione, quindi i registri e gli accumulatori debbono permettere $2n$ posizioni, se n è il numero di bit per numero. Poichè la moltiplicazione è effettuata in pratica con un processo serie, quest'operazione è una delle più lente nella aritmetica del calcolatore.

9-17. Organizzazione del calcolatore numerico.

Un esempio molto comune di calcolatore numerico è la macchina calcolatrice meccanica, nella quale il calcolo viene effettuato con valori numerici, al contrario del calcolatore analogico nel quale si impiegano delle grandezze fisiche per effettuare le operazioni matematiche.

Supponendo che funzioni correttamente, la precisione di un calcolatore numerico dipende solo dal numero di cifre significative che possono essere impiegate nel calcolo; da questo numero dipende direttamente il costo e la complessità del calcolatore.

Nella scienza moderna si incontrano molti problemi la cui soluzione richiede un tempo molto elevato col calcolatore di tipo meccanico, si è posto quindi il massimo sforzo nell'aumentare la veloctà di calcolo non appena nuove tecniche lo rendevano possibile. Durante il periodo dal 1944 al 1947 si costruirono parecchi calcolatori a relè che presentavano una più elevata velocità di operazione e che operavano in aritmetica binaria, essendo i relè adatti al sistema binario a causa del loro funzionamento a due stati, aperto o chiuso. La prima macchina a relè, il calcolatore Harvard Mark I,

costruito nel 1944, era capace di sommare due numeri di 23 cifre (equivalente decimale) in 0,3 secondi, superando così di molto la velocità di un calcolatore meccanico, che può sommare due numeri di 10 cifre in un minuto circa, tenendo conto anche del tempo per la registrazione del risultato.

Un ulteriore aumento della velocità è stato reso possibile dall'uso dei tubi elettronici al posto dei relè elettrici. Con i circuiti bistabili e gli altri circuiti precedentemente esaminati, è possibile costruire calcolatori numerici capaci di eseguire operazioni aritmetiche nel tempo di un microsecondo. Il primo di questi calcolatori numerici elettronici in grande scala fu l'ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) costruito all'Università di Pennsylvania nel 1947. Esso impiegava circa 18.000 tubi a vuoto e poteva addizionare due numeri di 10 cifre (equivalente decimale) in circa 200 μs. Da quel momento il continuo perfezionamento ha portato a calcolatori in cui il tempo di addizione è di frazioni di microsecondo.

Il calcolatore numerico impiega principalmente l'addizione e la sottrazione anche nei calcoli per approssimazioni successive o iterazioni per ottenere valori di funzioni, integrazioni e soluzioni di sistemi di equazioni algebriche ed equazioni differenziali lineari e non lineari.

L'operatore umano dirige, o *programma*, la macchina perchè compia le operazioni aritmetiche richieste. Queste direzioni, o *istruzioni*, che sono parte del programma del calcolatore, possono essere meglio intese considerando l'analogia tra il calcolo manuale e automatico nella somma di due numeri, ad esempio 618 e 723.

Il procedimento usuale è:

operazione manuale		*operazione del calcolatore*
Scrivere	6 1 8	Inserire ed immagazzinare
Scrivere	7 2 3	Inserire ed immagazzinare
Sommare	3 3 1	Sommare
Riporto	1 1	Riporto
Scrivere il risultato	1 3 4 1	Estrarre o immagazzinare

Si può vedere che scrivere i numeri equivale ad effettuare una operazione di *ingresso*, ossia a introdurre i dati numerici del problema e porli dove essi possano essere ritrovati in seguito; ossia i numeri sono *immagazzinati* sulla carta fino a quando saranno utilizzati. Poi segue l'*operazione aritmetica* di addizione. Infine lo scrivere la somma rappresenta una funzione di *uscita* ed anche di *immagazzinamento* della risposta.

Nell'esempio precedente, vi era un *controllo* mentale del problema, in quanto il cervello indicava alla mano che cosa scrivere ed in che ordine. Se l'operatore umano dovesse condurre passo per passo il calcolatore elettronico vi sarebbe solo un piccolo aumento nella velocità complessiva, e la velocità del calcolatore sarebbe in gran parte inutilizzata. È stato proprio il con-

cetto di *immagazzinare il programma* in anticipo nella macchina che ha reso effettivamente il calcolatore elettronico una macchina ad elevata velocità.

Il programma immagazzinato comprende sia le *istruzioni* che i *dati*, che vengono forniti al calcolatore e immagazzinati nella memoria. Le istruzioni stabiliscono quali sono le operazioni che si debbono effettuare: addizione, sottrazione, moltiplicazione, comparazione, stampa, ecc.

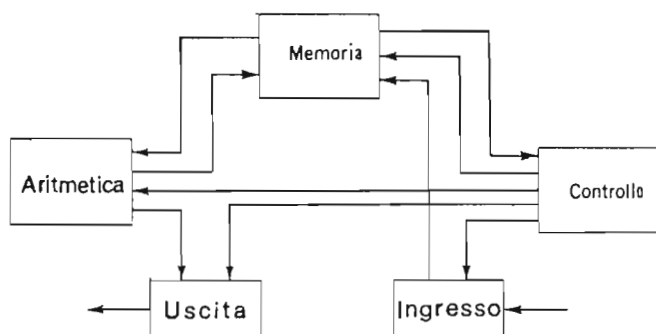



Fig. 9-24 — Funzioni di un calcolatore numerico.

Ogni parola dell'istruzione consiste di due parti: il tipo di operazione e *l'indirizzo*, o l'individuazione nella memoria del dato che deve essere utilizzato. Le istruzioni che raggiungono il controllo sono in forma binaria, e il controllo separa semplicemente il codice di operazione e l'indirizzo in base alle loro posizioni nella parola dell'istruzione. L'unità di controllo emette gli ordini (impulsi elettrici) per estrarre i dati dalla memoria e per porli negli adatti registri di operazione. Il controllo inoltre attiva i circuiti necessari ad effettuare le operazioni aritmetiche richieste. Quando l'operazione è completata, l'unità di controllo va all'istruzione successiva, già in memoria, ed effettua la nuova operazione richiesta. Così l'operatore umano, una volta introdotto ed immagazzinato il programma desiderato, non è più di impedimento al funzionamento del calcolatore, e il calcolatore va avanti da solo alla sua propria elevata velocità, effettuando le operazioni stabilite finchè tutte le istruzioni siano state espletate.

I calcolatori possono essere di diversi tipi. Il calcolatore *sincrono* utilizza un generatore di impulsi come temporizzatore, e procede al ritmo di questi con un numero determinato di impulsi per eseguire le varie operazioni. Nella logica gli 1 corrispondono alla presenza degli impulsi, gli 0 all'assenza. Il calcolatore *asincrono* non ha un ritmo determinato per le operazioni; al completamento di ogni operazione un impulso di abilitazione viene inviato

al controllo perchè venga eseguita l'istruzione seguente. Molti calcolatori combinano i vantaggi del tipo sincrono e di quello asincrono.

Si è già esaminata quale sia la differenza nel trattare i bit in *serie* o in *parallelo*. Un calcolatore serie, che lavora ad un bit per volta, impiega un tempo circa quindici volte più lungo ad addizionare due numeri di 15 bit di quello che impiega ad addizionare due numeri di 1 bit. Un calcolatore in parallelo opera simultaneamente su tutti i bit e può addizionare due numeri di 15 bit nel tempo che impiega ad addizionare due di 1 bit, più il tempo necessario per far propagare i segnali di riporto attraverso il sistema. La scelta tra il funzionamento serie o parallelo è determinata da un compromesso tra complessità, costo, peso e velocità di funzionamento.

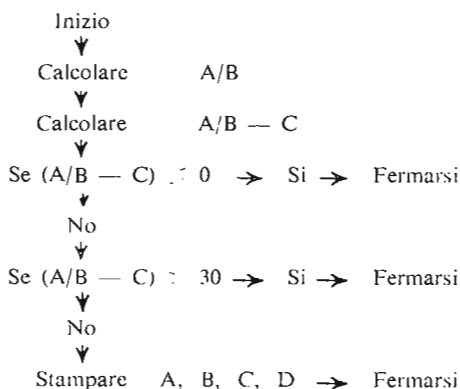
9-18. Il programma del calcolatore.

Il programma di un problema consiste nel descrivere esplicitamente i vari passaggi della soluzione numerica del problema, espressi in termini delle regole elementari dell'aritmetica. Ad esempio si consideri l'equazione:

$$A/B - C = D$$

per valori di $0 \leq D \leq 30$ e valori interi di A, B, C e D. Il problema può essere espresso come:

1. Calcolare: $(A/B - C)$; fermarsi se $(A/B - C) \leq 0$
2. Stampare: valori di A, B, C e D se $D \leq 30$
3. Fermarsi: se $(A/B - C) > 30$

Si può tracciare un *diagramma di flusso* come guida:

Un tale problema può coinvolgere un gran numero di istruzioni individuali del calcolatore, che vengono notevolmente ridotte impiegando un forma

concisa di istruzione, ossia un linguaggio di programmazione come il FORTRAN o il COBOL. Questi linguaggi possono essere impiegati in molti tipi di calcolatori, ma questo non significa che tutti i calcolatori sono progettati in modo da funzionare con gli stessi segnali in ingresso per le varie operazioni. Ogni calcolatore ha il suo proprio *linguaggio macchina* che è la forma codificata dei segnali o degli impulsi necessari per il suo funzionamento; tuttavia, per rendere l'operazione di programmazione indipendente dal tipo di macchina con cui si deve svolgere il problema e per semplificare i programmi, sono stati sviluppati questi linguaggi generali.

Il FORTRAN, il COBOL e gli altri linguaggi di programmazione debbono essere tradotti nel linguaggio macchina, e questa operazione viene chiamata *assemblaggio*. Il programma in FORTRAN, scritto in inglese distorto e talvolta preparato su schede perforate, viene letto dal calcolatore che ha nella sua memoria un glossario di equivalenti tra FORTRAN e linguaggio macchina; il calcolatore traduce così il linguaggio generale del programma nel suo proprio linguaggio. È possibile impiegare un simbolo FORTRAN per effettuare un certo numero di operazioni standard; il calcolatore può riunire queste istruzioni in un programma, risparmiando così tempo e fatica al programmatore.

9-19. Le istruzioni.

Sia le istruzioni che i dati vengono inseriti nella memoria del calcolatore; una istruzione può consistere di sette cifre decimali, come:

21 00024

Le prime due cifre possono corrispondere al comando di *sommare* nel linguaggio macchina, e le ultime cinque cifre possono essere l'indirizzo del numero che deve essere sommato al numero che è già nell'accumulatore. L'impiego di cinque cifre implica una memoria capace di immagazzinare 100.000 simboli, con indirizzi da 00000 a 99999.

Una tale istruzione contiene un solo indirizzo ed è detta codice a *singolo indirizzo*. Poichè uno dei numeri su cui si deve operare è già nell'accumulatore, il calcolatore ha bisogno solo di un indirizzo per trovare l'altro numero. Le istruzioni sono immagazzinate nella memoria in indirizzi successivi, per cui i calcoli vengono effettuati in sequenza estraendo le istruzioni nell'ordine in cui sono state immagazzinate. Così con un solo indirizzo si sono trasferite tre istruzioni separate:

1. Effettuare l'operazione di addizione del numero nell'accumulatore e del
2. Numero nell'indirizzo 00024 e
3. Passare all'istruzione successiva.

Come esempio della codificazione del linguaggio macchina e del suo impiègo, consideriamo il problema

$$A = \frac{X^2 - BZ}{Y}$$

Si ponga il seguente codice di operazione per il calcolatore:

21 - sommare
22 - sottrarre
23 - moltiplicare
24 - paragonare
25 - azzerare l'accumulatore e aggiungere
26 - immagazzinare
29 - dividere
30 - stampare
49 - trasferire

il programma dovrebbe richiedere queste istruzioni che vanno immagazzinate in indirizzi successivi della memoria:

2610001 - Immagazzinare B nell'indirizzo 10001
2610002 - Immagazzinare X nell'indirizzo 10002
2610003 - Immagazzinare Z nell'indirizzo 10003
2610004 - Immagazzinare Y nell'indirizzo 10004
2510003 - Azzerare l'accumulatore e aggiungere Z da 10003
2310001 - Moltiplicare Z e B da 10001
2610005 - Immagazzinare il contenuto dell'accumulatore in 10005
2510002 - Azzerare l'accumulatore e aggiungere X da 10002
2310002 - Moltiplicare per X da 10002
2210005 - Sottrarre BZ dal contenuto dell'accumulatore (X^2)
2910004 - Dividere l'accumulatore per Y da 10004
3000000 - Stampare il contenuto dell'accumulatore.

Se le singole istruzioni non fossero state immagazzinate sequenzialmente nella memoria, ogni istruzione avrebbe dovuto contenere l'indirizzo della istruzione successiva, e si sarebbe avuto così un codice a due indirizzi. In qualche macchina si hanno quattro indirizzi in ogni istruzione, e cioè due per ogni operando, uno per il risultato immagazzinato, e uno per l'istruzione successiva, come ad esempio

23 01240 00760 11015 02011

In un sistema a tre indirizzi viene eliminato l'indirizzo dell'istruzione successiva e le istruzioni sono immagazzinate sequenzialmente come per le macchine a un indirizzo.

In fig. 9-25 è riportato lo schema di un controllo per decodificare le istruzioni in un calcolatore a un indirizzo. Per il calcolatore esaminato precedentemente le istruzioni vengono lette dalla memoria e le prime due cifre deci-

mali vengono mantenute nel registro di operazione mentre le cifre rimanenti vanno al registro di indirizzo. Di lì entrano negli appropriati decodificatori che possono essere delle matrici di commutazione, che forniscono gli impulsi per aprire le porte dei circuiti che debbono entrare in funzione e per estrarre i numeri dalla memoria.

Per una macchina a un indirizzo il contatore di controllo è posto inizialmente nella condizione corrispondente all'indirizzo della prima istruzione da eseguire. Appena una istruzione è estratta dalla memoria, viene inviato un impulso al contatore di controllo, che avanza di un'unità e così indica l'indirizzo dell'istruzione successiva.

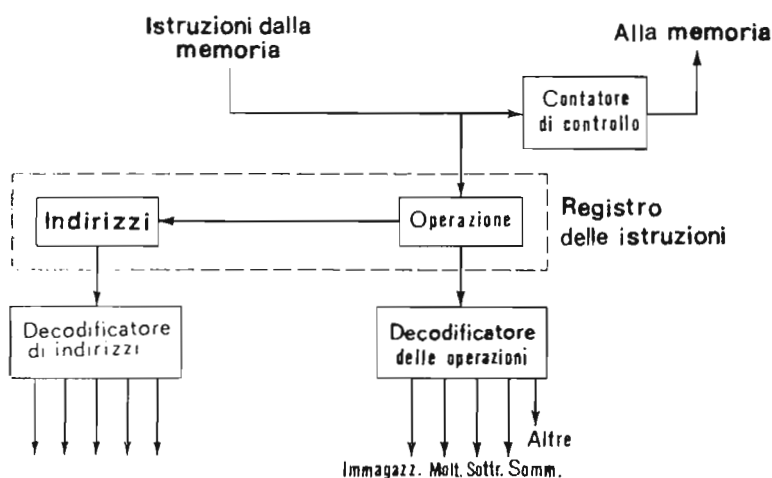



FIG. 9-25 — Parte del controllo che elabora le parole di istruzione.

Durante lo svolgimento del programma si può presentare il caso che il calcolatore debba lasciare la sequenza principale di istruzioni e prendere la successiva o le successive istruzioni da indirizzi non legati ai precedenti. Questa operazione viene indicata come *salto*, o *trasferimento*. Il salto può essere impiegato per utilizzare le istruzioni, necessarie ad eseguire una data operazione matematica, già immagazzinate nella memoria in un altro indirizzo, come *subroutine* separata. Una istruzione 4910123, dopo una istruzione immagazzinata in 10015, potrebbe significare: « Trasferire il controllo all'indirizzo 10123 ». Vengono quindi eseguite le istruzioni dall'indirizzo 10123 finchè ad esempio al 10147 l'istruzione è 4910016, cioè dice al controllo di trasferirsi indietro all'indirizzo 10016 e di riprendere di nuovo la sequenza principale.

Le operazioni dal 10123 al 10147 sono dette *subroutine*. Questo tipo di programmazione consente di operare con memorie di minori dimensioni e

introdurre le subroutine standard, come radice quadrata e generazione di funzioni, che verranno utilizzate ogni volta che sarà necessario.

I *trasferimenti condizionati* sono impiegati per trasferire il controllo ad una serie differente di indirizzi in dipendenza di una condizione posta nel problema. Nell'esempio precedente si verificavano due di questi trasferimenti: (1) per individuare una condizione di zero, e (2) per individuare un numero più grande di un limite prefissato.

I trasferimenti condizionati possono essere impiegati per far svolgere al calcolatore un programma differente, in dipendenza della condizione posta. Per esempio nel paragone di due numeri viene iniziato un programma secondario se

$$x_k - x_{k-1} - \delta$$

diventa negativo, ossia se la differenza tra i risultati di due iterazioni successive diventa minore di un valore δ prefissato.

9-20. I diversi tipi di memorie.

La memoria deve essere di capacità sufficiente, in termini di bit o *parole*, per poter immagazzinare i dati numerici e le istruzioni onde non dover ricorrere con frequenza ad istruzioni esterne; inoltre ogni informazione deve poter essere estratta in un tempo abbastanza breve in modo da non ritardare il calcolo. Per studiare i sistemi di immagazzinamento bisogna premettere alcune definizioni.

I *sistemi ciclici* sono quelli in cui l'informazione è inserita in un ciclo, nel tempo o nello spazio, per cui un dato simbolo può essere individuato solo una volta per ciclo. Esempi di queste memorie sono il tamburo magnetico rotante e le linee di ritardo acustiche.

I sistemi a *coordinate di accesso* impiegano un reticolo di celle di memoria. Le cifre vengono immagazzinate staticamente, e sono tutte ugualmente accessibili al circuito di lettura. Gli indirizzi contengono un'informazione sulla riga e sulla colonna. Un esempio di questo tipo di memoria è quella a nuclei magnetici.

I *sistemi sequenziali* impiegano una lunga serie di celle di memoria esterne che possono essere lette, in *sequenza*, dal calcolatore. Esempi di questi sistemi sono le schede perforate, il nastro di carta e il nastro magnetico. Poichè l'accesso è lento, questi sistemi vengono impiegati di regola solo come sistemi esterni, a grande capacità.

Il *tempo di accesso* è l'intervallo tra il comando di estrazione di una informazione dalla memoria e l'istante in cui la memoria fornisce effettivamente tale informazione. Questo tempo può essere solo il tempo di risposta del cir-

cuito, come nelle memorie a nuclei magnetici, o anche il tempo necessario per esaminare un lungo tratto di nastro magnetico per trovare il dato richiesto.

Il termine *accesso casuale* indica che ciascun simbolo è accessibile nello stesso tempo di tutti gli altri; un esempio è dato dalla memoria a nuclei magnetici perchè ogni simbolo viene individuato con lo stesso metodo di indirizzi e di ricerca che viene utilizzato per qualsiasi altro simbolo. Il nastro magnetico non ha un accesso casuale perchè un simbolo all'inizio del nastro, o vicino alla testina di lettura, può essere individuato molto più rapidamente di un simbolo posto in fondo alla bobina.

Un sistema a memoria *volatile* è quello in cui l'informazione contenuta scompare, o « evapora », col tempo o quando manca l'alimentazione. Una memoria *non-volatile* è quella in cui i dati possono essere eliminati solo cancellandoli volutamente. In un elemento di memoria *cancellabile* le informazioni possono essere eliminate e sostituite con altre; i nastri magnetici sono un esempio di questo tipo. Le schede perforate o il film fotografico non sono cancellabili.

I vari sistemi di memoria che vengono usati sono:

Relè elettrici. — I relè, a causa del loro funzionamento, aperto o chiuso, sono adatti a memorizzare i bit; sono però lenti, ed ogni relè può conservare solo un bit.

L'informazione è volatile a meno che non si provveda ad un bloccaggio meccanico del relè, e il tempo di accesso è lungo a causa del tempo di funzionamento, 10-30 msec, del relè.

Linee di ritardo acustiche. — Attraverso il mercurio o il quarzo possono essere trasmesse delle onde sonore impulsive, e le cifre, corrispondenti agli impulsi, possono essere riportate dall'uscita della linea all'ingresso con degli amplificatori. All'istante voluto, il segnale può essere prelevato e inviato ai circuiti del calcolatore. I trasduttori impiegati per convertire i segnali elettrici in vibrazioni meccaniche e viceversa sono dei quarzi o altri cristalli piezoelettrici.

Nel mercurio la velocità del suono è circa $1{,}45 \times 10^5$ cm/sec. Il tempo di immagazzinamento, in una linea lunga 40 cm è:

$$\frac{40}{1{,}45 \times 10^5} = 276\ \mu s$$

Se i bit vengono inviati nella memoria al ritmo di quattro per microsecondo, il numero di bit immagazzinati nella linea è $4 \times 276 = 1104$. La linea a mercurio è quindi adatta per bassi tempi di immagazinamento, dell'ordine del millisecondo, o per piccoli ritardi del segnale. È necessario un accurato controllo della temperatura perchè la velocità del suono nel mercurio dipende dalla temperatura.

Il funzionamento può essere compreso in base allo schema di fig. 9-26 Il tempo di ritardo corrisponde al numero di impulsi temporizzatori presenti in un periodo di circolazione; di solito viene immagazzinata una sola sequenza di bit per ciclo. L'uscita del ricevitore deve passare attraverso un circuito rigeneratore di impulsi, o circuito formatore, di norma un circuito di Schmitt, per correggere la distorsione di frequenza e di fase della linea.

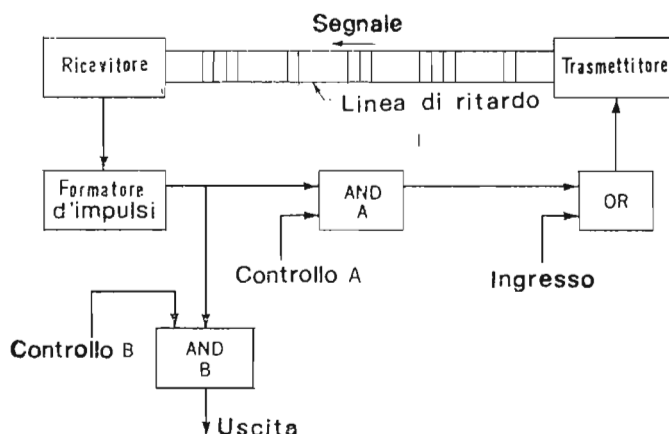



FIG. 9-26 —Memoria a linea di ritardo a quarzo o a mercurio.

Gli impulsi vengono introdotti attraverso il circuito OR, e restano in circolazione finchè il controllo mantiene una tensione sul circuito AND A. Per estrarre gli impulsi dall'uscita viene inviato un impulso di controllo sul circuito AND B e viene eliminata la tensione di controllo su A.

Nastro magnetico. — Questa memoria è costituita da un nastro di materia plastica su cui è depositato un materiale magnetico, che passa avanti al

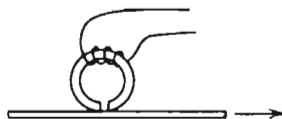



FIG. 9-27 — Testina di registrazione magnetica.

piccolo traferro ad aria del circuito magnetico di una testina di lettura e scrittura, come in fig. 9-27. Il nastro mentre avanza, ad una velocità di 2,6 metri al secondo, è esposto ad un flusso magnetico variabile, per cui si for-

mano delle zone di forte magnetizzazione residua e di magnetizzazione zero, o positiva o negativa, a seconda degli 1 e 0 registrati.

In ogni bobina vi sono alcune centinaia di metri di nastro e per accedere alle informazioni vengono impiegate testine di registrazione e di lettura nonchè un controllo, di precisione, della velocità del motore pilota e della direzione del movimento.

Il trascinamento del nastro magnetico è illustrato in fig. 9-28. Per permettere una rapida partenza, arresto e inversione di marcia, il nastro piega in un'ansa ad ognuna delle due estremità della testina di lettura e scrittura. Le ruote di trascinamento, che sono sempre in movimento, vengono poste in contatto con il nastro per permettere una rapida partenza, e le anse del nastro che sono nelle colonne a vuoto servono da riserva. A seconda che le

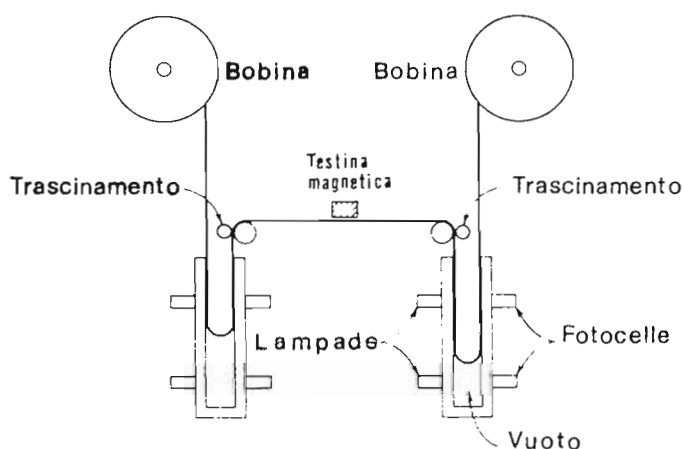



FIG. 9-28 — Trascinamento del nastro magnetico.

anse si accorciano o si allungano, un controllo a fotocelle fa partire o fermare il motore di pilotaggio della bobina corrispondente in modo da prevenire un eccessivo allungamento o accorciamento delle anse. In questo modo l'accelerazione del nastro è limitata solo dall'inerzia di poche decine di centimetri di nastro e non dall'elevata inerzia delle bobine e dei motori. Il vuoto mantiene il nastro in leggera tensione senza che vi sia contatto meccanico e quindi usura del nastro.

Tamburo magnetico. — Sulla superficie di un tamburo rotante coperto di materiale magnetico possono essere registrate numerose tracce l'una a fianco dell'altra. Ponendo una testina di lettura e scrittura su ogni traccia, come in fig. 9-29, si possono leggere in parallelo tanti bit quante sono le

tracce. Una o più tracce vengono conservate per gli indirizzi per individuare l'inizio di ogni rotazione e quindi l'informazione desiderata.

Per leggere un dato numero bisogna attendere al massimo che si effettui una intera rotazione; per ridurre questo tempo di accesso vengono adottate alte velocità di rotazione. Questa memoria è non-volatile.

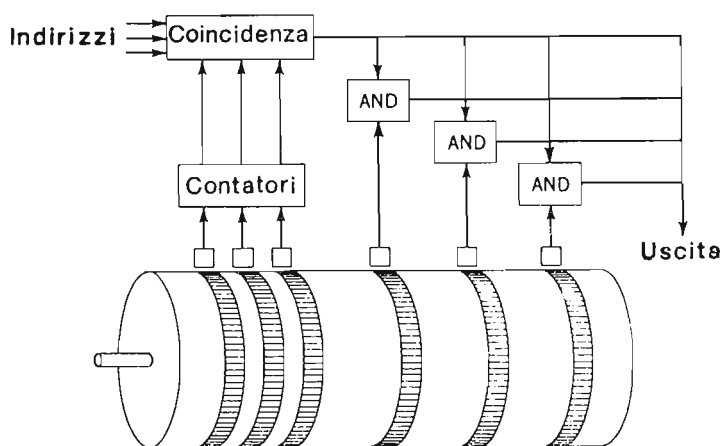



FIG. 9-29 — Circuiti di accesso e di lettura del tamburo magnetico.

Memorie a nuclei magnetici. — La possibilità di ottenere materiali magnetici con cicli di isteresi praticamente rettangolari, come quello in fig. 9-30,

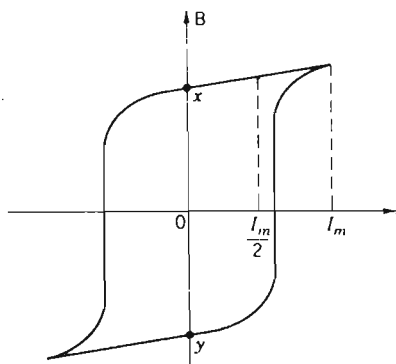



FIG. 9-30 — Ciclo d'isteresi del nucleo.

ed alta magnetizzazione residua consente di realizzare elementi di memoria a nucleo magnetico. In questo tipo di memoria lo stato 0 è rappresentato da

un nucleo magnetizzato negativamente e lo stato 1 da una magnetizzazione positiva con induzioni residue pari rispettivamente alle ordinate y e x della figura. Vengono impiegate ferriti in polvere compresse in piccoli nuclei toroidali e poste in reticoli o matrici come in fig. 9-31.

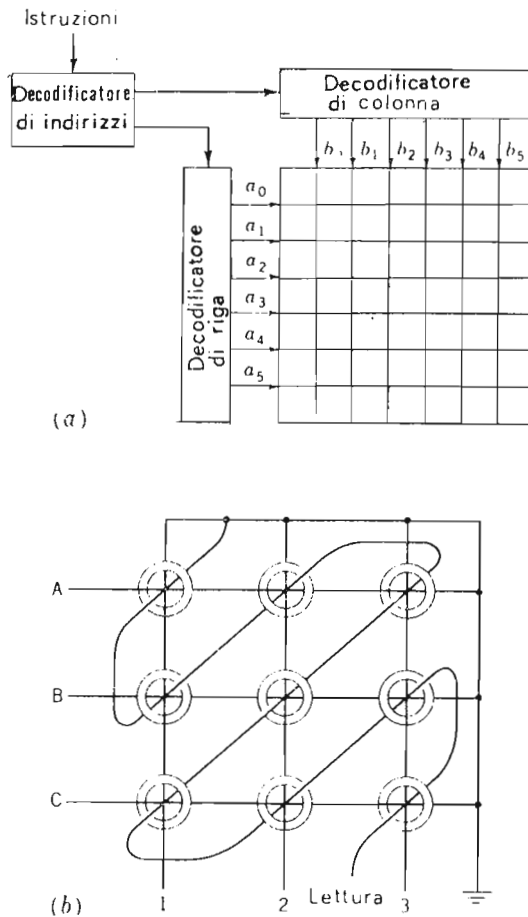



FIG. 9-31 — *a*) Accesso alla matrice di nuclei. *b*) Cablaggio di una parte della matrice.

I nuclei del reticolo sono collegati con fili orizzontali e verticali; se si vuole immagazzinare numeri di 20 cifre binarie, bisogna connettere 20 reticoli l'uno a fianco dell'altro con funzionamento in parallelo. In ogni punto in cui si incrociano due fili, vi è un nucleo magnetico; per portare un nucleo in saturazione è necessario che circoli una corrente in entrambi i fili, e quindi applicando simultaneamente queste correnti ad un filo orizzontale e ad uno

verticale, solo un nucleo riceve un valore di campo magnetico sufficiente a portarlo in saturazione al punto x o y. Così viene immagazzinato un bit; in base alla polarità delle correnti questo sarà uno 0 o un 1; il nucleo rimane in saturazione indefinitivamente finchè non viene applicato un campo inverso.

Vi è anche un avvolgimento di lettura o di uscita infilato diagonalmente attraverso i nuclei.

Si può leggere l'informazione immagazzinata inviando una corrente attraverso i due fili che si intersecano nel nucleo desiderato. Se la polarità di questa corrente è tale da scrivere un 1, ed esiste già lo stato 1, non vi sarà variazione di induzione, e quindi non viene indotta una forza elettromotrice nell'avvolgimento di lettura. Se invece nel nucleo vi è uno stato 0, le condizioni magnetiche vengono invertite da x a y e si ottiene una f. e. m. di lettura. La lettura distrugge l'informazione contenuta, ma si possono aggiungere dei circuiti addizionali per riportare il nucleo al suo stato iniziale, per cui effettuando la lettura non viene perduta l'informazione. Questa memoria è cancellabile ma non-volatile, e il tempo di accesso è solo quello necessario per far funzionare i circuiti e per commutare lo stato magnetico dei nuclei.

Memoria a disco magnetico. — Questo sistema è simile al tamburo magnetico, ma in questo la registrazione è effettuata su entrambe le facce di un certo numero di dischi che ruotano ad alta velocità. La velocità di accesso è elevata, considerando la gran quantità di informazioni immagazzinate.

Memoria a Twistor. — Un elemento di memoria magnetica che può essere realizzato in maniera semplice è il *Twistor*, che viene ora impiegato largamente nei sistemi elettronici di commutazione telefonica. L'elemento, riportato in fig. 9-32, consiste di un filo di rame intorno al quale è av-

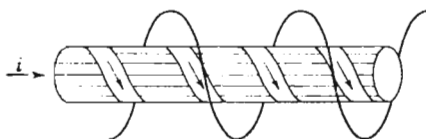



FIG. 9-32 — La cella di memoria a twistor.

volto un sottile nastro magnetico di permalloy. Una corrente i che circola nel conduttore magnetizza il nastro nel senso indicato, mentre una corrente di senso inverso inverte la direzione della magnetizzazione. Così applicando la corrente i in una direzione viene scritto uno 0 nell'elemento, e invertendo la i viene scritto un 1.

La lettura viene effettuata applicando un impulso concorde con la condizione 0 in un avvolgimento che circonda il Twistor. Se nel nastro era immagazzinato uno 0, non vi sarà una variazione apprezzabile di flusso nè tensione indotta nel conduttore di rame; se vi era immagazzinato un 1, il campo megnetico viene invertito e si indurrà una tensione tra i terminali del conduttore di rame, per cui si ottiene un segnale di lettura.

9-21. Ingresso e uscita del calcolatore.

I circuiti di ingresso e di uscita del calcolatore numerico sono quelli che permettono all'operatore umano di comunicare con la macchina. Le istruzioni del programma e i dati vengono di solito inseriti per mezzo di schede perforate, o nastro di carta forato, o nastro magnetico. Tutti questi metodi hanno in comune il vantaggio di permettere una preparazione e una verifica in anticipo, per cui non occorre impegnare il calcolatore finchè il programma non va effettivamente in circolazione. Nei casi di comunicazione diretta con macchina da scrivere si impiega di solito una memoria di separazione. I dati vengono trasferiti dalla macchina da scrivere ad un registro di separazione senza che venga interrotta l'elaborazione che il calcolatore sta effettuando; in seguito, in una pausa del processo di calcolo, i dati vengono trasferiti rapidamente dalla memoria di separazione a quella principale.

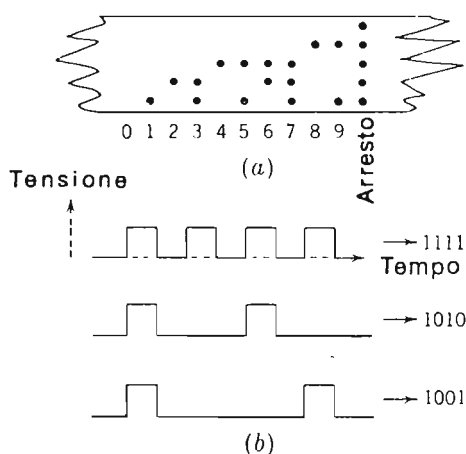



Fig. 9-33 — *a*) Nastro di ingresso con le cifre binarie. *b*) Impulsi di tensione introdotti nel calcolatore.

I dati possono essere presentati al calcolatore per mezzo di schede perforate, nastro di carta perforato, o nastro magnetico. In fig. 9-33 si può vedere

un tratto di nastro perforato. Un lettore a cellule fotoelettriche legge ogni cifra decimale come gruppo di quattro impulsi, che vengono trasmessi in serie o in parallelo ai bistabili di un registro. Questi numeri registrati su nastro in forma decimale con codificazione binaria, debbono essere trasformati dal calcolatore in numeri binari puri prima di poter effettuare altre operazioni. In un tipo di conversione, la cifra decimale di ordine più elevato viene letta dai primi quattro bistabili; questa quantità viene quindi moltiplicata per 1010, ossia per il numero decimale 10, poi viene sommato al prodotto la cifra decimale di ordine immediatamente più basso nel codice del nastro, e viene ripetuta la moltiplicazione per 1010. Per l'ultima cifra significativa, ossia per le unità, non è richiesta la moltiplicazione per 1010 perchè questa è sempre nella posizione delle unità. Questo metodo di conversione è stato già analizzato precedentemente.

Il processo inverso può essere effettuato convertendo i numeri da binari in decimali per stamparli sul nastro di uscita, sebbene possano anche essere usate delle matrici di commutazione.

Per presentare i dati in uscita, il calcolatore può fornire i dati rapidamente ad un nastro magnetico o ad una memoria di separazione e poi continuare con l'elaborazione. L'operatore può trasferire l'informazione dalla memoria o dal nastro magnetico ad una macchina da scrivere, o una stampatrice, o altro equipaggiamento esterno, in modo che il calcolatore non venga rallentato nella sua elaborazione ad alta velocità. L'uscita con macchine da scrivere è la più lenta, con circa 10 caratteri al secondo, e viene impiegata di solito per piccoli calcolatori o per particolari comunicazioni dirette nel caso di quelli più grandi. Il perfezionamento delle stampatrici a linea ad alta velocità ha portato alla realizzazione di unità capaci di stampare 1200 linee di 120 caratteri in un minuto. Vi sono anche dei metodi elettrostatici o fotografici che permettono di arrivare a 6000 linee di dieci caratteri al minuto.

In fig. 9-34 è riportato uno schema semplificato di stampatrice ad alta velocità con ruote stampatrici in continua rotazione. La linea che deve essere stampata viene composta nella memoria di separazione e inviata ai circuiti di comparazione. Le ruote stampatrici ruotano sotto la carta e mediante un contatore, forniscono dei segnali ai circuiti di comparazione. Questi segnali sono in fase con le lettere e i simboli delle ruote di stampaggio e quando un certo simbolo compare sulle ruote di stampaggio, il corrispondente segnale in uscita viene comparato a tutte le uscite della memoria; quando i codici si corrispondono vengono inviati dei segnali ai circuiti che fanno battere il martelletto corrispondente sulla carta, stampando così quel carattere.

Tutti i caratteri eguali vengono stampati simultaneamente dai corrispondenti martelletti, per cui una linea completa di stampa viene effettuata in una sola rotazione delle ruote.

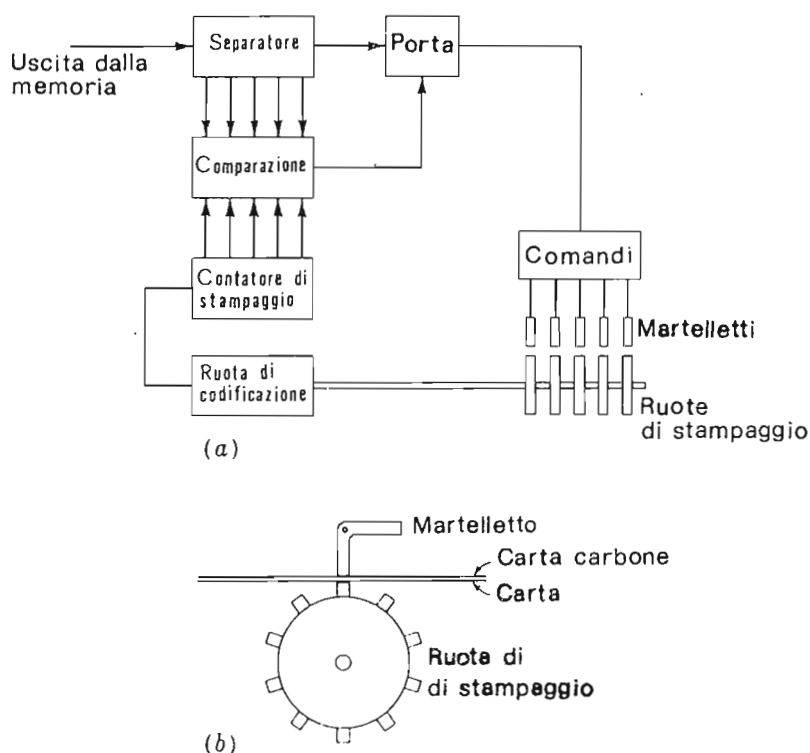



FIG. 9-34 — Stampatore a linee.

9-22. Esempio di un metodo di iterazione.

Nell'allestimento di un programma per il calcolatore è molto utile l'analisi numerica. I metodi numerici sviluppati in passato servivano ad ottenere una buona approssimazione in pochi passaggi, indipendentemente dalla complessità di ogni passaggio. Per il calcolatore invece sono necessari dei passaggi semplici, mentre il numero di questi passaggi non è molto importante. L'integrazione con la regola di Simpson può essere eseguita con metodi manuali e con buona approssimazione con 10 o 20 ordinate, mentre il calcolatore può effettuare 1000 o 10.000 iterazioni del valore delle ordinate senza che si debbano inserire delle istruzioni più complesse. Si può così ottenere qualunque precisione nel processo di integrazione senza dover programmare le varie forme differenti di soluzioni matematiche esatte del processo di integrazione.

Sono particolarmente adatti al calcolatore i processi di iterazione, in cui lo stesso gruppo di operazioni viene ripetuto fino a che è necessario.

Le istruzioni date alla macchina possono così essere ripetute ad ogni passaggio, e solo i dati vengono variati dal calcolatore nei vari passaggi.

Come esempio di metodo numerico, consideriamo il metodo di Newton per ottenere la radice quadrata di un numero x:

$$y_{n+1} = \frac{y_n + x/y_n}{2} \tag{9-46}$$

dove y_n è l'ennesima approssimazione alla radice quadra di x e y_{n+1} è l'approssimazione successiva. Il processo converge abbastanza rapidamente, come sarà dimostrato di seguito. Basta programmare una sola iterazione completa, poi, per mezzo di un'istruzione di salto, il calcolatore può impiegare la sua capacità di prendere delle decisioni per stabilire se la risposta è sufficientemente vicina a quella esatta o se si deve effettuare un'altra iterazione. In questo caso il calcolatore deve determinare se il quadrato di y_{n+1} differisce da x di meno di una quantità determinata δ. Se la differenza è più grande, viene ordinato di ripetere il programma di iterazione; se è più piccola si ha un ordine di uscita e arresto.

Come esempio, calcoliamo la radice quadrata di 25, e scegliamo $y_0 = 1$ per il primo tentativo. Si ha:

$$y_1 = \frac{1 + 25}{2} = 13$$

$13^2 = 169$, per cui l'iterazione continua.

$$y_2 = \frac{13 + 25/13}{2} = 7{,}46$$

Ovviamente il processo continua, e le iterazioni successive daranno valori della radice di 5,40, 5,015 e 5,00002. Il processo può essere arrestato quando $\varepsilon = y_k^2 - 25$ è minore di un valore δ specificato.

PROBLEMI

9-1. Esprimere ciascuna delle otto aree di fig. 9-35 in termini di operazioni AND, OR, NOT sulle variabili X, Y, Z.

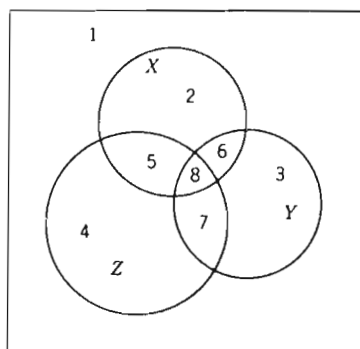



FIG. 9-35

9-2. (*a*) Scrivere i numeri decimali 1274 e 886 in notazione binaria. (*b*) Ripetere il problema in notazione ottale.

9-3. Scrivere i numeri decimali 1022 e 817 in notazione binaria e sommarli; verificare il risultato. (*b*) Effettuare la moltiplicazione degli stessi numeri.

9-4. Dividere il numero decimale 623 per il numero 37 usando l'aritmetica binaria.

9-5. Scrivere l'equivalente ottale del numero decimale 374.

9-6. Qual'è l'equivalente ottale del numero binario 111001011?

9-7. Scrivere il numero decimale 1296 in forma decimale con codificazione binaria.

9-8. Sottrarre il binario 10010 dal binario 11000, usando il complemento.

9-9. Un fattore ha una capanna con due stalle, in cui deve rinchiudere un lupo, una capra e la sua provvista di cavoli per l'inverno. Egli vorrebbe dormire, ma se gli animali fossero lasciati incustoditi, il lupo attaccherebbe l'uomo o mangierebbe la capra, e la capra mangerebbe i cavoli. Come deve disporre i suoi averi in modo da poter anche dormire?

9-10. Mostrare che

$$XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$$

9-11. Semplificare $\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$ e mostrare che questa relazione può essere realizzata con un interruttore.

9-12. Semplificare le espressioni:

$$A + \bar{B} + A\bar{B} + (A + \bar{B})\bar{A}B$$
$$(A + \bar{B})\bar{A}\overline{BC}$$
$$A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{C}A$$
$$AB\bar{C}D + B\bar{C}\bar{E} + AE$$

9-13. Trasferire in una somma di due termini le espressioni:

$$(A + BC)(\bar{A} + \bar{D} + \bar{E})$$
$$(A\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})[D + (E + F)G]$$

9-14. Disegnare un circuito elettrico corrispondente all'espressione logica:

$$M = (A + B)(X + Y + Z)$$

9-15. Utilizzando un sistema numerico basato sui simboli 0, 1, 2, 3, scrivere gli equivalenti dei numeri decimali da 1 a 25.

9-16. Ridurre le reti di fig. 9-36 *a* e *b* rispettivamente a tre e quattro interruttori.

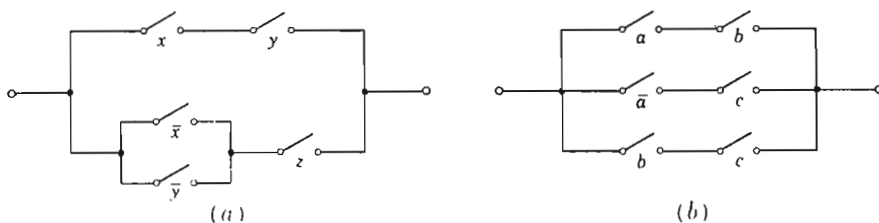



FIG. 9-36

9-17. Mostrare che un circuito NAND a due stadi con ingressi A, B, C, D ha un funzionamento equivalente a quello di due circuiti AND e un circuito OR, ossia ad una uscita AB + CD.

9-18. Utilizzando la logica a diodi, progettare un circuito elettronico completo per un sommatore completo, in base allo schema a blocchi di fig. 9-19.

9-19. Progettare un circuito con una matrice a diodi per convertire i numeri binari in numeri ottali.

9-20. Suggerire un circuito per il circuito di comparazione e la porta di fig. 9-32.

9-21. Calcolare la radice quadrata di 384,27 col metodo di Newton con una precisione migliore di 0,00003.

BIBLIOGRAFIA

1. BURKS A. W.: Electronic Computing Circuits of the ENIAC, *Proc. IRE*, **35:** 756 (1947).
2. SIEGEL PAUL: "Understanding Digital Computers," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
3. RICHARDS R. K.: "Arithmetic Operations in Digital Computers," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1955.
4. MARCUS M. P.: "Switching Circuits for Engineers," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
5. SCOTT N. R.: "Analog and Digital Computer Technology," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
6. *Proc. IRE*, Computer Issue, **41:** 1219-1568 (1953).
7. PAGE C. H.: Digital Computer Switching Circuits, *Electronics*, **21:** 110 (September, 1948).
8. HARRIS J. R.: Direct-coupled Transistor Logic Circuitry, *IRE Trans. Electron. Computers*, **EC-7:** 2 (March, 1958).
9. CALDWELL S. H.: "Switching Circuits and Logical Design," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.
10. KARNAUGH M.: The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits, *Trans. AIEE*, **72:** 593 (1953).
11. GREGORY R. H., and P. L. VAN HORN: "Automatic Data-processing Systems," Wadsworth Publishing Company, Inc., San Francisco, 1960.
12. WRUBEL M. H.: "A Primer of Programming for Digital Computers," McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
13. WEISS E. A.: "A Programming the IBM 1620," McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

CAPITOLO X

LA CONVERSIONE ANALOGICO-NUMERICA; SISTEMI DI CODIFICAZIONE

Le grandezze fisiche ordinariamente si presentano in forma analogica e continue nel tempo; invece i calcolatori numerici operano con numeri e con dati discreti. Perciò se si vuole usare una apparecchiatura numerica per controllare grandezze fisiche o per risolvere problemi in cui entrano queste grandezze, occorrono dei dispositivi che eseguano una *campionatura* dei dati analogici e li *codifichino* in forma numerica, oppure che eseguano l'operazione opposta di *decodificazione*, cioè la riconversione in forma analogica della informazione risultante dall'elaborazione dei dati di partenza.

L'applicazione delle apparecchiature di calcolo numerico alla risoluzione di problemi fisici è importante soprattutto per la velocità, accuratezza e capacità di calcolo del calcolatore numerico. Vi sono tre tipi fondamentali di applicazioni: conversione di dati, sistemi di controllo programmati, sistemi di controllo reazionati.

10-1. Sistemi analogico-numerici.

Un esempio di conversione di dati è fornito dalla elaborazione numerica dei dati ottenuti in una galleria a vento ipersonica, nella quale un'intero esperimento spesso dura solo una frazione di secondo. Occorre allora rilevare rapidamente i dati analogici sul modello di aeroplano o di razzo in modo da avere un gran numero di valori ed il calcolo dei risultati e le curve relative devono essere completati pochi minuti dopo l'esperienza in modo da non ritardare eccessivamente le ricerche. Un sistema capace di rilevare qualche centinaio di dati analogici e di stampare o porre in grafico molte migliaia di punti sarà costituito dagli elementi indicati in fig. 10-1*a*.

Un esempio di sistema di controllo funzionante secondo le istruzioni provenienti da un programma numerico è quello di una macchina utensile a controllo numerico quale la fresatrice o il tornio; gli elementi componenti il sistema sono riportati in fig. 10-1*b*. Le istruzioni di funzionamento sono ordinariamente registrate su nastro perforato e sono quindi in forma numerica. Ciascuna istruzione dice alla macchina dove deve essere eseguita l'ope-

razione rispetto alla posizione attuale della testa che taglia; questa istruzione è data di solito come spostamento su ciascuna delle tre coordinate.

Se ad esempio la macchina può compiere degli spostamenti minimi di 0,0013 cm (0,0005 pollici), l'istruzione indica quanti di questi passi devono essere compiuti lungo ciascuno dei tre assi. Le operazioni di taglio dei metalli sono lente rispetto alle normali velocità dei calcolatori, per cui è possibile usare memorie a relè ed operare in serie.

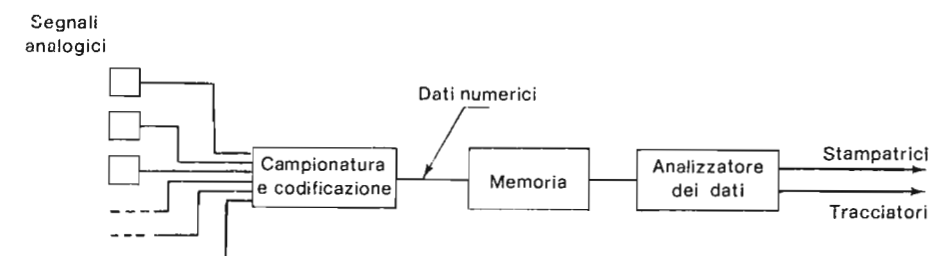
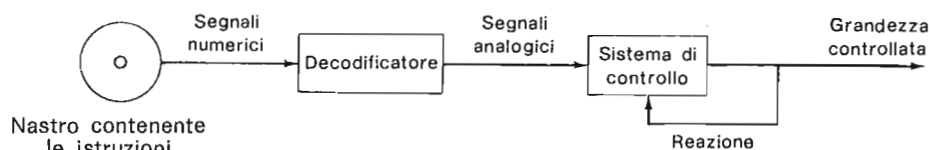
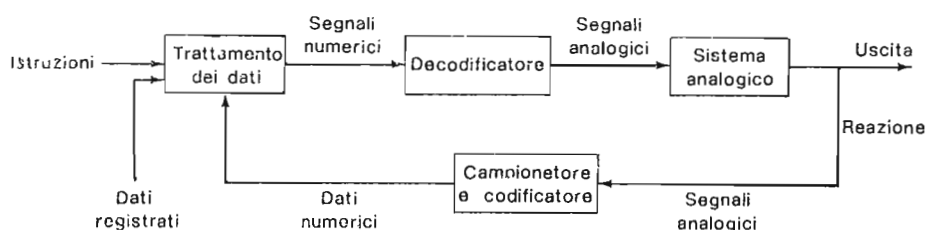



FIG. 10-1 — Esempi di sistemi analogico-numerici

Un controllo di combustione o di un processo chimico può essere realizzato con gli elementi indicati in fig. 10-1*c*. In questo caso i comandi di ingresso sono pochi e si riferiscono al funzionamento complessivo, lasciando al calcolatore numerico il compito di fornire istruzioni più dettagliate ai vari componenti dell'apparecchiatura, in modo da eseguire le istruzioni del programma iniziale in maniera ottimale.

Una parte importante di questo sistema è il « data logging » cioè la re-

gistrazione dei dati che indicano il funzionamento delle varie parti del sistema. A partire da questi dati, il calcolatore genera i comandi di apertura o chiusura di valvole, regolazione del combustibile, eccetera, in modo da ottimizzare le condizioni del processo.

Elementi comuni a tutte queste applicazioni sono i *codificatori* che convertono i segnali analogici in forma numerica e i *decodificatori*, che traducono i risultati forniti dal calcolatore nuovamente in segnali e comandi analogici. Le apparecchiature numeriche per il controllo dei processi fanno uso di circuiti logici, aritmetici, di memorie e dei sistemi di controllo esaminati precedentemente.

10-2. Campionatura ed immagazzinamento dei campioni.

Il più grave problema che si incontra nella conversione dei dati analogici in forma numerica, è quello di eseguire la campionatura del segnale analogico ad intervalli fissi in modo da tradurre i dati continui in una serie di valori discreti. Ovviamente, se un segnale variabile viene campionato ad una velocità molto alta rispetto al periodo di variazione del segnale, l'inviluppo delle ampiezze dei campioni approssimerà molto bene la forma del segnale di partenza. L'inconveniente è che per trasmettere questi campioni occorrerà un sistema a larga banda passante con conseguente spreco di capacità del canale e delle apparecchiature, rispetto al contenuto di informazione.

La serie di Fourier o la trasformata di Fourier consentono di rappresentare ogni segnale variabile mediante una serie discreta di frequenze. Cioè, per una funzione periodica,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, \varepsilon^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

in cui

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, \varepsilon^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \, dt \tag{10-1}$$

Mentre se f(t) è non periodica, si può scrivere,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \, \varepsilon^{j\omega t} \, d\omega$$

e

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \varepsilon^{-j\omega t} \, dt \tag{10-2}$$

dove $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier della f(t).

Il *teorema del sampling* stabilisce a quale velocità occorre eseguire la campionatura di un segnale analogico. Se $F(\omega) = 0$ per $|\omega| \geq \pi/T$, cioè se f(t) non possiede componenti di frequenza superiore a metà della frequenza di campionatura 1/T, allora un segnale f(t) può essere completamente ricostruito a partire dalla f*(t), dove f*(t) è la f(t) campionata alla frequenza 1/T.

Il teorema dice che occorrono più di due segnali per ogni ciclo della più alta frequenza presente nel segnale di ingresso per ricostruire questo segnale. Data la frequenza di campionatura, e quindi fissata la banda passante delle apparecchiature, occorre filtrare il segnale in modo da eliminare tutte le componenti a frequenza più alta della metà della frequenza di campionatura.

La presenza delle frequenze più alte altererebbe la forma d'onda delle componenti a frequenze più basse e porterebbe a campioni poco precisi quando la frequenza di campionatura è bassa. In fig. 10-2 è messo in evidenza l'effetto che si ottiene se non si esegue il filtraggio; in essa compare una componente di frequenza pari a 2,5 volte la frequenza di campionatura sovrapposta ad un valore continuo costante. È evidente la casualità dei valori dei campioni, i quali non hanno alcuna relazione con la situazione effettiva.

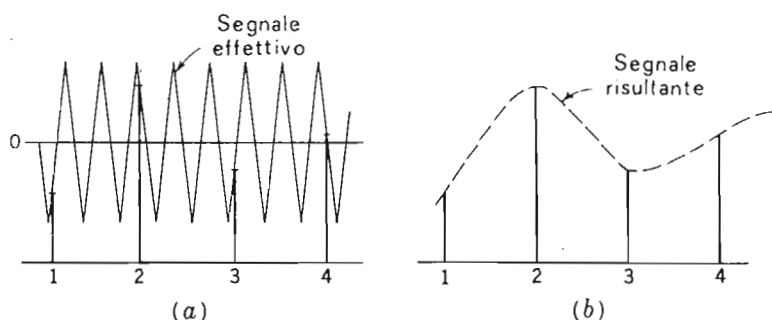



FIG. 10-2 — Campionatura eseguita a velocità pari ad un quinto di semiperiodo.

Ci si può chiedere cosa accade a fissare la frequenza di campionatura ad un valore prossimo a 2f del segnale. Si trova che in generale è consentito avvicinarsi molto al limite teorico di due campioni per ciclo; sembra però che occorra eseguire un'esperienza sul particolare sistema in questione per avere una risposta esatta. Bisogna notare tuttavia che un filtro passa-basso non taglia esattamente ma piuttosto attenua sempre di più l'uscita all'aumentare della frequenza per cui egualmente non è possibile stabilire il valore della componente a più alta frequenza.

Idealmente, il campione dovrebbe rappresentare il valore del segnale all'istante della campionatura. In realtà può esservi una certa variazione del

valore dell'ingresso mentre si preleva il campione, per cui può esservi un certo errore. Inoltre è necessario conservare il valore del campione per un tempo sufficientemente lungo per azionare i circuiti di quantizzazione o di misura, i quali traducono l'ampiezza del campione in un codice, di solito sotto forma di rappresentazione binaria.

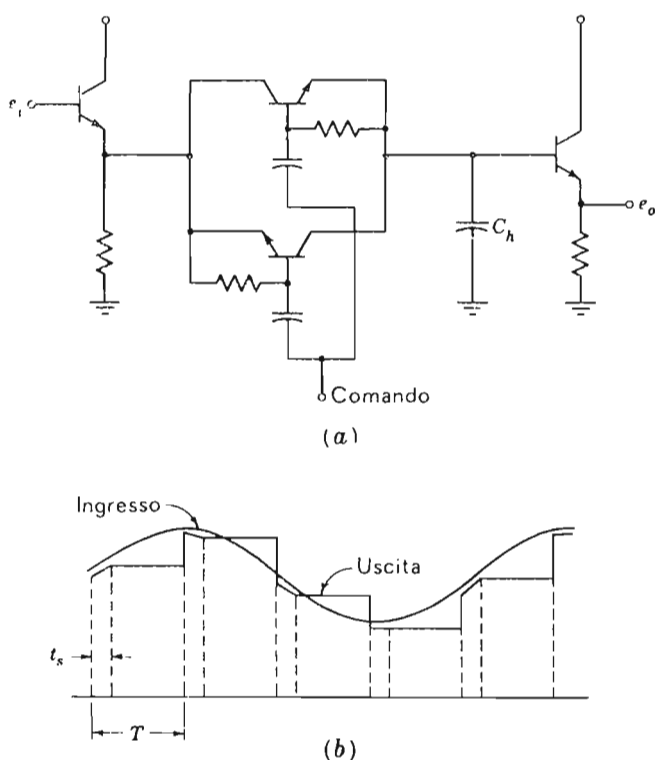



FIG. 10-3 — Circuito che forma e conserva i campioni e suo modo di funzionare.

In fig. 10-3 è riportato un semplice circuito capace di eseguire la campionatura e quindi di conservare l'ampiezza del segnale per un periodo T. Durante il periodo t_s di campionatura, la tensione di comando apre la doppia porta (*gate*) a transistori e la tensione che compare ai capi del resistore del primo inseguitore di emettitore viene trasferita al condensatore C_h attraverso l'una o l'altra *gate*. Occorrono due *gate* perché la tensione presente su C_h in conseguenza della campionatura precedente, può essere superiore o inferiore a quella del nuovo campione per cui la corrente di carica può passare in entrambi i versi. Durante l'intervallo T-t_s, la tensione ai capi del conden-

satore è praticamente costante e viene trasmessa tramite il resistore di uscita del secondo inseguitore di emettitore.

10-3. Conversione analogico-numerica: ingresso elettrico.

Quando la grandezza analogica è una tensione variabile, si preferisce convertire l'ampiezza campionata in un intervallo di tempo ad essa proporzionale e contare il numero di impulsi generati, durante questo intervallo di tempo, da un oscillatore a cristallo piezoelettrico.

Il conteggio di questi impulsi, eseguito mediante un contatore binario, fornisce l'ampiezza del campione direttamente sotto forma di numero binario.

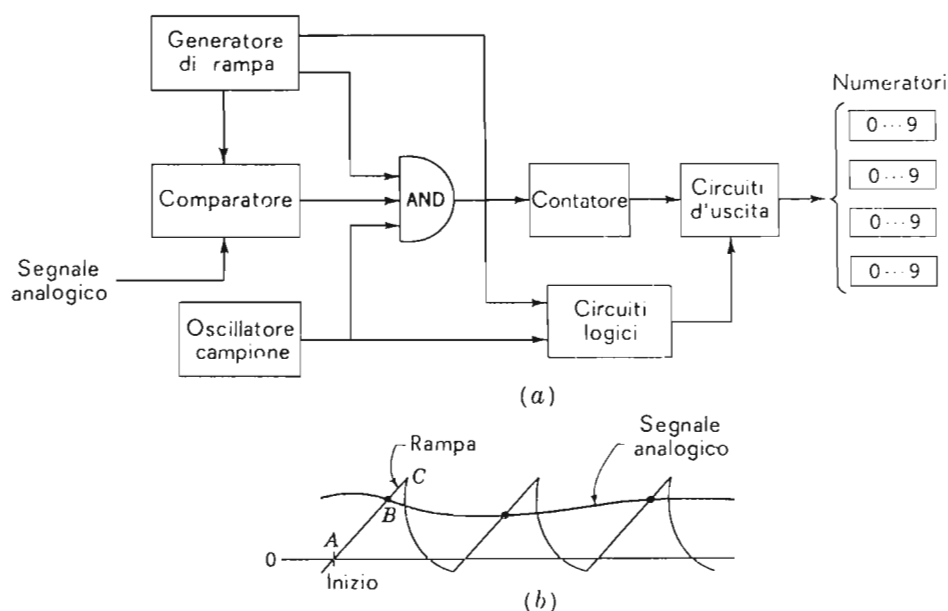



FIG. 10-4 — Metodo elettrico di conversione analogico-numerica.

In fig. 10-4*a* è riportato un diagramma semplificato. La misura inizia quando la tensione della rampa passa per zero, poiché occorre che la tensione della rampa sia positiva perchè il circuito « and » si apra. Finchè la tensione del segnale a rampa è inferiore a quella del segnale analogico, il comparatore fornisce un segnale al circuito « and » e gli impulsi dell'oscillatore campione giungono al contatore. Quando si raggiunge la uguaglianza fra la tensione della rampa ed il segnale analogico (punto B), il comparatore genera un impulso che blocca la *gate* ed arresta il conteggio.

Quando la rampa raggiunge un certo valore massimo C, il circuito logico abilita il trasferimento del conteggio eseguito ai numeratori decimali attraverso le *gate* di uscita.

Successivamente il controllo logico riporta a zero il generatore di rampa e si può iniziare la misura di un nuovo campione. Nell'intervallo fra due conteggi viene conservata l'indicazione dell'ultimo valore misurato. La frequenza di campionatura ed il numero di impulsi corrispondenti ad 1 volt di ingresso possono essere regolati dall'operatore attraverso il controllo della logica dell'apparecchio. È possibile inoltre trasferire i valori in uscita ad una stampatrice. Il valore della grandezza può essere dato con quattro, cinque, e anche più cifre significative.

Un tipo di *comparatore di tensione* è il multivibratore monostabile ad accoppiamento catodico mostrato in fig. 10-5.

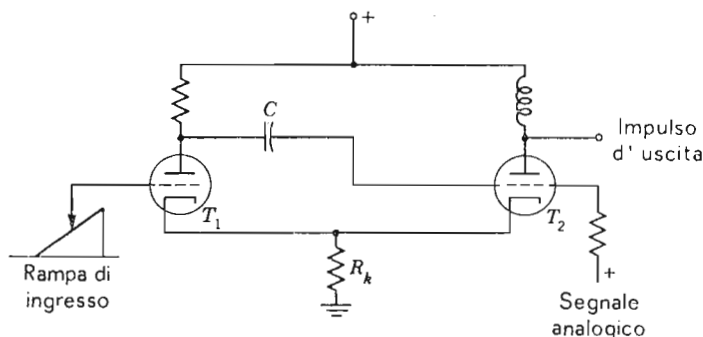



FIG. 10-5 — Un circuito comparatore.

La rampa ed il segnale di ingresso vengono applicati alle due griglie; T_2 conduce perché il segnale è positivo. La corrente anodica di T_2 circolando in R_k interdice fortemente T_1. Al crescere della tensione della rampa, aumenta la tensione sulla griglia di T_1. Ad un certo valore della rampa, T_1 andrà in conduzione ed il circuito cambierà stato. Appena T_1 va in conduzione, la sua tensione anodica si abbassa e C si scarica attraverso il resistore del circuito di ingresso di T_2.

Questa diminuzione di tensione porta T_2 al disotto della interdizione; appena la corrente si annulla si produce un impulso ai capi di L nel circuito anodico, impulso che indica che i due segnali sono approssimativamente uguali. Un amplificatore posto all'ingresso di T_2 rende la comparazione più precisa per effetto del proprio guadagno; così diminuisce l'incertezza dello istante di tempo in cui si segnala l'uguaglianza delle due tensioni.

Poiché la velocità di campionatura è assai bassa, il segnale deve essere

praticamente continuo; il rumore può produrre un'incertezza nella lettura o dei salti casuali del valore letto, per cui conviene filtrarlo.

Alcuni trasduttori meccano-elettrici generano una frequenza variabile come misura di una tensione, di una pressione ed altre grandezze simili.

Si può ottenere una conversione in codice binario a mezzo di un oscillatore campione e due contatori. Un contatore totalizza gli impulsi provenienti dall'oscillatore campione, ossia misura con precisione gli intervalli di tempo; questo stesso contatore apre una *gate* all'inizio del conteggio e la chiude alla fine. La frequenza che si vuole misurare o convertire in codice binario, viene inviata nel secondo contatore durante l'intervallo di tempo misurato. Il numero registrato in questo secondo contatore misura con precisione la frequenza analogica.

La fig. 10-6 mostra un altro metodo di codificazione elettrica di una tensione analogica, realizzata paragonandola ai successivi valori di una tensione interna. La sequenza di 1 e 0 corrispondenti ai diversi valori calibrati inseriti per la misura esprime in codice binario il valore della tensione analogica applicata all'ingresso. Questo è in pratica un metodo potenziometrico.

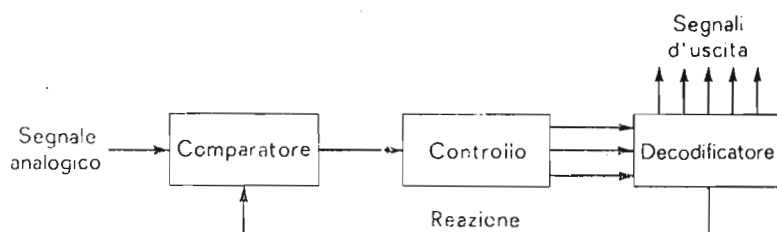



FIG. 10-6 — Codificatore binario a comparatore.

Nel decodificatore si trova un insieme di tensioni di valore proporzionale ad 1, 2, 4, 8, . . . prodotte da cadute ai capi di resistori di precisione. Il circuito di controllo realizza diverse combinazioni di queste tensioni fino ad ottenere l'uguaglianza fra l'uscita del decodificatore e la tensione analogica di ingresso, condizione che viene indicata da un segnale prodotto dal comparatore e che arresta il processo. Una sorgente inserita indica un 1 nella corrispondente posizione binaria, mentre una sorgente esclusa produce uno zero.

Durante il funzionamento, il circuito di controllo inserisce la sorgente relativa al valore più alto S_n. Se il comparatore indica che l'ingresso analogico è più grande di S_n, cioè che la differenza è positiva, allora S_n viene lasciata inserita; se la differenza è negativa, S_n viene disinserita. Il circuito di controllo inserisce la S_{n-1} lasciandola inserita o escludendola a seconda del risultato del paragone.

Questo processo continua finchè non sono state inserite tutte le sorgenti, fino alla meno significativa. La tensione di uscita è quindi la somma delle sorgenti lasciate inserite. Eseguita la prova con l'ultima sorgente, il numero di bit che ne deriva a seconda che siano inserite o disinserite, viene trasmesso come valore della tensione di ingresso in codice binario con l'errore massimo di $+1$ bit.

La precisione di un codificatore di questo tipo dipende dalla precisione delle tensioni di alimentazione e del comparatore; quest'ultimo può essere migliorato amplificando la tensione differenza che si applica ad esso.

10-4. Conversione analogico-numerica, sistema a raggi catodici.

Il metodo prima illustrato non è adatto per segnali che variano rapidamente; tuttavia è stato studiato un tipo speciale di tubo a raggi catodici adatto ad eseguire la campionatura della voce o di altre forme d'onda nei casi in cui la frequenza di campionatura debba essere elevata. Per la voce la frequenza adottata è di circa 8000 volte al secondo; si riesce così a campionare le frequenze contenute nella voce fino ad oltre 3000 Hz ed a trasmetterle in forma numerica.

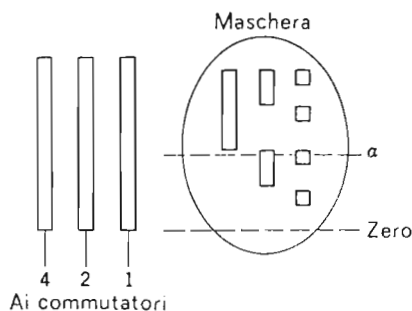



Fig. 10-7 — Tubo quantizzatore a raggi catodici ad otto livelli.

Questo speciale tubo a raggi catodici è costituito di una maschera come quella di fig. 10-7 dietro la quale si trovano tre bersagli. Un ventaglio orizzontale di elettroni viene deviato in senso verticale dalla tensione del segnale in esame. Una parte di questo ventaglio di elettroni passa attraverso i diversi buchi della maschera e raggiunge gli elettrodi che contano per uno-due o quattro. Per ogni campione viene applicato un impulso di deflessione, e gli elettrodi colpiti dagli elettroni rispondono con un 1, gli altri con uno zero. I numeri binari si possono leggere in serie o in parallelo secondo il modo in cui si effettua il collegamento dei vari elettrodi.

Nella fig. 10-7 è mostrato un sistema con una maschera che quantizza il segnale mediante tre soli bit; ordinariamente si usano cinque o sei bit per ottenere una misura più precisa.

Impiegando 6 bit è possibile distinguere solo 64 livelli ed è pertanto possibile un errore intrinseco del 2% circa. Inoltre, il raggio di elettroni ha una ampiezza finita in senso verticale per cui nel caso di una posizione come la *a* può accadere di trovare impulsi in tutte e tre le colonne, cioè un 7 mentre il raggio effettivamente è solo alla sommità del terzo livello. Questa ambiguità nella lettura si trova anche nei codificatori analogici di tipo meccanico; una soluzione di questo problema verrà studiata nei paragrafi relativi ai codici.

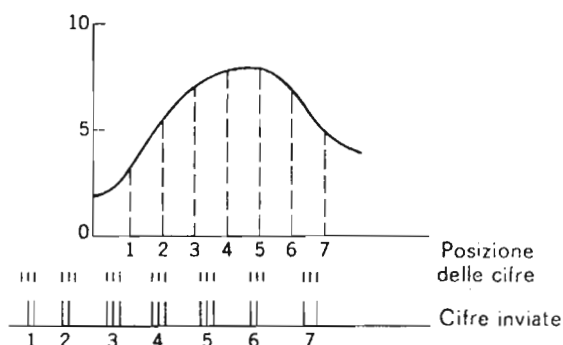



FIG. 10-8 — Espressione in forma numerica di una tensione qualunque.

10-5. Conversione analogico-numerica: codificatori a posizione angolare.

Un'informazione numerica si può ottenere direttamente mediante trasduttori sui quali è riportato un codice che ne indica la posizione e che viene letto da un sistema di spazzole o da un insieme di fotocelle ed un raggio di luce.

Esempio di un disco che esegue una codificazione binaria è quello di fig. 10-9, mediante il quale si traduce in forma numerica la posizione angolare di un albero. Se le zone nere sono conduttrici e quelle bianche no, le spazzole che toccano la superficie del disco generano un 1 se si trovano su un segmento conduttore. Una fila di spazzole disposta sulla retta indicata in figura leggerà 0101, cioè 5 in codice decimale.

Il disco mostrato in figura ha una risoluzione di 16, ma vi si potrebbero riportare molte altre zone in codice.

Con le spazzole, la minima superficie di contatto è circa 0,013 cm, quindi

il più stretto segmento praticamente utilizzabile è lungo 0,052 cm. Questo fatto limita la risoluzione a circa 1^0 su un disco di 10 cm di diametro.

È possibile una maggiore precisione mediante codificatori ottici in cui le maschere sono ottenute con processi fotografici di riduzione; in questo caso le fenditure che consentono il passaggio della luce possono essere larghe qualche micron, e nelle zone più esterne del disco si possono disporre fino a 16.000 segmenti.

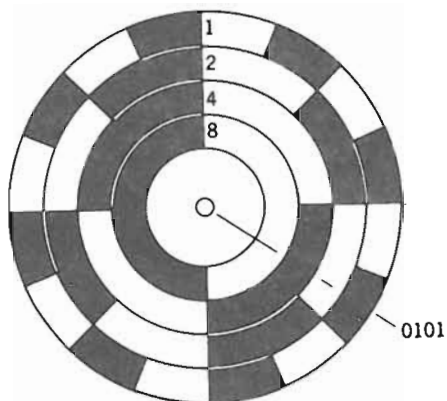



Fig. 10-9 — Disco codificatore della posizione angolare di un albero, a codice binario.

Problemi meccanici relativi agli ingranaggi ed ai cuscinetti limitano la precisione ad un livello inferiore a quello che può essere ottenuto con la lettura elettrica. Inoltre sia con delle spazzole di dimensioni finite che con raggi di luce si ottiene una determinazione poco precisa ogni volta che più segmenti passano contemporaneamente da 0 ad 1 o da 1 a zero, come si è visto nel caso del codificatore a raggi catodici. Nel seguito si esaminerà come può risolversi questo problema.

Per i dispositivi che ruotano continuamente, si usano altri tipi di codificatori come ruote dentate con conteggio fotoelettrico continuo, o campi magnetici rotanti ed avvolgimenti di accoppiamento.

10-6. Conversione numerico-analogica.

La *decodificazione*, cioè la riconversione di un segnale numerico in forma analogica, è spesso impiegata nei controlli. Nella sua forma più semplice, un convertitore binario-analogico potrebbe essere realizzato sommando un certo numero di batterie di valore appropriato e crescente come le potenze

di due, collegate con interruttori comandati dal numero binario. In pratica sono più adatti amplificatori sommatori come quello di fig. 10-10 che sfruttano lo stesso principio di sommare tensioni o correnti di valori proporzionali alla grandezza indicata dalle posizioni delle cifre binarie. Per esempio, l'amplificatore di fig. 10-10*a* presenterà un guadagno dato da

$$\frac{e_o}{e_i} = - \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k R}{R} \tag{10-3}$$

con gli interruttori k azionati dagli 1 presenti nel segnale.

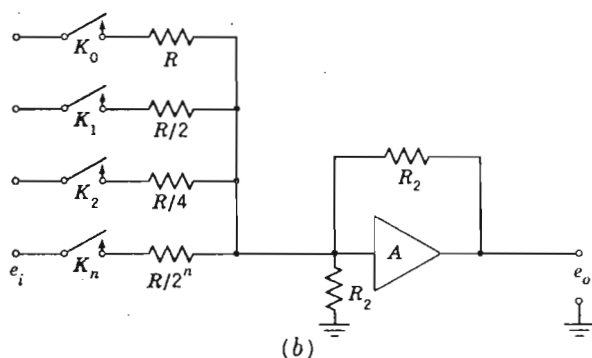
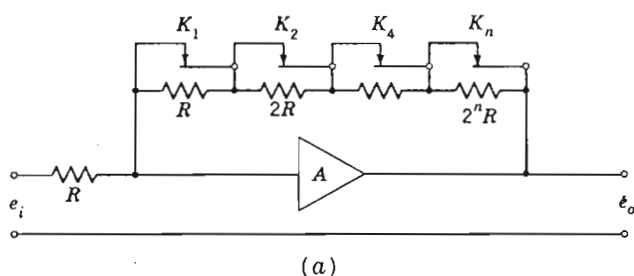



FIG. 10-10 — Decodificatori numerico-analogici.

Shannon ha realizzato un semplice decodificatore per il codice binario, adatto a funzionare ad alta velocità poichè utilizza una sola *gate*. Questo circuito è riportato in fig. 10-11.

Il tempo totale necessario per trasmettere gli n impulsi che costituiscono il numero binario alla *gate* è T, uguale a n periodi P degli impulsi: $T = nP$.

La costante di tempo RC viene scelta in modo tale che la carica del condensatore, cioè la tensione, decresca della metà del suo valore iniziale Q durante l'intervallo P che intercorre fra due 1 consecutivi. Dato che la carica

si dimezza in corrispondenza di ciascun impulso, il suo valore sarà $\left(\frac{1}{2}\right)^n Q$ dopo il passaggio di *n* impulsi.

La *gate* viene chiusa ogni volta che si trova un 1 nel numero in ingresso e resta chiusa per un intervallo di tempo molto preciso e piccolo rispetto a P. Così il condensatore C riceve dal generatore, a corrente costante, una carica costante Q ed il suo potenziale varia di un valore fisso. Durante l'intervallo fra gli impulsi, il condensatore C si scarica ed E tende al valore V.

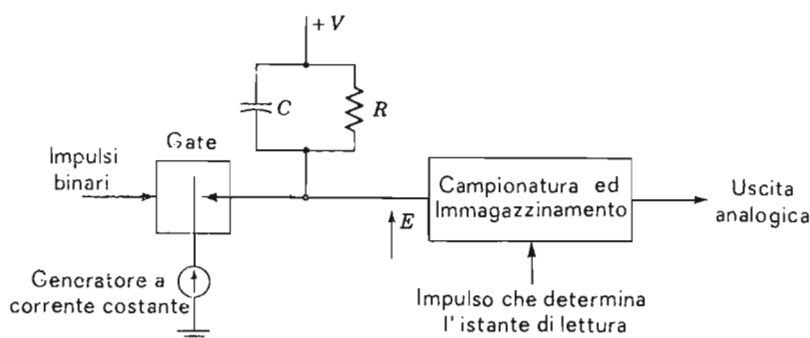



Fig. 10-11 — Decodificatore binario di Shannon.

Supponiamo che C sia stato scaricato mediante un segnale, proveniente dal circuito di controllo, il quale indica che ha inizio il conteggio. Un primo impulso può trovarsi nella posizione 2^0 il che produce l'immagazzinamento della carica Q in C. Dopo il tempo corrispondente ad *n* impulsi, questa carica si è ridotta a $Q/2^n$ alla fine del conteggio, all'istante T. Un secondo impulso può trovarsi nella posizione corrispondente a 2^1; esso introdurrà una seconda carica Q, la quale, alla fine del conteggio, si sarà ridotta al valore $Q/2^{n-1}$. Un impulso nella posizione corrispondente a 2^2 dà luogo ad una terza carica Q la quale alla fine si sarà ridotta a $Q/2^{n-2}$. Pertanto, all'istante T la carica del condensatore sarà

$$Q_T = \frac{K_0 Q}{2^n} + \frac{K_1 Q}{2^{n-1}} + \frac{K_2 Q}{2^{n-2}} + \dots + \frac{K_n Q}{2^0} \tag{10-4}$$

in cui K_j è uguale ad 1 o a zero secondo il valore della cifra binaria che occupa quella posizione. La tensione di uscita è

$$E_T = \frac{Q_T}{C} = \frac{Q}{2^n C} (K_0 2^0 + K_1 2^1 + \dots + K_n 2^n) \tag{10-5}$$

ed ha un valore legato alla posizione delle diverse cifre binarie.

L'istante di lettura deve trovarsi esattamente alla fine dell'impulso 2^n, cioè all'istante T = nP, dato che dopo il tempo T, C continua a scaricarsi ed il valore di E cambia.

10-7. Alcuni semplici codici binari.

Poichè è possibile progettare in diversi modi sia le matrici di diodi che eseguono la codificazione che gli amplificatori o i meccanismi che decodificano, la scelta del codice binario è molto più arbitraria di quanto sia sembrato finora. La scelta non è neanche limitata ai codici binari, benchè quasi tutti i codici sono scritti mediante due soli livelli, 1 e 0, perchè in questo modo si hanno i circuiti più semplici. Lo studio di alcuni sistemi di codificazione delle 10 cifre decimali, dimostrerà che vi sono parecchi vantaggi ad impiegare alcuni di questi sistemi.

Il codice binario BCD (dall'Inglese: Bynary-Coded-Decimal) è quello più comunemente usato per l'ingresso dei dati nei calcolatori, soprattutto se l'apparecchiatura di ingresso è un nastro perforato (un esempio è in fig. 9-33). Occorrono quattro cifre binarie, o livelli, per codificare le dieci cifre decimali, ed ogni cifra del numero decimale è rappresentata da un numero binario secondo la Tabella 19.

TABELLA 19 — Codice BCD

	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Il numero decimale 834 sarà allora rappresentato da

1000 0011 0100

Questo sistema differisce dal sistema binario puro per il fatto che il numero decimale viene convertito in binario cifra per cifra; nell'interno del calcolatore, se si vuole, il numero può essere convertito in binario puro.

Il codice BCD comporta dei sistemi di ingresso molto semplici ma spreca molti bit perché si serve solo di 10 delle 16 combinazioni di 4 bit.

Ci sono alcuni vantaggi se si scelgono invece le dieci combinazioni intermedie; si ottiene così il *codice ad eccesso tre*. Ciascun numero in questo caso è l'equivalente, in codice binario, del numero decimale indicato più tre, come è mostrato nella Tabella 20.

TABELLA 20 — Codice ad eccesso 3

0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	0
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0

Un vantaggio del codice *ad eccesso tre* è che il numero zero non viene espresso mediante una totale assenza di impulsi; è così facilitato il controllo dei guasti del circuito di ingresso.

Inoltre, i complementi a nove si ottengono facendo il complemento di tutti i bit. Cioè 1 e 8 si ottengono l'uno dall'altro scambiando gli zeri in 1 e viceversa, e così pure 2 e 7, 3 e 6, 4 e 5. La simmetria di questo codice semplifica il progetto dei circuiti aritmetici che eseguono le sottrazioni.

Se, invece di scegliere i dieci numeri intermedi della tabella binaria, si scelgono le prime dieci combinazioni aventi non più di due 1, si ottiene il codice 7421 riportato in Tabella 21.

TABELLA 21 — Codice 7421

	7	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	1	0	0	0
8	1	0	0	1
9	1	0	1	0

10-8. Il codice Gray o binario riflesso.

Si è già osservato che un'incertezza dovuta al contatto o alla posizione delle spazzole può portare ad errori notevoli, quando per dispositivi di con-

versione analogico-numerica del tipo dei dischi a codice si fa uso del codice binario puro. Gli errori dipendono dal fatto che può capitare che due o più bit passino contemporaneamente da 0 ad 1 o da 1 a 0, e che una spazzola commuti prima dell'altra. In questo caso gli errori di lettura possono essere notevoli. È perciò vantaggioso in queste applicazioni fare uso di un codice nel quale cambia un solo bit per volta. Un codice di questo tipo è quello di *Gray o binario riflesso* riportato nella Tabella 22.

TABELLA 22 — Il codice di Gray o binario-riflesso

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	0
12	1	0	1	0
13	1	0	1	1
14	1	0	0	1
15	1	0	0	0

Si osservi che il codice viene costruito *riflettendo* le tre posizioni di ordine inferiore, cioè quelle comprese nel rettangolo tratteggiato, intorno alla linea fra 7 ed 8. La metà superiore della colonna 1 è di tutti zeri mentre nella metà inferiore vi sono tutti 1. Questo spiega il nome di *codice binario riflesso.*

Le prime 10 delle 16 combinazioni vengono usate per formare un codice riflesso BCD, comunemente usato nella conversione analogica. È possibile costruire anche un codice riflesso « più tre ».

10-9. Codici che consentono di individuare gli errori.

Benché la codificazione binaria semplifichi notevolmente le apparecchiature, c'è una possibilità di errore dovuta al fatto che i simboli 1 e 0 sono dati mediante presenza o assenza di un impulso. Perciò un guasto nel sistema, per esempio un relè che non fa contatto, anche solo per la durata di un impulso, dà un falso segnale zero al posto di 1. La possibilità di un errore di questo tipo o quella che il rumore produca un falso 1 quando in realtà non viene inviato alcun segnale, ha dato origine ad una famiglia di codici più complessi, dotati di varie possibilità di controllo per individuare gli errori.

Il *codice bi-quinario* è un esempio semplice di codice capace di individuare un singolo errore. Esso fa uso di sette bit: la sua maggiore complessità è il prezzo che si paga per poter individuare gli errori.

I bit vengono scritti in due gruppi: un gruppo è formato da due bit per i numeri 5 e 0; l'altro gruppo è di cinque bit per i numeri 4, 3, 2, 1 e 0, come è mostrato dalla Tabella 23. Questo codice si controlla da sè perchè ciascun numero deve contenere sempre due 1. La presenza di un solo errore produce sempre un 1 dove dovrebbe esservi uno zero, o modifica un 1 in uno zero. In entrambi i casi si troverà un numero dispari di 1, condizione che può essere utilizzata da un'apparecchiatura di controllo per segnalare all'operatore la presenza di un errore. Vengono anche segnalati gli errori doppi cioè due 1 o due 0 sbagliati, mentre non vengono segnalati gli errori che danno luogo a due inversioni opposte.

TABELLA 23 — Codice bi-quinario

	5	0	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0

In generale, si può ottenere un codice che individua un singolo errore aggiungendo un bit di controllo ad un codice che non ha controllo di errore.

I codici che così si ottengono sono progettati in modo che il numero di 1 sia sempre dispari o sempre pari. Se il numero di bit è pari si ha un *codice a parità pari* mentre se è dispari si ha un *codice a parità dispari.*

Si preferiscono di solito i codici a parità dispari perchè si evita che un numero sia formato da tutti zero. I codici della Tabella 24 individuano un singolo errore, mentre un numero contenente un doppio errore viene confuso con un numero esatto.

Durante il funzionamento, l'apparecchio ricevitore esamina il numero che riceve e, se il numero complessivo di 1 non è giusto, aziona un segnale di allarme e arresta il processo. È perciò utile introdurre il controllo di parità nel progetto di un'apparecchiatura.

TABELLA 24 — Codice BCD ridondante

Parità pari						Parità dispari				
8	4	2	1	R		8	4	2	1	R
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	2	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	3	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	4	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	5	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	6	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	7	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	9	1	0	0	1	1

10-10. Codice che corregge gli errori.

È possibile costruire dei codici complicati i quali non solo sono capaci di individuare gli errori, ma anche di determinare quali bit sono sbagliati. Questi codici richiedono delle apparecchiature complesse, ma sono giustificati quando il numero di dati da trattare è molto grande. Un esempio di codice capace di correggere un singolo errore è quello di Hamming.

Questo codice prevede m bit per l'informazione e K bit di controllo in ciascuna parola. I K bit di controllo sono disposti in modo tale da indicare in quale dei bit ricevuti si trova l'errore. Cioè, i K bit stabiliscono una parità pari per alcune posizioni della informazione ed identificano la posizione degli $m+K$ errori possibili, oltre alla possibilità che non vi sia errore. Ne segue dunque che

$$2^K \geq m + K + 1$$

Se m ha un valore compreso fra 2 e 4 occorrono tre bit di controllo; per m compreso fra 5 e 11 occorrono 4 bit di controllo.

Le posizioni dei bit m e K si assegnano nel modo seguente: si numerano le posizioni da sinistra a destra e si assegnano ai K bit di controllo tutte le posizioni che sono potenze di due, cioè 1, 2, 4, 8,.... le altre posizioni sono disponibili per gli m bit che portano l'informazione.

Chiamiamo K_1, K_2 e K_4 i bit che controllano le parità; allora un numero a sette bit si scriverà come segue:

posizione	1	2	3	4	5	6	7
Funzione	K_1	K_2	8	K_4	4	2	1

I valori dei bit di parità vengono assegnati come segue:

K_1 controlla la parità pari per le posizioni 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
K_2 controlla la parità pari per le posizioni 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14
K_4 controlla la parità pari per le posizioni 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14

Per esempio, si voglia fissare il codice per il numero decimale 9,

1	2	3	4	5	6	7
		8		4	2	1
		1		0	0	1

In base alle regole esposte, K_1 deve essere 0, K_2 anche 0, e $K_4 = 1$, allora il numero in codice corrispondente a 9 sarà 0011001. La Tabella 25 fornisce il codice di Hamming completo.

TABELLA 25 — Codice Hamming

Posizione	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	1	1
4	1	0	0	1	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	0	0	0	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	1	1	0	0	1

Supponiamo che venga inviato un 3 e che avvenga un errore nella posizione 5 dove viene ricevuto un 1 al posto di uno zero:

1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	1	1

Allora il controllo della parità ci dà

$$K_1 = \text{dispari} = 1$$
$$K_2 = \text{pari} = 0$$
$$K_4 = \text{dispari} = 1$$

al numero binario 101 corrisponde il numero decimale 5 il che indica che c'è un errore alla posizione 5. Allora il numero binario ricevuto deve essere non 1000111 ma 1000011, che è il valore corretto corrispondente al numero decimale 3.

È possibile correggere solo un singolo errore; un errore doppio apparirà come un errore singolo e porterà ad istruzioni inesatte per la correzione.

Si possono sviluppare anche altri codici capaci di correggere gli errori, come codici alfanumerici cioè con lettere e numeri, di solito dotati di 6 bit di informazione in modo da consentire la codificazione di 64 fra lettere, nu-

meri e simboli. È allora possibile impiegare un codice di Hamming a 10 bit, capace di effettuare una singola correzione, con le cifre di controllo che occupano le posizioni 1, 2, 4, 8.

10-11. Codici a minima distanza.

Sono stati finora esaminati diversi codici i quali consentono di individuare o di correggere gli errori, tramite l'aggiunta di alcuni bit ridondanti. Utilizzeremo ora le tabelle dei diversi codici per giungere ad un risultato più generale.

Nella tabella BCD o nel codice binario riflesso, occorre cambiare solo un bit per ottenere un nuovo numero del codice. Perciò in questi codici non è possibile scoprire gli errori.

Invece nel codice bi-quinario o BCD ridondante, devono cambiare due bit per avere un nuovo numero. Nel codice di Hamming che permette di correggere un errore, occorre modificare tre bit per ottenere un simbolo che rappresenti un nuovo numero, diverso da quello vero.

Questo dato può essere utilizzato per classificare i codici secondo la possibilità che essi offrono di individuare e correggere un errore.

Il numero di bit che devono cambiare in un numero perchè esso sia erroneamente interpretato per un numero diverso, è chiamato *distanza* fra i numeri. Per passare da 1000 a 1011 occorrono due cambiamenti; allora la distanza fra questi due numeri è 2.

La *minima distanza di un codice* è il minimo numero di bit che devono cambiare in un numero perchè esso sia erroneamente letto come un altro numero in quello stesso codice. Nel codice BCD, la minima distanza è 1, mentre nel codice BCD ridondante la minima distanza è stata portata a 2 mediante la aggiunta di una cifra di controllo. Il codice di Hamming ha la minima distanza uguale a 3 poiché sono stati aggiunti, nel tipo capace di individuare un solo errore, tre cifre di controllo. In generale, se

M = minima distanza di un codice
C = numero di bit errati che è possibile correggere
D = numero di bit errati che è possibile individuare

si trova

$$M - 1 = C + D \tag{10-6}$$

E poiché nessun errore può essere corretto senza essere stato prima indi-

viduato, è C≤D. I valori possibili per C e D, per minime distanze non superiori a 5 sono:

M	C	D
1	0	0
2	0	1
3	0	2
	1	1
4	0	3
	1	2
5	0	4
	1	3
	2	2

Le proprietà descritte sono confermate dagli esempi del codice BCD, bi-quinario, BCD ridondante, e codice di Hamming. La tabella indica che sono possibili altri codici.

Nei codici in cui la minima distanza è 1, un errore trasforma il numero dato in un altro della tabella e quindi non è possibile individuare l'errore (C = D = 0). Nei codici in cui la minima distanza è 2, un solo errore dà origine ad un carattere che non ha corrispondente nella tabella. È quindi possibile individuare un solo errore (C = 0, D = 1). Se c'è errore in due o più bit può darsi che si abbia un numero uguale a qualcuno di quelli contenuti nella tabella, per cui gli errori non sono identificabili.

Nei codici in cui la minima distanza è 3, si può individuare e correggere l'errore commesso su di un bit. Se in questo codice si verifica un solo errore, la cifra che ne risulta sarà uguale, con l'errore di un bit, ad un numero della tabella, mentre nessun altro numero sarà ottenibile da esso modificando un solo bit. È allora possibile individuare e correggere il bit che contiene l'errore. La presenza di due errori in un codice la cui minima distanza è 3, produrrà un numero dal quale si può ancora ottenere un numero del codice modificando un solo bit, ma la correzione sarà sbagliata e quindi l'errore aumenterà.

Dato il costo elevato delle apparecchiature adatte a trattare codici che si correggono automaticamente, e data l'affidabilità che in pratica offrono le normali apparecchiature, di solito non si impiegano codici così complessi quando si tratta di sistemi analogico-numerici o viceversa. Questi codici sono invece utili nel caso dei calcolatori, soprattutto quando si fa uso di dispositivi magnetici.

10-12. Lettura di commutatori analogici o di dischi.

Nei primi commutatori analogici, si utilizzavano delle spazzole striscianti per la lettura di informazioni codificate come in fig. 10-9. Poichè la minima

ampiezza della traccia relativa all'ultimo bit significativo era dell'ordine di 0,025 cm c'era il grave problema di mantenere con precisione le spazzole nella posizione esatta.

Si consideri ad esempio una situazione come quella illustrata in fig. 10-12, in cui è riprodotto il disco codificatore di fig. 10-9 nella posizione —90°. Nella situazione peggiore, la spazzola relativa al primo bit significativo può trovarsi un poco fuori allineamento rispetto alle altre tre spazzole. Se la posizione è quella indicata dalle spazzole grigie, cioè con la spazzola 8 leggermente in anticipo, la lettura sarebbe 1111 cioè il numero decimale 15; al contrario nel caso delle spazzole bianche, cioè con la spazzola 8 spostata di una piccolissima quantità in ritardo, la lettura sarebbe 0000 cioè il numero decimale 0. Una posizione errata di altre spazzole darebbe luogo a errori inferiori. Sono stati messi a punto dei sistemi logici in cui si impiegano due gruppi di spazzole, e la lettura viene effettuata sull'una o sull'altra spazzola dell'anello j, secondo che la spazzola sull'anello j-1 legga 1 o zero. Con questo metodo aumentano però gli attriti delle spazzole ed i problemi di manutenzione dei contatti.

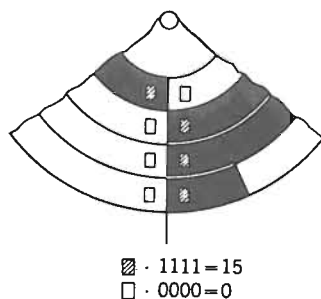



Fig. 10-12 — Ambiguità nella lettura mediante spazzole.

L'invenzione del codice binario riflesso ha contribuito notevolmente alla soluzione del problema. Come si è già visto, nel codice binario riflesso, o codice di Gray, cambia solo un bit nel passaggio da un numero al successivo; quando allora c'è una sola spazzola che passa da zero ad 1 o da 1 a zero, non c'è ambiguità dovuta ad un cattivo allineamento delle spazzole.

Anche questo codice però ha un difetto: quando si passa dal numero decimale 9(1101) allo zero (0000) cambiano i valori dei bit letti da tre spazzole. Cioè il codice solo in questa posizione non è a distanza unitaria. È possibile però costruire facilmente un codice che sia sempre a distanza unitaria, come quello mostrato nella tabella 26. In questo codice cambia solo un bit

TABELLA 26 — Codice a distanza unitaria

0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	1	0	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	1
5	0	0	1	1
6	0	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	0
9	1	0	1	0

anche quando si passa da 9 a zero; esso è dunque molto adatto per un disco codificatore, come quello di fig. 10-13.

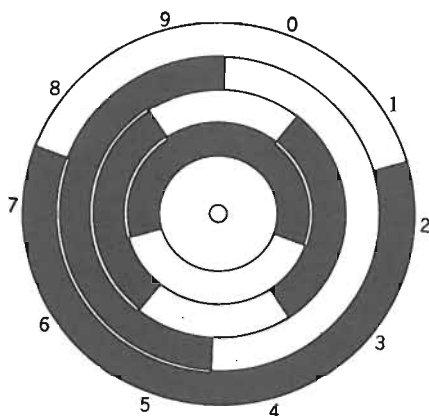



FIG. 10-13 — Disco codificatore a distanza unitaria.

Nei sistemi di lettura ottici, fra la sorgente luminosa ed il disco è interposta una stretta fenditura, e dietro ciascuna zona si trova una fotocella; la lettura è allora più accurata di quella che può effettuarsi con le spazzole poichè la fenditura può essere accuratamente allineata. È possibile una lettura in serie se si abilitano i circuiti delle fotocelle uno dopo l'altro, oppure una lettura in parallelo facendo lampeggiare la luce o abilitando contemporaneamente tutte le fotocelle. Nei lettori ottici non è nettamente definito il punto in cui si passa da un bit al successivo, perchè non è noto il livello esatto di illuminazione in corrispondenza del quale il circuito risponde, cioè distingue fra 1 e zero. Per superare questa difficoltà bisogna aggiungere un discriminatore di ampiezza o un cimatore di base al circuito di uscita della fotocella.

PROBLEMI

10-1. Un'onda di equazione $10 + 10 \,\text{sen}\, 2\pi ft$ è campionata ad una velocità pari a 10 f con un campionatore a cinque cifre. Scrivere, in codice binario, i valori dei campioni che si ottengono.

10-2. Si ricevono i seguenti gruppi di sette bit in codice di Hamming:

1010011
1011110
1010010
1100000

Supponendo che si sia verificato un solo errore, lo si determini e lo si corregga.

10-3. Dei seguenti numeri in codice bi-quinario, si determini quali sono corretti e quali contengono errori:

1000100
0101010
1010000
1010010
1011000

10-4. Scrivere un codice più tre, riflesso.

10-5. Esprimere ciascun numero decimale scritto in un codice più tre, mediante un codice di Hamming contenente i bit di controllo necessari.

BIBLIOGRAFIA

1. Ragazzini J. R., and L. A. Zadeh: The analysis of sampled-data Systems, *Trans. AIEE*, **71:** 225 (1952).
2. Murphy G. J., and R. D. Ormsby: A survey of Techniques for the Analysis of Sampled-data Control Systems, *IRE Trans. Auto. Control*, PGAC-**2:** 79 (February, 1957).
3. Blecher F. H.: Transistor Circuits for Analog and Digital Systems, *Bell System Tech. J.*, **35:** 295 (March, 1956).
4. Carbrey R. L.: Decoding in PCM, *Bell Lab. Record*, **26:** 451 (1948).
5. Sears R. W.: Electron Beam Deflection Tube for Pulse Code Modulation, *Bell System Tech. J.*, **27:** 44 (1958).
6. M. P. Marcus: "Switching Circuits for Engineers," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
7. Susskind A. K., et al.: "Notes on Analog-Digital Conversion Techniques," The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1957.
8. Bukstein E.: "Digital Counters and Computers," Rinehart & Company, Inc., New York, 1960.
9. Scott N. R.: "Analog and Digital Computer Technology," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
10. Hamming R. W.: Error Detecting and Error Correcting Codes, *Bell System Tech. J.*, **29:** 147 (April, 1950).

CAPITOLO XI

DISPOSITIVI AD EFFETTO FOTOELETTRICO

Nei dispositivi ad effetto fotoelettrico, si sfruttano i fenomeni di emissione fotoelettrica di elettroni, o di conduzione prodotta dall'energia luminosa. Esistono fondamentalmente quattro tipi di dispositivi, e cioè:

Cellule fotoelettriche, o *fototubi*: sfruttano il fenomeno della emissione di elettroni quando delle radiazioni colpiscono un catodo costituito di materiale a bassa funzione di lavoro. La superficie sensibile è racchiusa in un tubo, a vuoto o a gas, di vetro o di quarzo; gli elettroni emessi vengono catturati da un anodo positivo.

Cellule fotoconduttive: la loro resistenza elettrica varia da un valore elevato, al buio, ad un valore basso quando sono esposte alla luce.

Dispositivi fotoelettrici a giunzione con strutture P-N, P-N-P o N-P-N; l'energia luminosa libera dei portatori di carica nel diodo che opera in condizione di contropolarizzazione. Il dispositivo a tre terminali funziona esponendo la base alla luce; in tal modo le radiazioni realizzano quel controllo della corrente che ordinariamente viene realizzato mediante la corrente di base.

Nelle *celle fotovoltaiche*, le radiazioni che colpiscono la superficie sensibile generano una forza elettromotrice. Su questo principio funzionano le *celle solari*.

11-1. La luce.

Luce è il nome che si dà alle onde elettromagnetiche la cui lunghezza d'onda è compresa fra 0,01 e 100 micron circa. Il *micron* = 10^{-6} metri si indica col simbolo μ. Le lunghezze d'onde vengono anche indicate in Angstrom; 1A = 10^{-10}metri. La frequenza della luce si può calcolare conoscendo la lunghezza d'onda e la sua relazione con la velocità della luce: nello spazio $c = 2{,}99776 \times 10^8$ m/s $\cong 3 \times 10^8$ m/s ed $r = c/\lambda$.

Il campo di lunghezza d'onda indicato prima, ha i suoi estremi nel lon-

tano ultravioletto e nel lontano infrarosso. Il campo delle radiazioni visibili è compreso fra questi limiti e va dai 0,4μ del violetto ai 0,7μ del rosso.

Flusso luminoso è quella parte delle radiazioni che produce un effetto sull'occhio umano. La sensibilità dell'occhio non è la stessa per tutti i colori visibili ma è massima per il blu-verde, intorno ai 0.55μ; perciò l'occhio non è adatto per la misura precisa delle intensità.

L'uscita di un dispositivo fotoelettrico può essere espressa in termini di corrente di uscita per unità di potenza totale della radiazione che colpisce la superficie della cella, per un dato colore, cioè lunghezza d'onda, o per una data sorgente. Occorre fissare il campo di colori della sorgente, poiché la distribuzione di colori varia notevolmente da sorgente a sorgente. Come sorgente standard è spesso impiegata una lampada di tungsteno che funziona ad una temperatura tale da produrre uno spettro di emissione uguale a quello di un corpo nero a 2870°K. La distribuzione relativa delle energie alle diverse lunghezze d'onda per una sorgente di questo tipo che funzioni a questa *temperatura di colore* è quella mostrata in fig. 11-1*a*.

Anche la sensibilità può essere espressa in termini di luce visibile, per cui si definisce la *sensibilità luminosa*, cioè la corrente per lumen di luce visibile. È necessario in questo caso far riferimento ad una particolare sorgente.

La *candela* è l'unità di flusso luminoso prodotto da una *candela campione* che brucia in determinate condizioni. Questa sorgente emette luce in tutte le direzioni e produce un flusso totale di 4π *lumen*. Dato che l'angolo solido che circonda un punto è uguale a 4π steradianti, il *lumen* è il flusso luminoso emesso dalla candela campione entro un angolo solido unitario.

I lumen prodotti entro l'angolo solido unitario da una sorgente puntiforme sono costanti al variare della distanza, mentre il flusso che incide sulla superficie di area unitaria diminuisce in ragione inversa del quadrato della distanza. Per convertire l'intensità luminosa di una sorgente espressa in candele, in *lux*, vale la formula

$$L = \frac{CA}{d^2} \qquad (11\text{-}1)$$

in cui L è l'illuminazione, espressa in lux, sulla superficie A alla distanza d dalla sorgente di intensità C.

Recentemente è stata definita la *candela* secondo un nuovo metodo che sostituisce quello della candela campione. La candela si definisce in base alla radiazione emessa dal corpo nero, alla temperatura di solidificazione del platino; si tratta quindi un campione molto ben riproducibile.

La candela è 1/16 della intensità luminosa prodotta da 1 cm^2 di questa sorgente radiante. In pratica la differenza fra le due definizioni è trascurabile.

La caratteristica spettrale della sorgente dovrebbe essere adattata a quella del dispositivo fotoelettrico di conversione, tenendo conto della carat-

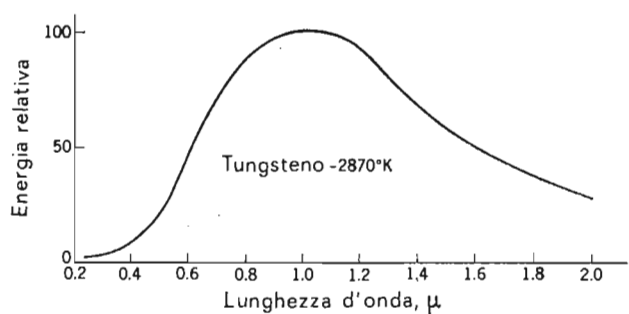
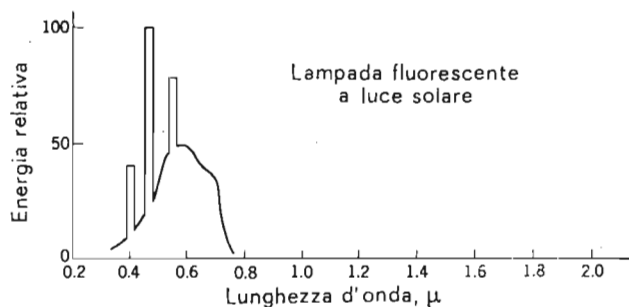
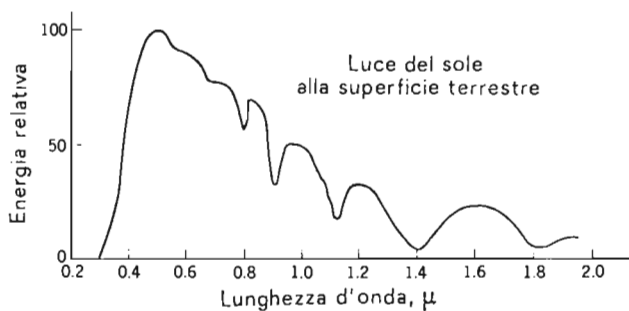
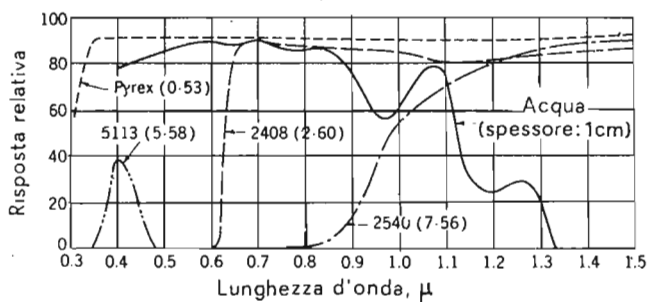



FIG. 11-1 — Risposta spettrale di alcune sorgenti e sostanze trasparenti.

teristica spettrale del vetro e di ogni altro elemento di protezione. In fig. 11-1 sono riportate alcune curve relative a delle sorgenti e a dei vetri.

11-2. Fotoemissione di elettroni.

Nella cellula fotoelettrica, la luce fornisce l'energia necessaria per liberare gli elettroni dalla superficie. In questo caso la luce può essere immaginata come un pacchetto di energia, secondo la teoria ordinaria. L'energia del pacchetto è legata alla frequenza della luce dalla relazione:

$$W = hf = \text{energia del quanto, espressa in Joule} \qquad (11\text{-}2)$$

dove h è la costante di Plank ed è uguale a $6{,}624 \cdot 10^{-34}$ Joule · sec. Ciascun pacchetto di energia è detto *fotone*, l'energia che esso trasporta è detta *quanto*.

Se il quanto di energia trasportato dal fotone è uguale o maggiore della funzione lavoro di una data superficie, può accadere che un fotone urti un atomo superficiale, gli ceda la sua energia e sia assorbito, dando luogo all'emissione di un elettrone. Poiché l'intensità della luce è solo una misura del numero di fotoni che arrivano nell'unità di tempo, un aumento di intensità produce un aumento della corrente emessa.

La teoria dell'emissione fotoelettrica è compendiata nella seguente legge di Einstein

$$hf = eE_w + \frac{mv^2}{2} \qquad (11\text{-}3)$$

la quale indica che l'energia del fotone che impatta, viene trasferita all'atomo sotto forma di energia eE_w necessaria per superare la funzione lavoro, e sotto forma di energia cinetica dell'elettrone emesso. Non è detto che ogni fotone produca emissione di un elettrone, poiché numerosi fotoni vengono riflessi dalla superficie.

Poiché eE_w è costante per una data superficie, si vede che esiste un valore minimo del quanto, cioè una frequenza di soglia f_0, al disotto della quale l'emissione non ha luogo. Pertanto

$$f_0 = \frac{eE_w}{h} \qquad (11\text{-}4)$$

In corrispondenza di questa frequenza della radiazione incidente, la corrente emessa dovrebbe diventare nulla. L'equazione (11-4) fornisce dunque un metodo per misurare la funzione di lavoro di un materiale, attraverso la misura della frequenza di soglia.

Per i catodi fotoemittenti si usano comunemente materiali a bassa funzione di lavoro. Questi materiali appartengono al gruppo dei metalli alcalini,

cioè litio, sodio, potassio, rubidio e cesio. Quest'ultimo sotto forma di film monomolecolare, depositato su di uno strato di ossido di cesio, a sua volta depositato su di un supporto d'argento, costituisce una superficie dotata di una notevole sensibilità nell'infrarosso, come è mostrato dalla curva relativa alla superficie S-1, in fig. 11-2.

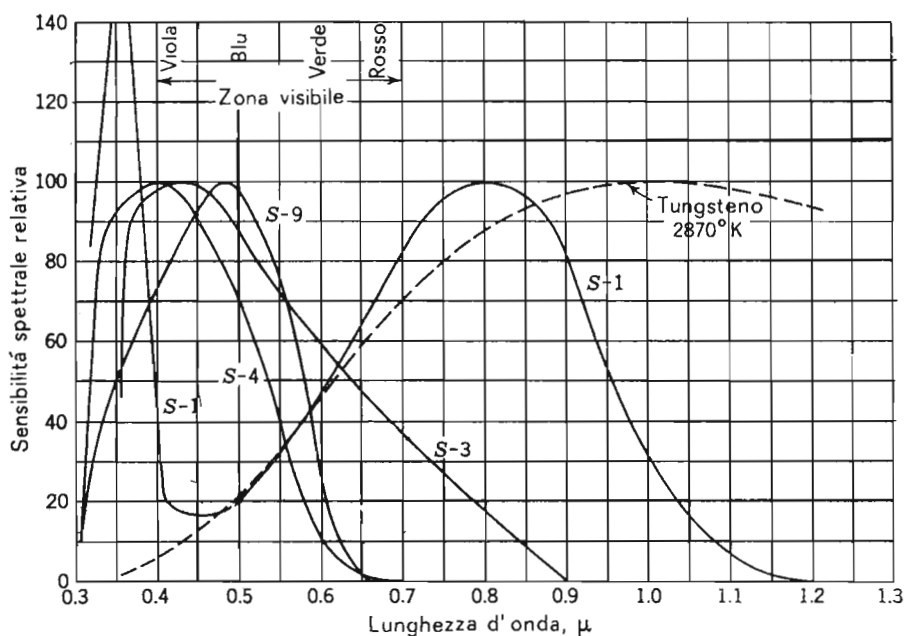



FIG. 11-2 — Sensibilità spettrale relativa di alcune superfici. Le sensibilità effettive non sono uguali

La notevole sensibilità nella zona delle più alte lunghezze d'onda è utile nei dispositivi che funzionano in connessione con delle lampade ad incandescenza. L'interdizione a circa 0,3μ è dovuta al fatto che il vetro non trasmette nel lontano ultravioletto.

11-3. La cellula fotoelettrica (fototubo a vuoto).

Il fototubo a vuoto è costituito da un catodo la cui superficie è ricoperta di un materiale a bassa funzione di lavoro, e da un sottile filo che fa da anodo (fig. 11-3).

La tensione anodica è di valore tale da portare la corrente al valore di saturazione; tutti gli elettroni emessi raggiungono l'anodo se la tensione è

superiore a circa 40 volt. In fig. 11-4*a* è riportata una famiglia di caratteristiche corrente-tensione.

La somiglianza di queste curve con quelle del pentodo, suggerisce, per il fototubo a vuoto, un circuito equivalente con generatore di corrente.

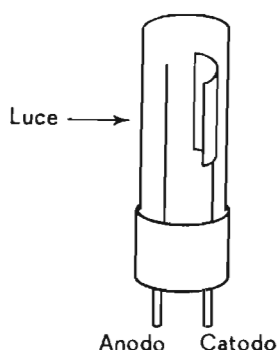



FIG. 11-3 — Struttura di un fototubo.

La pendenza delle curve di fig. 11-4*a*, indica che la resistenza interna è di parecchi megaohm, per $e_o > 40$ V, per cui il circuito equivalente assume la forma semplificata di fig. 11-5. Il tubo si comporta come un generatore di corrente di valore *m*F, in cui F è il flusso luminoso incidente. La costante *m*, espressa in microampère/lumen è ordinariamente indicata nelle specifiche, altrimenti può essere calcolata dalla pendenza della curva di fig. 11-4*b*.

Ai capi della resistenza di carico della cella si ottiene una tensione di uscita e_o, misurata rispetto a massa, data da:

$$e_o = -iR_L = -mFR_L \tag{11-5}$$

Per una variazione ΔF del flusso luminoso si trova

$$\Delta e_o = -m\Delta FR_L \tag{11-6}$$

ΔF può essere considerato un valore picco - picco, se la luce è modulata sinusoidalmente.

Lo studio del circuito può essere eseguito col metodo della retta di carico, come è mostrato in fig. 11-4. R_L ed E_{bb} debbono avere entrambe un notevole valore, limitato in pratica dalla necessità di avere un valore sufficientemente elevato dell'isolamento del circuito. L'esistenza di inevitabili correnti di fuga attraverso l'isolamento, che si trova in parallelo al resistore di carico, limitano R_L ad un valore compreso fra 5 e 20 MΩ.

Il fototubo a vuoto ha un'uscita lineare con l'intensità luminosa ed ha una buona stabilità a lungo termine; il suo funzionamento è indipendente dalla tensione applicata, se questa è superiore a 30-40 V. Queste celle generalmente non possono funzionare ad una temperatura superiore a 55°C perchè può danneggiarsi la superficie emittente.

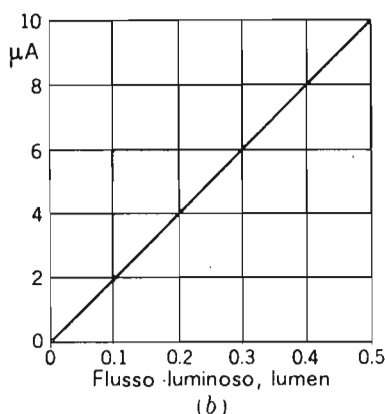
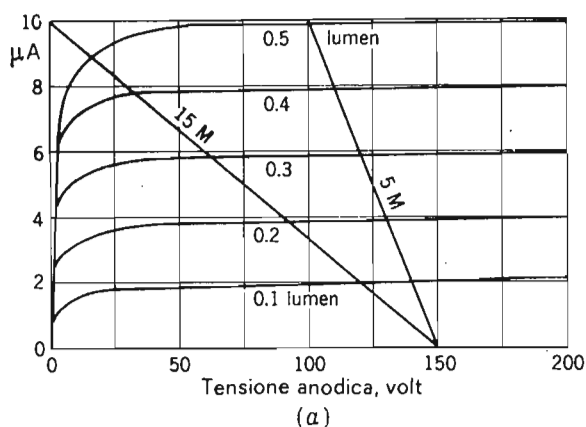



FIG. 11-4 — *a*) Caratteristiche di un fototubo a vuoto. *b*) Diagramma che mostra la linearità del fototubo tipo 925.

11-4. Il fototubo a gas.

È possibile aumentare la corrente di un fototubo se si introduce in esso una piccola quantità di gas, si ottiene allora la caratteristica di fig. 11-6. A tensioni superiori a quella di saturazione, che è di 10 V, gli elettroni acqui-

stano un'energia sufficiente a ionizzare alcuni atomi del gas, mentre vanno dal catodo all'anodo, per cui la corrente aumenta di valore. Un ulteriore aumento produce una maggiore ionizzazione, per cui la corrente totale aumenta. Questo fenomeno deve essere però limitato per evitare che vi sia emissione

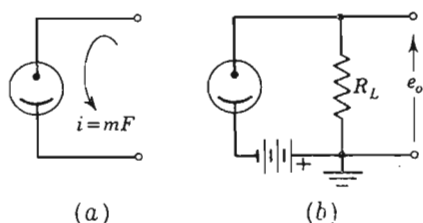



FIG. 11-5 — *a*) Circuito equivalente del fototubo. *b*) Circuito equivalente comprendente il carico.

secondaria o bombardamento del catodo da parte degli ioni positivi, con possibilità di distruzione della superficie emittente. Il limite di sicurezza è ordinariamente 90 volt.

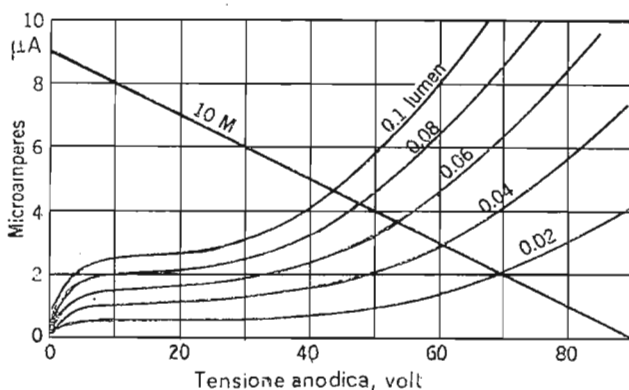



FIG. 11-6 — Caratteristiche del fototubo a gas tipo 930.

La corrente è dell'ordine di 7÷10 volte quella di un fototubo a vuoto. Il rapporto fra le due correnti è detto *fattore di amplificazione del gas.*

I fototubi a gas non sono lineari con l'intensità luminosa e non sono adatti a funzionare con luce modulata a più di 2 KHz, poiché il processo di

ionizzazione avviene in un intervallo di tempo finito. In fig. 11-7 è riportata la caratteristica non lineare del tubo.

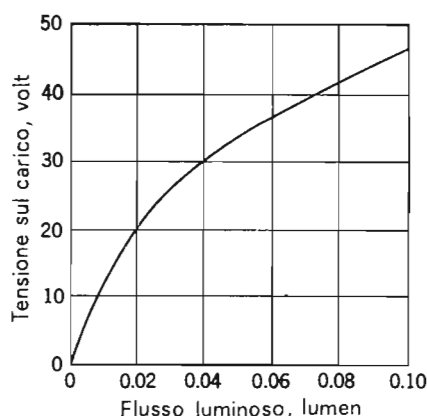



FIG. 11-7 — Relazione fra la tensione di uscita ed il flusso luminoso per il fototubo a gas tipo 930; R_L = 10 Mohm.

11-5. Relè a fototubo.

Poiché il fototubo presenta un'impedenza di uscita di parecchi megaohm, esso è adatto a lavorare nel circuito di griglia di un tubo a vuoto, il quale fornisce un guadagno di potenza ed abbassa l'impedenza ad un valore più comodo. In fig. 11-8, sono riportate alcune comuni applicazioni del fototubo come relè. Il partitore P serve a fissare la quantità di luce necessaria perchè il relè si apra o si chiuda. La sensibilità del circuito, o il campo di variazione possibile, è funzione di R_g e del guadagno dell'amplificatore. Si usano dei relè ad alta impedenza, in modo da presentare ai triodi un carico ragionevole.

La polarità della connessione del fototubo e la tensione ad esso applicata determinano se il relè si chiuda o si apra quando la luce colpisce la cella.

Esempio — *Un triodo con* $\mu = 20$, $r_p = 8000\ \Omega$, *ha sul circuito anodico un relè la cui resistenza è* 10 KΩ. *Questo relè si chiude a* 4,0 *mA e si apre a* 2,4 *mA. Supponendo che la fotocella a vuoto abbia una sensibilità di* 20 *μA/lumen e che il triodo sia lineare, determinare il valore da assegnare al resistore di carico della fotocella in modo che il relè venga azionato quando la variazione di luce è* 0,005 *lumen.*

In caso di funzionamento lineare, dal circuito equivalente del triodo si ottiene

$$\Delta I_p = \frac{\mu \Delta E_g}{r_p + R}$$

in cui R è la resistenza del relè = 10 KΩ. *La variazione* $\Delta I_p = 4{,}0 - 2{,}4 - 1{,}6$ *mA, per cui*

$$\Delta E_g = \frac{\Delta I_p(r_p + R)}{\mu} =$$

$$= \frac{1{,}6 \times 10^{-3} \times 18.000}{20} = 14{,}4 \text{ volt}$$

Poichè $\Delta F = 0{,}05$ *lumen,*

$$\Delta e_o = 14{,}4 = m\Delta F R_L = 20 \times 10^{-6} \times 0{,}05 \times R_L$$

$$R_L = \frac{14{,}4}{10^{-6}} = 14{,}4 \text{ megaohm}$$

In fig. 11-8*c* è mostrato un relè in alternata, nel quale si impiega un fototubo ed un amplificatore a pentodo. Il resistore R_3 permette di regolare

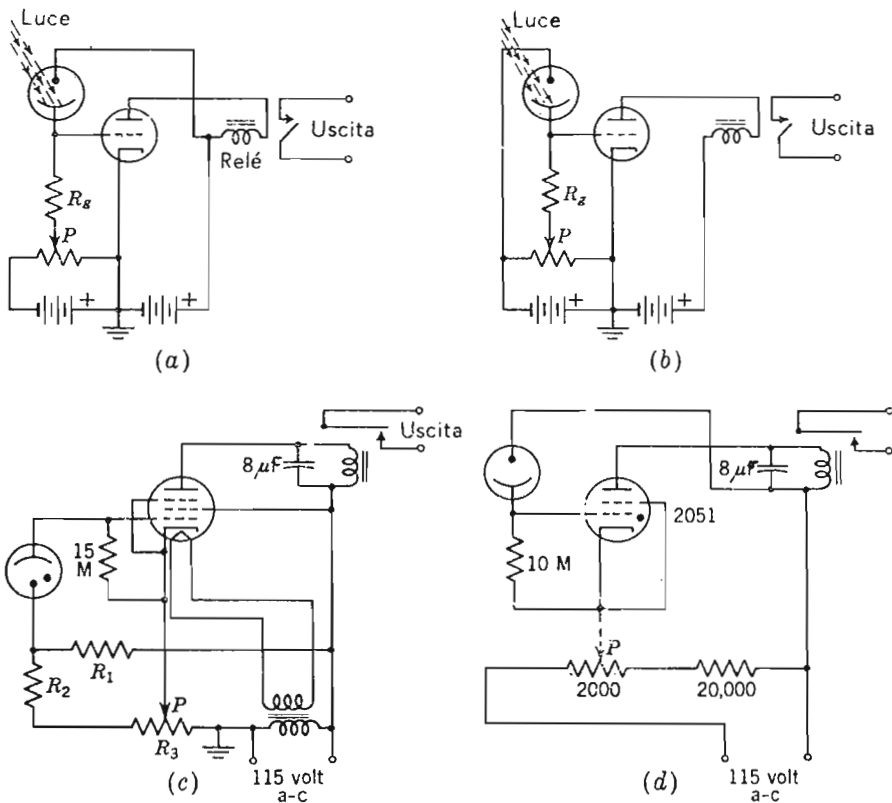



FIG. 11-8 — *a*) Il relè si chiude in presenza di luce. *b*) Il relè si apre in presenza di luce. *c*) Alimentazione in alternata e fototubo a gas. *d*) Alimentazione in alternata con un thyratron al posto del relè.

il livello di illuminazione in corrispondenza del quale si ha il funzionamento del relè.

La tensione alternata di alimentazione è rettificata dal circuito anodico il quale funziona solo nei semiperiodi positivi. Il condensatore posto ai capi del relè serve a filtrare gli impulsi raddrizzati di corrente. Nel circuito di fig. 11-8*d* è un triodo a gas, o tyratron (vedi al cap. 15), che funziona da relè; questo componente dà una corrente di uscita più elevata.

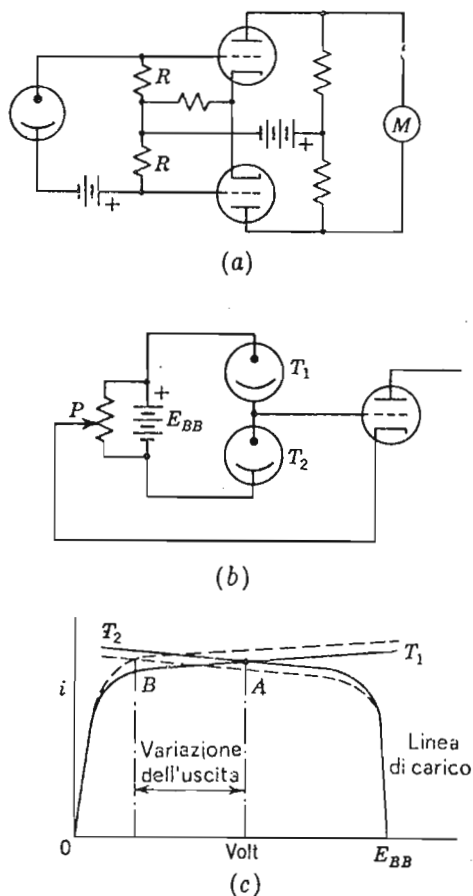



FIG. 11-9 — *a*) Amplificatore differenziale con fototubo all'ingresso. *b*) Un circuito ad alta sensibilità. *c*) La curva di carico di *b*).

In molti casi per misurare l'intensità della luce, come negli spettrofotometri, e nella misura della trasmissione della luce attraverso liquidi torbidi, si usa il fototubo con un amplificatore in continua, come in fig. 11-9.

Un circuito molto sensibile è quello di fig. 11-9*b*, in cui R_g è sostituita da un secondo fototubo. Poichè la resistenza di T_2 può avere un valore notevole, la tensione di uscita di T_1 aumenta. Questo circuito sfrutta il fatto che le caratteristiche V-I di un fototubo continuano a crescere leggermente, a forti tensioni anodiche, a causa dell'effetto Schottky. Poichè T_2 funziona da carico per T_1, si può riportare la curva V-I di T_2 come una retta di carico per una data caratteristica di T_1. Una piccola variazione differenziale di luce, cioè un aumento di luce su T_1 ed una riduzione su T_2 dà luogo alle caratteristiche tratteggiate delle due celle e quindi ad una variazione della tensione di uscita da A a B; si può così avere una notevole variazione di tensione in corrispondenza di una piccola variazione differenziale di luce.

11-6. Impiego della luce modulata.

Per evitare gli amplificatori in continua, spesso si adottano sistemi a luce modulata che consentono l'impiego di amplificatori in alternata. Si impiega luce modulata anche in quei sistemi in cui si vuole evitare che, accidentalmente, una luce costante, non prevista, azioni il dispositivo, come avviene nei sistemi antifurto.

In fig. 11-10*a* è mostrato un chopper di luce, il quale consente di amplificare l'uscita della fotocella mediante un normale amplificatore ad accoppiamento RC.

La componente alternativa dipende dall'intensità della luce ricevuta quando il raggio è interrotto da un dente della ruota, e da quella ricevuta quando il raggio attraversa una fenditura della ruota. Si fissa il punto di lavoro della fotocella, Q, in corrispondenza del valore medio dell'illuminazione durante la rotazione dell'otturatore. La frequenza di uscita, e quindi le caratteristiche dell'amplificatore, dipendono dal numero di denti che interrompono il raggio in un secondo.

Un secondo sistema a luce modulata, adatto ad eseguire il paragone fra la trasparenza del campione A rispetto al campione B, preso come riferimento, è quello mostrato in fig. 11-10*b*.

Lo specchio oscillante fa passare la luce alternativamente attraverso A e B. La fotocella produce un'uscita costante, cioè una corrente continua, solo se la luce trasmessa da A è identica a quella trasmessa da B; in questo caso l'amplificatore in alternata da un'uscita nulla. Se attraverso uno dei due percorsi passa più luce che nell'altro, all'uscita del fototubo vi sarà una corrente alternata sovrapposta alla continua. La fase di questa componente alternata dipenderà da quale dei due campioni trasmette meglio la luce.

L'amplificatore in alternata sfrutta le informazioni relative all'ampiezza ed alla fase del segnale per azionare il motore che realizza il bilanciamento

alla velocità e nel verso adatti a stabilire l'uguaglianza dei due fasci di luce. L'equilibrio si realizza ruotando una fenditura di ampiezza variabile, che intercetta il raggio di luce che attraversa il campione di riferimento B, finchè la luce in uscita da questo campione non è uguale a quella che esce dal campione A. Questo è un metodo di zero per cui non importa se le caratteristiche della fotocella e dell'amplificatore variano nel tempo; è anche possibile usare una fotocella a gas senza preoccuparsi della sua non linearità.

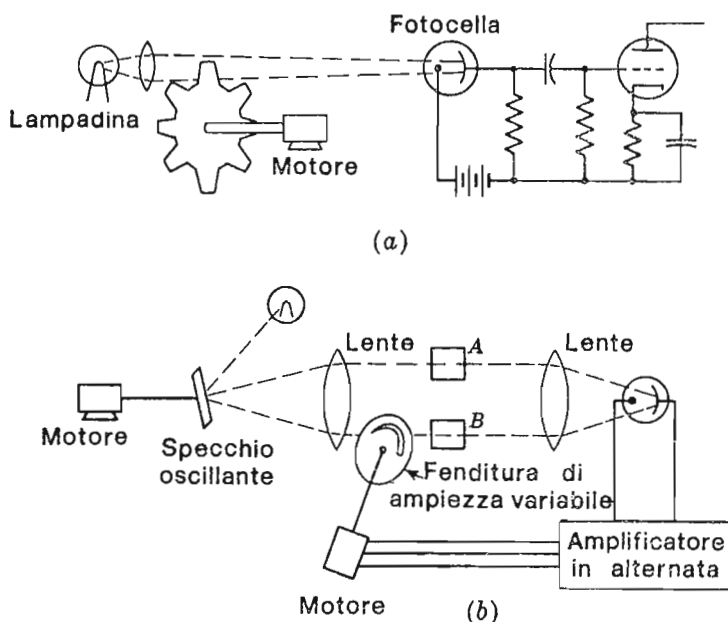



FIG. 11-10 — *a*) Sistema di modulazione di un raggio di luce. *b*) Sistema a specchio oscillante per misurare la trasparenza di A rispetto a quella di B.

11-7. I fotomoltiplicatori.

La corrente prodotta da una sostanza fotoelettrica è molto piccola, soprattutto se il livello di illuminazione è basso. È possibile amplificare direttamente queste correnti in un dispositivo chiamato *fotomoltiplicatore* nel quale si sfrutta il principio dell'emissione secondaria.

Gli elettroni emessi dal catodo fotoelettrico K per effetto della luce, vengono attirati dall'elettrodo positivo D_1 (fig. 11-11). Questi elettroni bombardano la superficie di D_1 che è trattata in modo da avere un coefficiente di emissione secondaria, δ, maggiore di uno. Cioè, in media, per ogni elettrone che urta D_1 ne vengono emessi δ. Questi elettroni a loro volta possono venire

attirati da un altro elettrodo positivo D_2, posto ad un potenziale superiore a quello di D_1. Anche questa superficie ha un coefficiente di emissione secondaria δ, per cui D_2 produce δ^2 elettroni per ogni elettrone prodotto dal catodo fotoelettrico K.

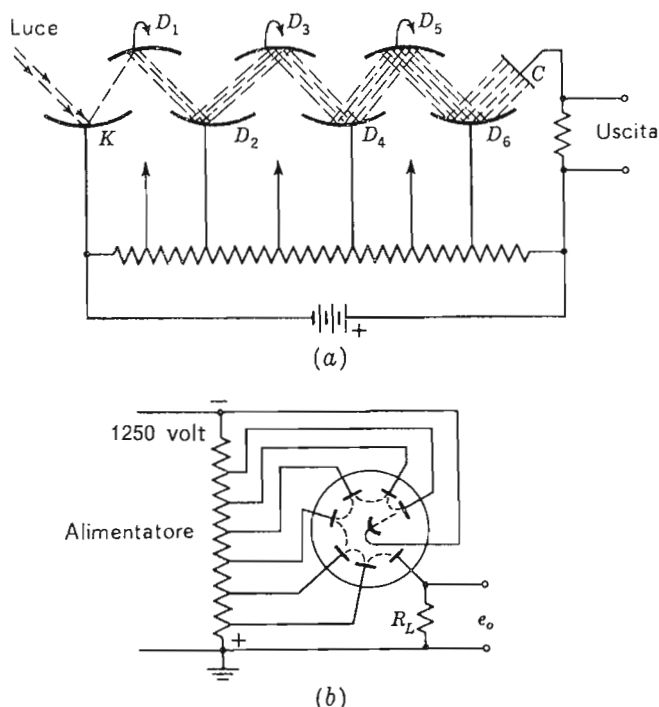



FIG. 11-11 — *a*) Struttura di un fotomoltiplicatore. *b*) Circuito elettronico del fotomoltiplicatore.

Questo processo può ripetersi n volte su n elettrodi, detti anche *dinodi*, ed il guadagno totale di corrente sarà δ^n. In pratica δ ha un valore compreso fra 5 e 10, e impiegando nove dinodi in cascata, si può avere un guadagno di corrente di $2 \cdot 10^6$. I dinodi sono sagomati in modo da produrre dei campi elettrici curvi mediante i quali gli elettroni vengono focalizzati sul dinodo successivo; questo perchè se qualche elettrone devia e non colpisce il dinodo successivo il guadagno si riduce. Le caratteristiche di un fotomoltiplicatore dipendono dalla tensione applicata a ciascun dinodo e dal potenziale esistente fra l'ultimo dinodo ed il collettore. In fig. 11-12 è riportata una famiglia di caratteristiche in funzione della tensione applicata fra l'ultimo dinodo ed il collettore.

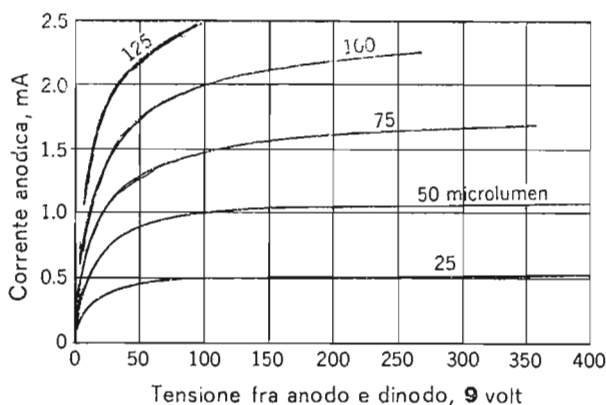



FIG. 11-12 — Caratteristiche del fotomoltiplicatore 931-A. La tensione fra i dinodi è uguale a 100 V.

11-8. Celle fotoconduttive.

Una delle celle fotoconduttive più comuni è costituita da un sottile strato resistivo di solfuro di cadmio depositato su di una piastrina ceramica. Su questo strato si evaporano gli elettrodi di stagno o di indio attraverso un'opportuna maschera, come è mostrato in fig. 11-13. In questo modo

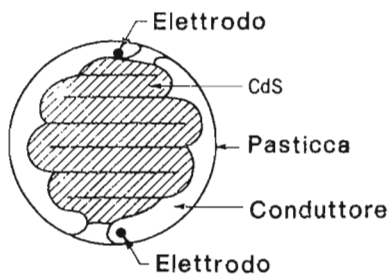



FIG. 11-13 — Una cella fotoconduttrice a CdS.

aumenta la superficie di contatto e si riduce la resistenza della cella. In fig. 11-14 è riportato l'andamento della resistenza in continua, per diverse condizioni di illuminazione; la fig. 11-15 mostra l'andamento medio della risposta spettrale.

L'energia dei fotoni fa superare agli elettroni la banda proibita del semiconduttore e li porta nella banda di conduzione; la resistenza allora decresce all'aumentare della luce secondo una relazione del tipo

$$R = R_o L^{-\gamma} \qquad (11\text{-}7)$$

in cui R_0 è la resistenza, espressa in ohm, che si ha quando l'illuminazione è unitaria, L è l'illuminazione, γ la pendenza della caratteristica in scala logaritmica, nella zona di funzionamento. Valori tipici sono $R_0 = 1{,}9 \times 10^4\ \Omega$ e $\gamma = 1$, come è mostrato dalla curva B di fig. 11-14.

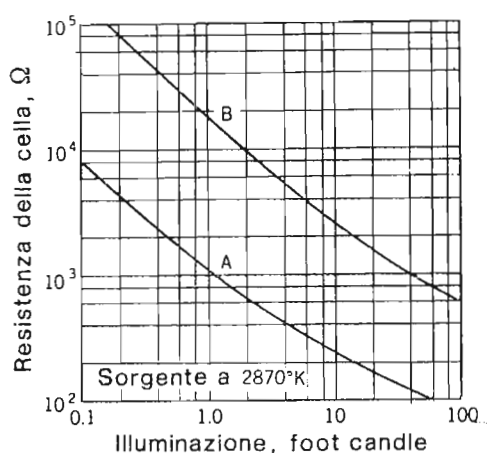



FIG. 11-14 — Caratteristiche di due celle a CdS.

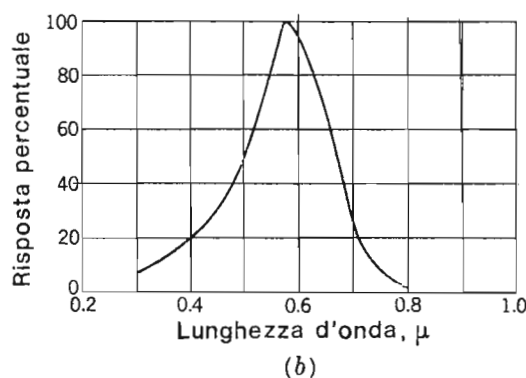
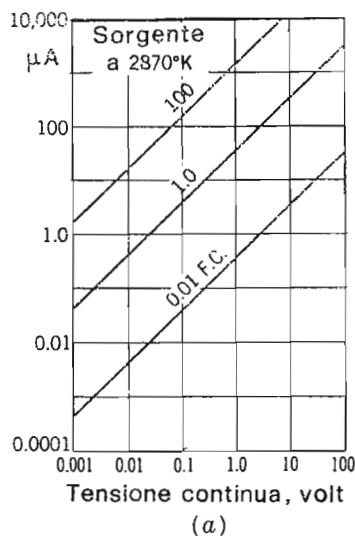



FIG. 11-15 — *a*) Relazione fra corrente e tensione in una cella a CdS. *b*) Curva di risposta spettrale di una cella a CdS.

Uno degli inconvenienti del solfuro di cadmio è la lentezza della sua risposta, cioè la velocità con cui la corrente decresce, che dipende dal tempo

di *intrappolamento* degli elettroni catturati all'interno della banda proibita. La velocità di risposta alle variazioni di illuminazione, dipende dal livello di illuminazione iniziale ed è inoltre funzione della tensione applicata. Alcuni di questi fenomeni sono mostrati nelle fig. 11-15 e 11-16.

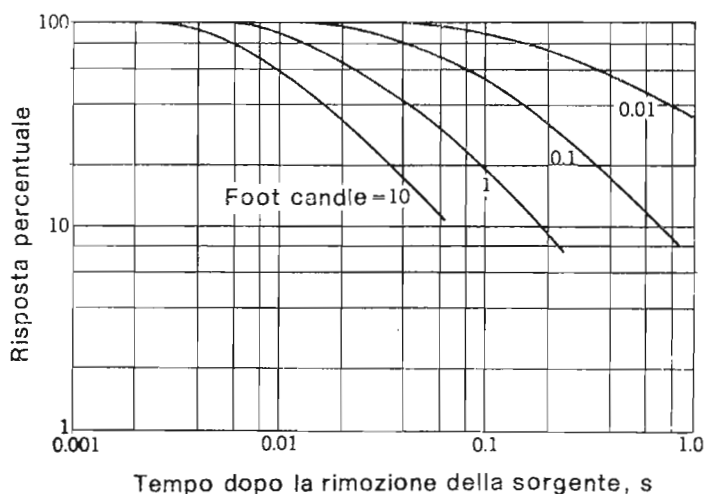



FIG. 11-16 — Curve di decadimento di una cella a CdS. Il parametro indica l'illuminazione prima che la luce venga annullata.

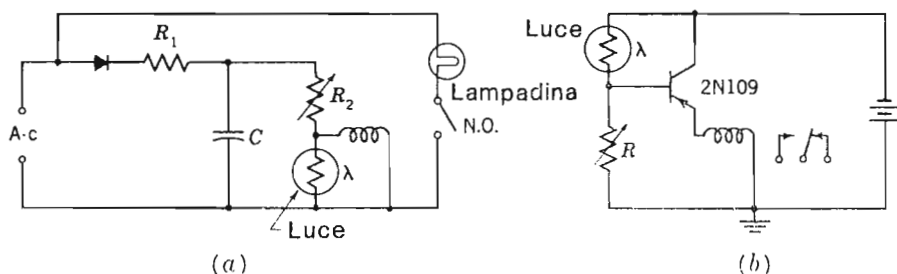



FIG. 11-17 — *a*) Circuito con cui la lampadina si accende al crepuscolo. *b*) Un semplice amplificatore per la fotoresistenza.

La curva di risposta spettrale del solfuro di cadmio è molto prossima a quella dell'occhio umano; perciò queste celle sono utili per sostituire l'occhio umano nelle misure di luce. Data la loro semplicità, vengono spesso usate per il controllo dell'esposizione negli apparecchi fotografici automatici. Se si vuole una risposta spettrale che presenta un picco a 0,75 μ, si può usare il seleniuro di cadmio.

Il basso costo di queste celle ed il discreto valore di corrente di uscita

consentono di realizzare dei semplici circuiti a scatto, alcuni dei quali sono mostrati in fig. 11-17.

11-9. Dispositivi fotoelettrici a giunzione.

Un *fotodiodo* è una giunzione P-N inversamente polarizzata, in cui la energia della luce fa variare la corrente inversa generando coppie elettrone-lacuna nella zona di giunzione. Questo componente è spesso impiegato per la lettura di schede e di nastri perforati, poichè l'area sensibile è molto piccola. La famiglia di caratteristiche V-I è ordinariamente simile a quella mostrata in fig. 11-18; nella figura è tracciata la retta corrispondente a 50 KΩ. Se si alimenta il fotodiodo a 45 V si può ottenere una uscita utile praticamente uguale alla tensione di alimentazione.

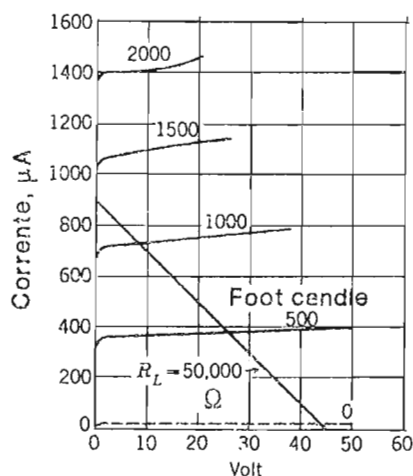



FIG. 11-18 — Fotodiodo P-N al germanio illuminato da una sorgente a 2870°K.

Un diodo P-N ha una propria corrente inversa I_0, che è funzione della temperatura. Questa corrente è presente anche nel fotodiodo ed è nota col nome di *corrente di oscurità* poichè è la corrente presente quando l'illuminazione della cella è nulla. Il suo valore è quello della curva di fig. 11-18 corrispondente ad illuminazione zero; in fig. 11-19 è riportata la legge con cui questa corrente varia con la temperatura.

Il picco della risposta per il germanio si trova fra 1 ed 1,5 μ, mentre il silicio ha il picco fra 0,6 ed 1 μ.

In fig. 11-20 è riportato un circuito comunemente usato per accoppiare un fotodiodo, funzionante a luce modulata, ad un amplificatore.

Il foto-transistore è un transistore a giunzione la cui giunzione base-emettitore è esposta alla luce. Esso è simile al fotodiodo ma presenta una

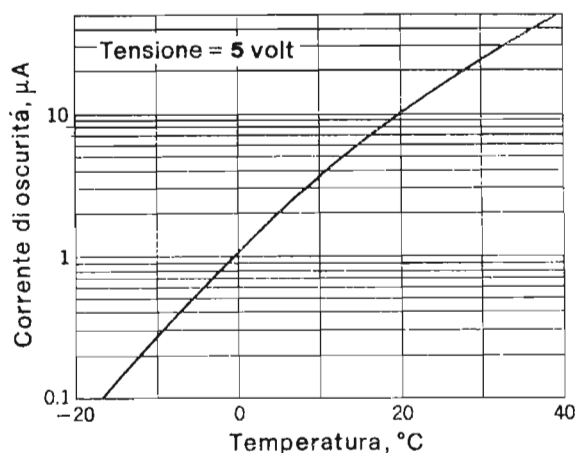



FIG. 11-19 — La corrente di oscurità in funzione della temperatura.

sensibilità 50÷100 volte superiore a quella del diodo, come è mostrato dalla fig. 11-21.

In questo dispositivo ordinariamente la base non viene connessa ed il controllo che normalmente si effettua mediante la corrente di base viene

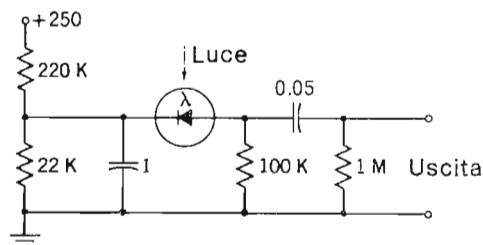



FIG. 11-20 — Circuito per un fotodiodo.

esercitato dall'energia delle radiazioni le quali liberano delle cariche nel circuito emettitore-base. La fig. 11-22 mostra questo componente inserito in un normale circuito di transistore, nel quale però manca la connessione di base.

La risposta del germanio e degli altri semiconduttori si estende nell'infrarosso più di quella delle superfici fotoelettriche. Infatti la funzione lavoro

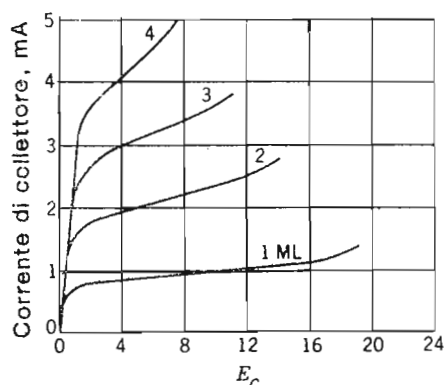



FIG. 11-21 — Caratteristiche di un fototransistore.

di una superficie fotoelettrica al cesio è di circa 1 eV, mentre l'ampiezza di banda proibita per il germanio è dell'ordine dei 0,7 eV, quindi il quanto occorrente per la fotoconduttività è inferiore a quello occorrente per la fotoemissione nel rapporto di circa 0,7 a 1.

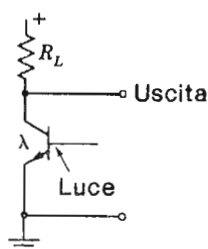



FIG. 11-22 — Circuito per un fototransistore.

Se si assume per l'ampiezza di banda proibita del germanio 0,72 eV, la lunghezza d'onda di soglia cioè la più grande lunghezza d'onda che ha effetto sarà

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eE} = \frac{6{,}55 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}72} = 1{,}70 \ \mu$$

11-10. Le celle fotovoltaiche.

Le *celle fotovoltaiche* generano una f.e.m. quando sono colpite dalla luce. Il materiale che si usa normalmente è il silicio; la cella è costituita da un cristallo di tipo P nel quale è stato diffuso, per una profondità di circa 0,5 μ, uno strato N, ordinariamente contenente fosforo come drogante. Sulla parte N c'è un contatto a griglia costruito mediante deposizione di strisce metalliche; l'elettrodo positivo viene realizzato sul fondo del cristallo di tipo P. La fig. 11-23 mostra la disposizione delle varie parti.

Queste celle sono largamente usate per produrre energia elettrica direttamente dalle radiazioni solari. Il carico viene scelto in modo da realizzare il massimo trasferimento di potenza, il che avviene ad una tensione di circa 0,46 V. Illuminando con lampade ad incandescenza si può ottenere un rendimento di conversione del 10%÷12%.

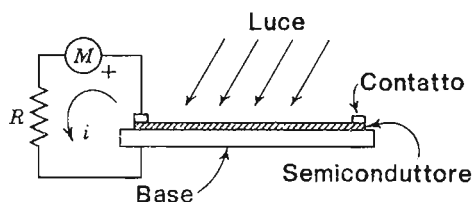



FIG. 11-23 — Struttura di una cella fotovoltaica.

Quando sulla cella giungono delle radiazioni luminose, gli elettroni acquistano un'energia sufficiente per superare la banda proibita del semiconduttore e passano nella banda di conduzione.

Il picco di emissione delle radiazioni solari è a 0,47 μ, e lo strato N sarà molto sottile in modo che questa lunghezza d'onda, di colore blu, venga trasmessa efficacemente fino alla profondità della giunzione, dato che la cella al silicio ha il proprio picco di risposta in prossimità dei 0,8 μ. In fig. 11-24 è riportata la risposta spettrale di una cella.

Un altro tipo di cella fotovoltaica è quella a selenio su ferro. In corto circuito la corrente è funzione quasi lineare dell'illuminazione e raggiunge un valore massimo di qualche centinaio di microampère. Se il carico è costituito proprio da un microamperometro, lo strumento può essere tarato in illuminazione con una scala quasi lineare ed è quindi utile come esposimetro fotografico.

La cella al selenio può funzionare ad una temperatura non superiore ai 55°C, mentre quella al silicio funziona fino a 125°C. È possibile collegare

in parallelo più celle fotovoltaiche in modo da aumentare la superficie complessiva e quindi la corrente prodotta; è anche possibile collegarle in serie in modo da alimentare carichi a più alta resistenza. Le celle non sono adatte a funzionare a luce modulata perchè posseggono una forte capacità in parallelo, dovuta alla notevole area della giunzione.

11-11. Resistori controllati dalla luce.

Un elemento fotoconduttivo, come ad esempio il solfuro di cadmio, è montato in un piccolo involucro opaco insieme con una sorgente di luce, ordinariamente al neon, in modo da formare un interruttore ed un elemento di controllo rigorosamente unilaterale. La sorgente di luce viene

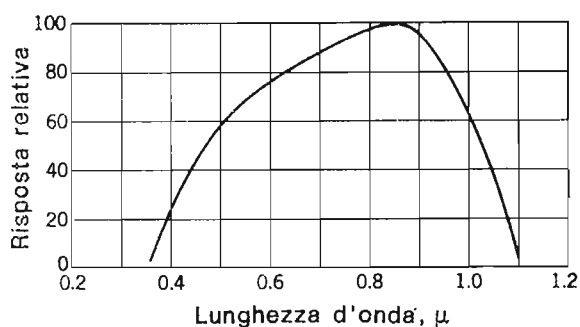



FIG. 11-24 — Sensibilità spettrale di una cella fotovoltaica al silicio.

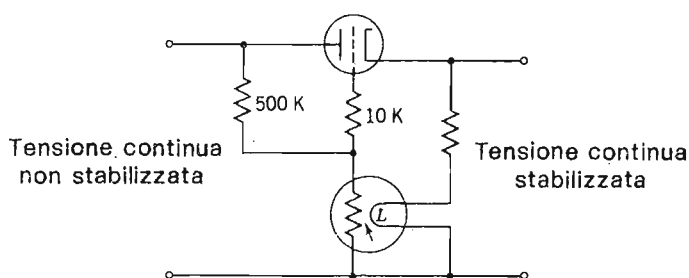



FIG. 11-25 — Alimentatore stabilizzato con un resistore controllato dalla luce.

comandata dal circuito di ingresso e la cella fotoconduttiva, la cui uscita dipende dall'intensità della luce, è connessa al circuito di uscita. Si ottiene così un componente in cui i circuiti di controllo e di uscita sono quasi completamente isolati.

Questi dispositivi trovano la loro principale applicazione come foto-chopper negli amplificatori in continua; questo chopper può funzionare a frequenze più alte di quelle possibili con dei relè meccanici. Sono inoltre numerose le applicazioni nel campo dei controlli. In fig. 11-25 è mostrato uno stabilizzatore per un alimentatore in continua.

PROBLEMI

11-1. Tracciare le curve della corrente in funzione della illuminazione per il tubo a gas 930 con carico di 1, 7,5 e 15 MΩ, con $E_{bb} = 90$ V.

11-2. Un fototubo a vuoto ha una sensibilità di 16 μA/lumen. Perché si azioni il relè posto sul circuito anodico di fig. 11-8*a*, occorre una variazione di 7 V sulla griglia del triodo. Si calcoli ΔF per $R_g = 4$ MΩ.

11-3. Due fototubi a vuoto hanno la stessa area e tutte le altre caratteristiche identiche, salvo che uno ha la superficie emittente S-1 e l'altro la S-3. Si determini il rapporto fra le correnti che si ottengono dalle due celle quando vengono illuminate da una lampada con filamento di tugsteno la cui temperatura di colore sia 2870°K. Le scale di sensibilità sono uguali, come indicato in fig. 11-2.

11-4. Una lampada (che supporremo puntiforme) da 32 candele, si trova a 2 metri da un fotodiodo la cui area attiva è di 3 cm² e la cui sensibilità è di 20 μA/lumen. Si calcoli la lunghezza focale di una lente del diametro di 4 cm che occorrerebbe interporre fra la lampada ed il fototubo in modo che la tensione di uscita di quest'ultimo sia di 40 V ai capi di un carico di 12 MΩ.

11-5. L'illuminazione di un fototubo a vuoto 925, passa da 0,12 a 0,27 lumen. Si calcoli la variazione di tensione di uscita ai capi di un carico da 2 MΩ, se $E_{bb} = 150$ V.

11-6. Il circuito di fig. 11-8*b* serve a controllare l'illuminazione di un'aula; il fototubo a vuoto è tipo 925, il triodo è il 6J5 con $r_p = 8$ KΩ e $\mu = 20$. Con l'illuminazione accesa, P è regolato in modo che la polarizzazione di griglia sia —2 V e la corrente di placca sia 5,5 mA. Supponendo che il triodo funzioni nella zona lineare, si calcolino i valori della illuminazione ambiente in corrispondenza della quale le luci vengono accese e spente, con $R_g = 10$ MΩ ed un relè da 7500 Ω le cui correnti di aggancio e di sgancio sono rispettivamente 4 e 2,3 mA.

11-7. Una lampada puntiforme da 32 candele illumina una fotocella a gas tipo 930, alimentata a 90 V e con un carico di 8 MΩ. L'area della cella è 1,5 cm². Quale è la massima distanza a cui può trovarsi la lampada perchè nel carico circoli ancora una corrente di 5 μA?

11-8. Due fotocelle a vuoto tipo 925 costituiscono i tubi T_1 e T_2 nel circuito di fig. 11-9*b*. L'illuminazione è costante ed è uguale a 0,2 lumen. E_{bb} è 200 V. Se l'illuminazione aumenta di 0,01 lumen su T_1 e diminuisce di 0,01 lumen su T_2, quale sarà la variazione di tensione di griglia del triodo?

11-9. (*a*) La superficie ad emissione secondaria di un fotomoltiplicatore presenta $\delta = 7$. Si determini il numero di stadi necessario perché la corrente di uscita sia 1 mA quando la corrente fotoelettrica è di 0,015 μA. (*b*) Lo stesso tubo è seguito da un pentodo il cui $g_m = 5000$ μS. Si calcoli la transconduttanza complessiva dell'insieme dei due tubi.

11-10. Un fototubo a vuoto tipo 925 lavora con luce modulata a 2KHz, con un carico $R = 4$ MΩ; la capacità complessiva della fotocella e dell'ingresso dell'amplificatore è di 78 pF. Si determini la variazione del valore efficace del flusso luminoso necessaria perché l'uscita dell'amplificatore sia 50 V efficaci. L'amplificatore a triodo ha un carico di 50 KΩ, $\mu = 30$, $r_p = 45$ KΩ.

11-11. Un fotomoltiplicatore tipo 931-A (fig. 11-12) lavora con un carico di 50 K Ω ed una tensione di 300 V fra anodo ed ultimo dinodo. Supponendo che l'illuminazione di ingresso oscilli sinusoidalmente con legge:

$$L = 75 + 25 \text{ sen } \omega t$$

dove L è espresso in μlumen, si determini il valore efficace della tensione di uscita ai capi del carico.

11-12. Una fotocella con superficie tipo S-3, fornisce una corrente di 5,7 μA quando è illuminata con una lampada di tugsteno la cui temperatura di colore è 2870°K. Si calcoli la corrente relativa che fornirebbe un fototubo con la superficie S_4, supponendo che le due sensibilità massime siano uguali.

11-13. Una piastra metallica con una fenditura è montata a 7 cm di distanza da una lampada puntiforme da 32 candele. Le dimensioni della fenditura sono 1 cm $\times$ $\times$ 0,07 cm. Un fototubo 925 riceve tutta la luce uscente dalla fenditura. Il carico del fototubo è 10 MΩ, $E_{bb} = 150$ V. Si calcoli la variazione di tensione che si ha sul carico quando la fenditura è chiusa.

11-14. In fig. 11-6 sono riportate le caratteristiche di un tubo a gas. Questo tubo ha l'anodo la cui superficie è 6 cm^2 e funziona ad $E_{bb} = 90$ V. Una lampada da 50 candele è posta a 30 cm di distanza dalla cella e viene spostata a tratti di 5 cm ciascuno, fino alla distanza di 85 cm. Si faccia un diagramma della tensione di uscita ai capi di un carico da 5 M Ω.

11-15. Si determini, per il fototransistore di fig. 11-21, la variazione di tensione di uscita prodotta da una variazione di illuminazione da $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ lumen a $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ lumen, con $E_{cc} = 16$ volt ed un carico di 4 KΩ.

BIBLIOGRAFIA

1. METCALF G. F.: Operating Characteristics of Photoelectric Tubes, *Proc. IRE*, **17**: 2064 (1929).
2. ZWORYKIN V. K., G. A. MORTON, and L. MALTER: The Secondary-emission Multiplier, *Proc. IRE*, **24**: 351 (1936).
3. SHIVE J. N.: "Semiconductor Devices," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1959.
4. SHIVE J. N.: The Phototransistor, *Bell Lab. Record*, **28**: 337 (1950).
5. CHAPIN D. M., C. S. FULLER, and G. L. PEARSON: A New Silicon P-N Junction Photocell for Converting Solar Radiation into Electrical Power, J. *Appl. Phys.*, **25**: 676 (1954).
6. RYDER J. D.: "Electronic Fundamentals and Applications," 3d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Capitolo XII

AMPLIFICATORI DI POTENZA IN CLASSE C RISCALDAMENTO AD ALTA FREQUENZA OSCILLATORI

I transistori ed i tubi a vuoto servono spesso a generare notevoli potenze a frequenze che vanno da qualche Hertz a molte centinaia di Megahertz. In applicazioni di questo tipo, si usa far lavorare il componente attivo in classe C in modo da ottenere un alto rendimento. In classe C, il transistore, o il tubo, si comportano come degli interruttori sincroni, che connettono l'alimentatore in continua con il carico, durante una piccola frazione di ogni ciclo. Il carico risonante oscilla quindi liberamente per il resto del ciclo. Data la natura discontinua della conduzione, sono stati studiati dei metodi grafici per esaminare il funzionamento di questi dispositivi.

Una delle più importanti applicazioni industriali dei generatori di forte potenza è quella del riscaldamento ad alta frequenza dei metalli e dei dielettrici. In questo capitolo verranno studiati i fondamenti di questo tipo di riscaldamento.

12-1. Le forme d'onda dell'amplificatore in classe C.

Un'alta frequenza viene di solito amplificata, fino al livello di potenza necessario, mediante amplificatori in classe C. Se la potenza è di parecchi kW, questi amplificatori saranno a tubi, per i quali è adatto il metodo di analisi che verrà ora illustrato.

Il funzionamento in classe C si ha quando la polarizzazione è almeno doppia di quella di interdizione. Un *carico risonante*, cioè un circuito che *funziona da serbatoio*, è collegato al circuito di uscita ed è accordato alla frequenza del segnale applicato in griglia. Se la griglia è polarizzata molto al di là dell'interdizione, il tubo sarà in conduzione solo per un piccolo angolo; l'angolo di conduzione sarà cioè inferiore a 180^0 e cioè da $-\theta_1$ a θ_1 come fig. 12-1. Il carico risonante, eccitato da questi impulsi di corrente, entrerà in oscillazione, così come indica la teoria, e si avrà ai suoi capi una tensione sinusoidale.

In fig. 12-1 e 12-2 sono mostrate le varie forme d'onda e le loro fasi relative. In fig. 12-1 a, e_b indica la tensione anodica data dalla somma di E_{bb} e della tensione sinusoidale sul carico. Il valore di interdizione di griglia è, per il triodo, e_b/μ, anche esso variabile sinusoidalmente se la tensione anodica è sinusoidale. La tensione applicata e_g porta la griglia al disopra della interdizione in corrispondenza di $-\theta_1$; quando la griglia è al disopra della interdizione, circola corrente anodica. Vi è anche corrente di griglia durante l'intervallo in cui la griglia è positiva.

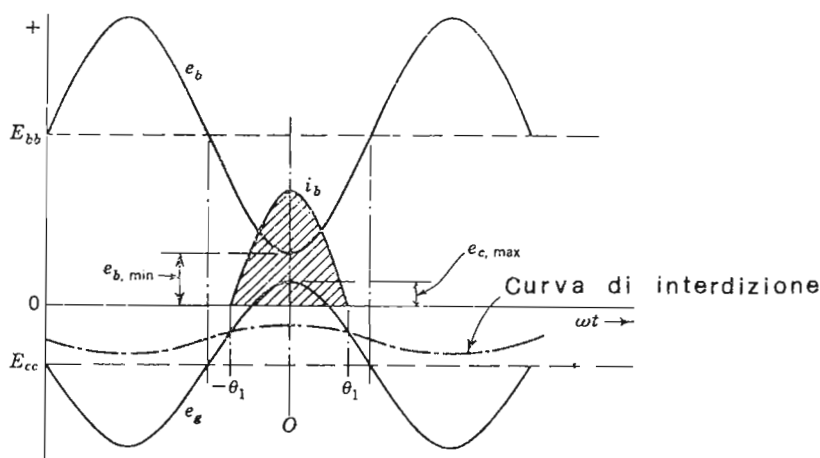
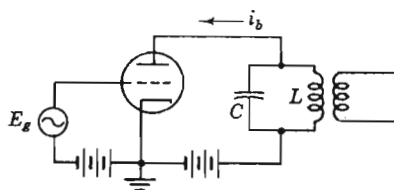



FIG. 12-1 — (*a*) Le forme d'onda in un amplificatore in classe C. (*b*) Il circuito di un amplificatore in classe C.

Il tubo agisce come un interruttore che collega E_{bb} al circuito risonante per un intervallo di tempo corrispondente a $2\theta_1$. Durante questo intervallo, al circuito oscillante viene fornita un'energia sufficiente ad alimentare il carico e le perdite ed a sostenere le oscillazioni fino all'impulso successivo.

Le principali perdite del circuito sono localizzate nel tubo. Queste sono date da $e_b i_b$, e possono essere ridotte se si fa circolare la corrente anodica in brevi impulsi di notevole ampiezza. Una elevata tensione di polarizzazione

dà luogo ad un breve angolo di conduzione in corrispondenza del picco della tensione di ingresso, quando la tensione di placca è minima. In tal modo il rendimento di placca aumenta ma è necessario un segnale di ingresso di notevole ampiezza e quindi aumenta la potenza necessaria in griglia. La resistenza di carico è accoppiata induttivamente con il circuito risonante.

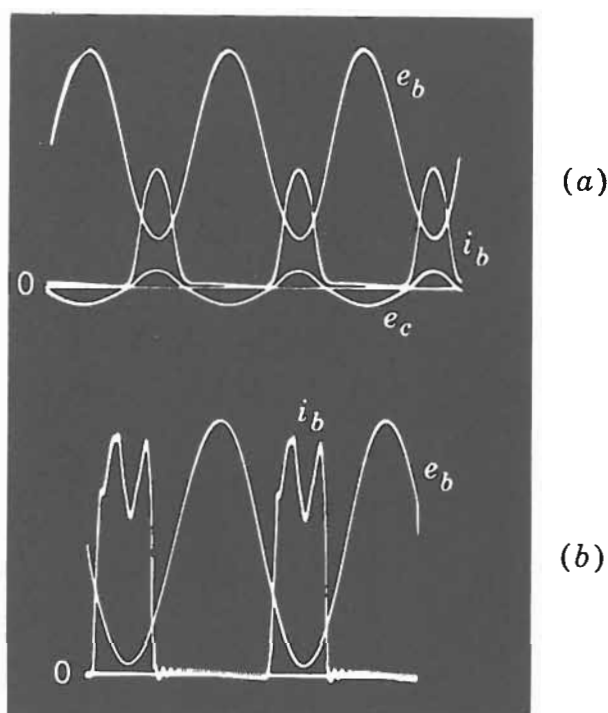



FIG. 12-2 — (*a*) Forme d'onda della tensione anodica, della corrente anodica e della tensione di griglia, in un amplificatore in classe C. (*b*) La corrente è distorta se il circuito è pilotato con una tensione molto elevata.

Il rendimento migliora se si aumenta l'impedenza del circuito alla risonanza poichè si abbassa la tensione minima di placca durante l'intervallo in cui circola corrente. Se però $e_{b\ min}$ viene portata al disotto del picco di tensione di griglia $e_{c\ max}$, la corrente di griglia aumenta rapidamente; se si raggiunge la saturazione, la griglia, che è più positiva, attirerà gli elettroni destinati all'anodo per cui in pratica diminuirà la corrente anodica e con essa la potenza d'uscita. Ciò è mostrato in fig. 12-2 b. Si trova che la massima uscita si ottiene di solito, quando $e_{b\ min} = e_{c\ max}$.

12-2 Analisi del funzionamento dell'amplificatore in classe C.

La possibilità di conoscere le prestazioni di un amplificatore in classe C, dipende dalla conoscenza delle forme d'onda di corrente e di tensione, determinate graficamente dalle caratteristiche del tubo.
Con questo metodo si determina il valore ottimo per l'impedenza di carico, la polarizzazione di griglia, il valore della tensione alternata per pilotare il tubo, la potenza occorrente in griglia, le perdite di placca.

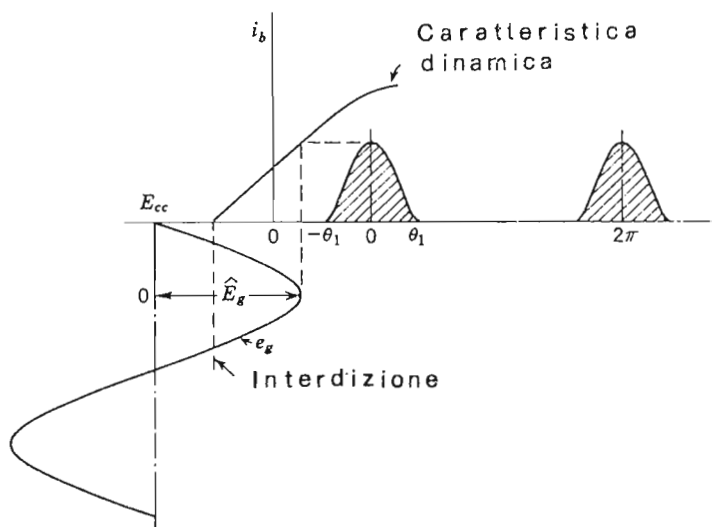



FIG. 12-3 — Studio del classe C.

In fig. 12-3 è mostrato il funzionamento di un amplificatore in classe C con carico accordato. La polarizzazione si fissa di solito ad un valore compreso fra due e cinque volte quello di interdizione; nella figura è due volte l'interdizione. La corrente di placca circola per un angolo pari a $2\theta_1$, inferiore a 180^0. La tensione di placca istantanea, applicata attraverso il circuito risonante, la cui impedenza è resistiva e data da R_L, è

$$e_b = E_{bb} - \hat{I}_1 R_L \cos\theta \qquad (12\text{-}1)$$

con il simbolo $\hat{I}_1$ si indica il valore di picco della armonica fondamentale della corrente alternata di placca.

La tensione istantanea di griglia è:

$$e_c = E_{cc} + \hat{E}_g \cos\theta \qquad (12\text{-}2)$$

Se la caratteristica dinamica è lineare, l'interdizione avviene in corrispondenza di θ_1, cioè quando:

$$e_c = -\frac{e_b}{\mu}$$

La tensione di polarizzazione si può allora calcolare come:

$$E_{cc} = -\frac{E_{bb}}{\mu} - \left(\hat{E}_g - \frac{\hat{I}_1 R_L}{\mu}\right) \cos \theta_1 \qquad (12\text{-}3)$$

Espressione che permette di calcolare quale polarizzazione occorre per avere un dato valore dell'angolo di conduzione.

Dalle relazioni (12-1) e (12-2), ricordando che $\hat{I}_1 R_1 = \hat{E}_1$, si trova:

$$e_b = E_{bb} + E_{cc}\frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_g} - \frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_g} e_c \qquad (12\text{-}4)$$

in cui E_{bb} ed E_{cc}, $\hat{E}_1$ ed $\hat{E}_g$ sono costanti, per cui la relazione ora scritta è quella di una retta del tipo $x = A + B - ay$, la quale indica che il funzionamento in classe C è definito da una relazione lineare fra e_b ed e_c, che può essere tracciata facilmente sulla famiglia di curve a corrente costante, come è mostrato in fig. 12-4. È possibile utilizzare queste curve per ottenere le correnti a diversi valori di θ, e calcolare così il rendimento, le perdite ed altri dati del funzionamento.

Il primo dei due punti che definiscono la retta di carico può essere il punto Q. Se E_{cc} diventa più negativo, l'angolo di conduzione diminuisce ed occorrono tensioni e potenza di pilotaggio più elevate. Un valore ottimo di compromesso è dato da $e_{b\ min} = e_{c\ max}$, relazione che fissa il secondo punto della retta di funzionamento. Nella fig. 12-4 è tracciato il luogo che verifica questa condizione e su cui si fissa l'estremo A della retta di funzionamento.

Le curve di fig. 12-4 sono tracciate per un tubo con $\mu = 50$, ed $E_{bb} = 8000$ V; il punto Q è fissato ad $E_{cc} = -800$ V cioè ad un potenziale cinque volte superiore a quello di interdizione. Il secondo punto della retta, per $E_c = 800$ V, viene fissato sulla retta $e_{b\ min} = e_{c\ max}$. Si traccia quindi una retta congiungente Q ed A. Su questa retta si possono individuare i valori di i_b e di i_c in funzione di ωt.

Il punto A fissa:

$$\hat{E}_1 = 8000 - 800 = 7200 \text{ volt di picco}$$
$$\hat{E}_g = 800 - (-800) = 1600 \text{ volt di picco}$$

Il punto B si trova sulla curva $i_b = 0$, con $e_b = 4850$ V, per cui la tensione sul carico è uguale a $8000 - 4850 = 3150$ V. L'angolo di conduzione $2\theta_1$ è dunque:

$$2\theta_1 = 2 \arccos 3150/7200 = 128^\circ$$

Al punto C, in cui $e_b = 4400$ V, la griglia diventa positiva e circola corrente di griglia. L'angolo di conduzione di griglia è dunque:

$$2\theta_2 = 2\arccos \frac{8000 - 4400}{7200} = 120^\circ$$

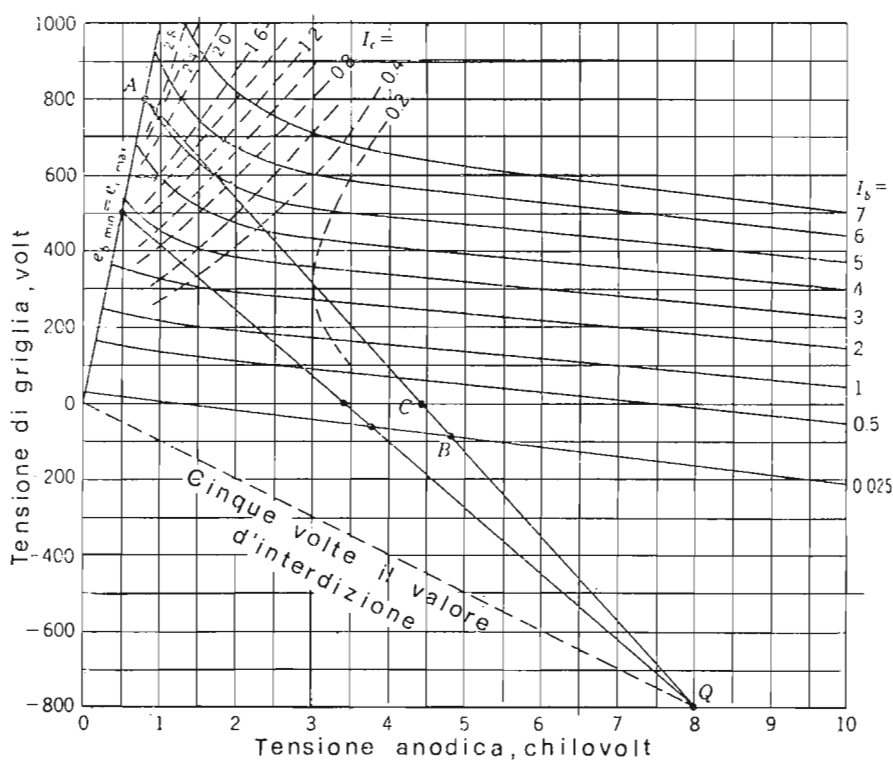



Fig. 12-4. — Curve a corrente costante del triodo 892; $\mu = 50$; massima potenza disponibile = 10 kW.

Nella tabella 27 sono riportati i valori di corrente ricavati dalla retta di funzionamento a intervalli di 10°; in fig. 12-5 sono state tracciate le forme d'onda di corrente. Queste forme d'onda possono essere confrontate con quelle che si ottengono per un'altra retta di funzionamento, passante per lo stesso punto Q, ad $E_{cc} = -800$ V, $E_{bb} = 8000$ V, e con una tensione di gri-

TABELLA 27 — Dati della retta di carico di fig. 12-4

$\mu = 50$ $E_{cc} = -800$ V $e_{b\,min} = e_{c\,max} = 800$ V
$E_{bb} = 8000$ V $\hat{E}_g = 1600$ V

	θ, gradi							
	0	10	20	30	40	50	60	70
cos θ	1,0	0,985	0,940	0,866	0,760	0,643	0,500	0,342
$\hat{E}_1$ cos θ	7200	7100	6770	6250	5470	4620	3600	2460
$E_{bb} - \hat{E}_1$ cos θ	800	900	1230	2750	2530	3380	4400	5540
i_b, A	5,0	5,0	5,2	5,0	3,5	1,7	0,25	
i_c, A	3,2	3,0	1,7	1,0	0,3	0,18	0,0	

glia più bassa ed un'impedenza di carico più elevata in modo che $e_{b\,min} = e_{c\,max} = 500$ V.

Mediante integrazione grafica si ricava il valore medio di i_b e di i_c, cioè I_b ed I_c. Se si divide la base della superficie racchiusa dalla curva $y = f(x)$, in tanti intervalli di ampiezza Δx, fra i limiti *a* e *b*, si ottiene:

$$\int_a^b y dx = \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \Delta x \qquad (13\text{-}5)$$

Poichè

$$I_b = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_b \, d\theta$$

allora la regola dei trapezi, applicata scegliendo y_o in corrispondenza di $\theta = \theta^0$, $y_n = 0$, e

$$\Delta x = 10^o = \frac{\pi}{18}$$

dà come risultato:

$$I_b = \frac{2}{2\pi} \frac{\pi}{18} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (12\text{-}6)$$

Il coefficiente 2 tiene conto del fatto che $y_0 \ldots y_n$ sono compresi in metà dell'angolo di conduzione, nell'ipotesi di una simmetria tipo coseno.

Con procedimento simile, si ricava il valore della corrente di griglia I_c.

L'armonica fondamentale della corrente di placca si ottiene dallo sviluppo in serie di Fourier dell'onda di corrente:

$$i_b = I_b + \hat{I}_1 \cos \theta + \hat{I}_2 \cos 2\theta + \ldots + \hat{I}_n \cos n\theta$$

Il coefficiente $\hat{I}_1$ si ricava moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per cosθ dθ ed integrando fra i limiti $-\pi$, π. Tutti i termini a destra dell'uguaglianza vanno a zero, salvo il secondo; rimane

$$\int_{-\pi}^{\pi} i_b \cos\theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{I}_1 \cos^2\theta \, d\theta = \pi \hat{I}_1 \tag{12-7}$$

da cui

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_b \cos\theta \, d\theta \tag{12-8}$$

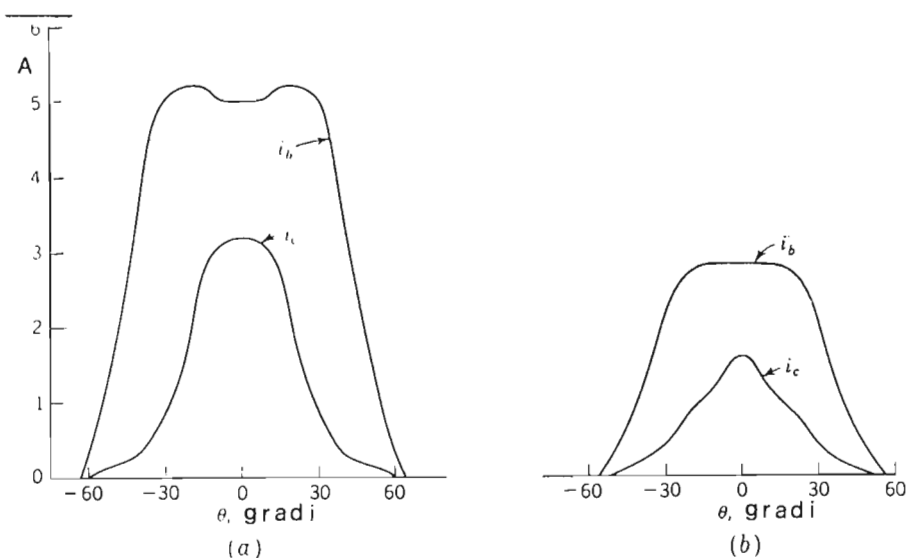



FIG. 12-5. — Forme d'onda di corrente: (a) $e_{b,\,min} = e_{c,\,max} = 800$ V; (b) $e_{b,\,min} = e_{c,\,max} = 500$ V.

Si applica quindi la regola del trapezio, calcolando i prodotti $i_b \cdot \cos\theta$ ad intervalli di 10^0. Detto x_0 il valore di $i_b \cdot \cos\theta$ a 0^0, x_1 quello a 10^0 e così via, si ha:

$$\hat{I}_1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{18}\left(\frac{x_0}{2} + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}\right) \tag{12-9}$$

Con procedimento simile, si ottiene I_{g1} per la corrente di griglia.

Questi calcoli sono stati eseguiti per la retta di funzionamento di fig. 12-4, che passa per il punto $e_{b,min} = e_{c,max} = 500$ V. I risultati sono riportati nella tabella 28.

Questo metodo è applicabile anche ad un tetrodo o ad un tubo a fascio. È da notare però che la tensione di interdizione, per questi tubi, è data dalla formula $-E_{c2}/\mu_{sg}$ in cui μ_{sg} è il fattore di amplificazione della griglia schermo.

TABELLA 28 — Caratteristiche e prestazioni del triodo di fig. 12-4

	(*a*)	(*b*)
E_{bb}, V	8000	8000
E_{cc}, V	—800	—800
$e_{b\,min} = e_{c\,max}$, V	800	500
$2\theta_1$, gradi	128	56
$\hat{E}_g$, V	1600	1300
$\hat{E}_1$, V	7200	7500
I_b, A	1,28	0,59
I_c, A	0,43	0,21
$\hat{I}_1$, A	2,28	1,08
$\hat{I}_{g1}$, A	0,81	0,37

12-3. Relazioni tra le potenze.

La potenza fornita al circuito anodico di un amplificatore in classe C è:

$$P_{in} = E_{bb} I_b \tag{12-10}$$

La potenza fornita al carico dalla fondamentale della tensione alternata è:

$$P_u = \frac{\hat{I}_1^2 R_L}{2} \tag{12-11}$$

Le perdite in placca del tubo sono date da:

$$P_d = P_{in} - P_u$$

Il rendimento del circuito anodico è:

$$\eta_p = \frac{P_u}{P_{in}} \times 100\% \tag{12-12}$$

In tabella 29 è riportato il calcolo della potenza per le due rette di funzionamento studiate. Il rendimento è dell'ordine dell'80-85%.

Nel circuito di griglia la potenza in alternata viene fornita dal generatore esterno. La polarizzazione di griglia si può ottenere o mediante la

TABELLA 29 — Relazioni tra le potenze per il triodo di fig. 12-4

	(*a*)	(*b*)
E_{bb}, V	8000	8000
E_{cc}, V	—800	—800
I_b, A	1,28	0,59
$\hat{E}_1$, V	7200	7500
I_c, A	0,43	0,21
$\hat{E}_g$, V	1600	1300
I_1, A	2,28	1,08
I_{g1}, A	0,81	0,37
$2\theta_1$, gradi	128	112
R_L, ohm	3160	6950
Potenza d'ingresso W	10250	4720
Potenza d'uscita, W	8200	4050
Perdite anodiche, W	2050	670
η_P, %	80	85,8
Potenza di pilotaggio di griglia, W	646	244
Perdite di griglia, W	302	84
Guadagno di potenza	12,7	16,6

componente continua della corrente di griglia ed un resistore di griglia il cui valore sia:

$$R_g = \frac{E_{cc}}{I_c}$$

oppure con un alimentatore. La potenza totale fornita al circuito di griglia è:

$$P_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_c \hat{E}_g \cos \theta \, d\theta \qquad (12\text{-}13)$$

queste grandezze si possono integrare nel modo indicato nell'equazione (12-6).
È da osservare che i valori più elevati della corrente di griglia si hanno

in prossimità dei picchi dell'onda di tensione di griglia, quando cos θ è prossimo all'unità. Se si fa questa ipotesi, si ha:

$$P_c \cong \frac{\hat{E}_g}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_c \, d\theta$$

ma

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_c \, d\theta$$

Per cui la potenza totale dissipata in griglia è circa:

$$P_c \cong \hat{E}_g I_c$$

in cui I_c è la corrente continua di griglia. Dai dati della tabella 29 *a*, si trova che occorre in griglia una potenza di 688 W, mentre l'equazione (12-13) fornisce il valore, più esatto, di 646 W.

Poichè la potenza occorrente per pilotare il circuito di griglia richiede un'apparecchiatura costosa, si può considerare il *guadagno in potenza* come la capacità di un amplificatore a funzionare con potenza di ingresso relativamente ridotta. Il guadagno in potenza è il rapporto fra la potenza alternata che si ottiene in placca, e la potenza alternata applicata in griglia, cioè:

$$\text{guadagno in potenza} = \frac{P_u}{P_c} \qquad (12\text{-}15)$$

I componenti elettronici vengono classificati secondo la massima potenza che possono dissipare, invece che secondo la massima potenza che possono fornire in uscita, come si usa per la maggior parte delle macchine elettriche. È quindi importante studiare l'effetto delle condizioni di funzionamento sul rendimento. Dall'esempio precedente si vede che effetto ha una variazione della impedenza di carico sulla potenza occorrente in ingresso, sul rendimento e sulla potenza d'uscita.

Si possono trovare delle relazioni che forniscono le condizioni ottime, ponendo $e_{b\,min} = e_{c\,max}$ e considerando varie condizioni di funzionamento date da rette passanti per un certo punto α. Dai risultati che si ottengono, si possono scegliere i valori di R_L, $\hat{E}$ ed E_{cc} ed assicurarsi che le perdite in placca siano inferiori al valore limite.

12-4 Il circuito risonante.

Come carico per questi amplificatori ed oscillatori, si fa uso di un circuito risonante parallelo. La resistenza di carico è collegata tramite la mutua induttanza M al circuito accordato (fig. 12-6); con R si indica la somma della

resistenza serie di L e del carico esterno R_x. Per i circuiti risonanti si definisce una cifra di merito Q, data da:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R}$$

dove ω_r è la pulsazione di risonanza del circuito. Se Q ha un valore non troppo basso ($Q>10$), $\omega_r LI$ è approssimativamente uguale ad E_1, tensione sul carico, e si ha:

$$Q = \frac{(\omega_r LI)I}{RI^2} \cong \frac{E_1 I}{RI^2} = \frac{\text{volt-ampere}}{\text{watt}} \qquad (12\text{-}16)$$

cioè Q è approssimativamente uguale al rapporto fra i volt-ampere che circolano nel circuito e la potenza dissipata in R. Il circuito riceve energia solo durante l'intervallo in cui circola l'impulso di corrente, mentre cede energia al carico durante l'intero periodo. Se si vuole che la forma d'onda non sia distorta, il rapporto fra l'energia che circola e quella prelevata deve essere elevato, così come l'energia che si preleva da un pendolo deve essere piccola rispetto all'energia immagazzinata nella massa oscillante, altrimenti si altera la velocità di oscillazione del pendolo.

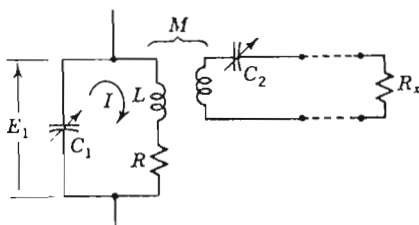



FIG. 12-6. — Circuito di carico risonante.

Da queste considerazioni si ricava che, in pratica, il Q sotto carico deve avere un valore non inferiore a 10. L'impedenza alla risonanza di un circuito parallelo è:

$$R_L = \frac{L}{CR} \qquad (12\text{-}17)$$

La potenza in uscita è:

$$P_u = \frac{\hat{E}_1^2}{2R_L}$$

Se allora si vuole che il circuito abbia una data impedenza, alla risonanza deve essere:

$$\frac{L}{C} = \frac{R\,\hat{E}_1^2}{2\,P_u}$$

$$X_c = \frac{1}{\omega_r C} = \frac{\hat{E}_1^2}{2QP_u} = \frac{E_1^2}{QP_u} \qquad (12\text{-}18)$$

in cui E_1 è il valore efficace. Dalla teoria dei circuiti risonanti,

$$X_L = \omega_r L = X_c\left(\frac{Q^2}{1 + Q^2}\right) \qquad (12\text{-}19)$$

espressione che permette di progettare il circuito di uscita.

L'accoppiamento fra il carico R_x ed il circuito accordato si studia con i normali metodi dei circuiti accoppiati. Con riferimento alla fig. 12-6, se C_2 si sceglie in modo da compensare la reattanza di L_2 alla pulsazione ω_r, l'impedenza vista dal circuito risonante è:

$$R' = \frac{\omega_r^2 M^2}{R_2 + R_x} \qquad (12\text{-}20)$$

in cui R_2 è la resistenza di L_2. Il carico R è dunque costituito da R_1, resistenza di L_1, in serie con R'. Se si accorda il carico agendo su C_1, si ottiene la massima impedenza e quindi $\hat{E}_1$ aumenta; si riduce allora il valor medio della tensione di placca e la corrente continua di placca diminuisce. Quindi la condizione di risonanza e di carico accordato vengono indicate da un minimo nel valore indicato dallo strumento che misura la corrente continua di placca dell'amplificatore. È anche possibile, ricorrendo ad adatti strumenti di misura, accordare il circuito in modo da avere la massima $\hat{E}_1$ o la massima I.

12-5 I campi elettromagnetici nei metalli.

Un'importante applicazione degli amplificatori di potenza in classe C è la generazione di notevoli potenze per il trattamento dei metalli mediante correnti indotte o per il riscaldamento di materiali non conduttori per perdite dielettriche.

Con questo metodo, si riescono a riscaldare i metalli più rapidamente che in un forno; inoltre è possibile riscaldare solo una parte limitata del pezzo di metallo. La corrente ad alta frequenza circola in un avvolgimento che circonda il pezzo di metallo da riscaldare, e la corrente viene indotta nel metallo come nel secondario di un trasformatore. È possibile controllare la zona riscaldata, poichè l'avvolgimento può essere posto dove si vuole e poichè

le correnti, ad alta frequenza, circolano solo in un sottile strato superficiale.

La tendenza delle correnti ad alta frequenza ad addensarsi alla superficie è detta *effetto pelle*. Questo effetto viene sfruttato quando si vuol riscaldare ed indurire solo una sottile pellicola esterna del metallo. L'effetto pellicolare si spiega ricordando che esiste un flusso interno per cui un filetto di corrente che si trovi al centro della sbarra conduttrice è concatenato con un flusso più elevato e quindi ha una reattanza maggiore di quella di un filetto che si trova alla superficie della sbarra. La corrente cerca il percorso a minima impedenza e quindi circola solo alla superficie o in prossimità di essa. Questo fenomeno si nota già a 60 Hz e diventa molto notevole, a frequenze di qualche migliaio di Hertz, nei buoni conduttori.

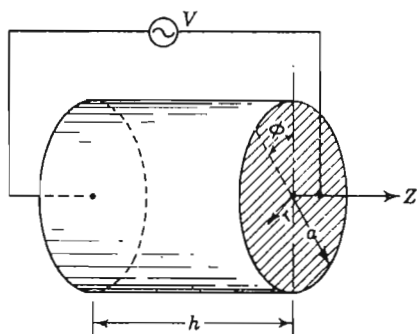



FIG. 12-7. — Cilindro conduttore con piastre terminali perfettamente conduttrici. Si osservino gli assi di riferimento.

L'effetto pellicolare si può studiare esaminando il cilindro di fig. 12-7 di lunghezza h e raggio a. Il generatore di tensione alternata V è collegato a due sottili elettrodi di metallo, perfettamente conduttori, ciascuno dei quali è a contatto di una estremità del cilindro. Trascurando i bordi, la corrente ed il campo sono simmetrici rispetto all'asse del cilindro e variano solo in funzione del tempo e del raggio r. Le relazioni che descrivono i campi esistenti sono date dalle equazioni di Maxwell, nelle coordinate cilindriche r, Φ e z:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial \mathcal{E}_\Phi}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} &= -\mu \frac{\partial H_\Phi}{\partial t} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{E}_\Phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \Phi} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \tag{12-21}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial H_\Phi}{\partial z} = \sigma \mathcal{E}_r + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma \mathcal{E}_\Phi + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_\Phi}{\partial t} \qquad (12\text{-}22)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\Phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \Phi} = \sigma \mathcal{E}_z + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}$$

Nel caso simmetrico che qui si considera, tutte le componenti del campo sono zero salvo H_φ ed ε_z per cui le equazioni ora scritte si riducono a:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_\Phi}{\partial t} \qquad (12\text{-}23)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\Phi) = \sigma \mathcal{E}_z + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} \qquad (12\text{-}24)$$

in cui σ è la conduttività del materiale ed ε e μ sono la *permittività* e la *permeabilità* del materiale,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \mathcal{E}_v \qquad \mu = \mu_r \mu_v$$

i valori corrispondenti al vuoto sono:

$$\mathcal{E}_v = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \text{Farad/m} \qquad \mu_v = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$$

Se si fa l'ipotesi che il potenziale applicato sia variabile nel tempo come la parte reale di $V = V_m e^{j\omega t}$, i campi varieranno in maniera analoga e:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = j\omega\mu H \qquad (12\text{-}25)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH\right) = \frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathcal{E} \qquad (12\text{-}26)$$

Queste equazioni descrivono i campi esistenti nel cilindro di fig. 12-7 con $\varepsilon = \varepsilon_z$ ed $H = H_\varphi$.

Risolvendo l'Eq. (12-25) rispetto ad H e sostituendo il valore trovato nella Eq. (12-26), si trova:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathcal{E} = 0 \qquad (12\text{-}27)$$

Si può definire una variabile γ data da

$$\gamma^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma \qquad (12\text{-}28)$$

allora si ha:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + \gamma^2 \mathcal{E} = 0 \qquad (12\text{-}29)$$

Questa è una equazione differenziale del tipo di Bessel; la sua soluzione generale è:

$$\mathcal{E} = AJ_o(\gamma r) + BK_o(\gamma r)$$

con A e B costanti arbitrarie. $J_o(\gamma r)$ è una funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, mentre $K_o(\gamma r)$ è una funzione di Bessel di seconda specie e di ordine zero. $K_o(\gamma r)$ tende all'infinito quando il suo argomento tende a zero, per cui la costante B deve essere uguale a zero, in modo che il campo al centro del cilindro assuma un valore finito, come è richiesto dalla realtà fisica. La soluzione si riduce a:

$$\mathcal{E} = AJ_o(\gamma r)$$

La funzione di Bessel $J_o(\gamma r)$ rappresenta la somma della serie infinita:

$$J_0(\gamma r) = 1 - \frac{(\gamma r)^2}{2^2} + \frac{(\gamma r)^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{(\gamma r)^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \ldots \tag{12-30}$$

I valori di alcune funzioni di Bessel sono tabellate in Bibl. 10; in appendice sono riportate le curve relative.

Per $r = 0$, $J(0) = 1$; all'intensità del campo elettrico, per $r = 0$, si può assegnare il valore $\mathcal{E}_o$, in modo che

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_o J_o(\gamma r) \tag{12-31}$$

rappresenta il valore di $\mathcal{E}$ in corrispondenza del raggio r espresso in funzione del campo esistente sull'asse.

L'intensità del campo magnetico si ricava dall'Eq. (12-25):

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}$$

eseguendo la derivata della Eq. (12-31) si trova l'espressione:

$$H = \frac{j\gamma \mathcal{E}_0 J_1(\gamma r)}{\omega\mu} \tag{12-32}$$

in corrispondenza di ogni raggio del cilindro. Nella precedente espressione si è posto:

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\gamma r) = -\gamma J_1(\gamma r) \tag{12-33}$$

il termine $J_1(\gamma r)$ è una funzione di Bessel di prima specie e del primo ordine, i cui valori si trovano tabellati.

12-6 L'effetto pelle nei metalli.

Se il cilindro di fig. 12-7 è un buon conduttore, è lecito fare alcune ipotesi semplificatrici. In particolare, si può dimostrare che $\sigma \gg \omega\varepsilon$ anche alla più alta frequenza raggiungibile. Per i buoni conduttori, cioè i metalli, l'Eq. (12-28) si può allora scrivere:

$$\gamma^2 = -j\omega\mu\sigma \tag{12-34}$$

Poichè le correnti ad alta frequenza tendono a fluire in prossimità della superficie, si può definire la quantità δ, detta *profondità di penetrazione*, che si utilizza per determinare la profondità a cui penetra la corrente nel riscaldamento ad alta frequenza. Si trova

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad \text{metri} \tag{12-35}$$

il parametro γ allora diventa:

$$\gamma = \sqrt{-j}\,\frac{\sqrt{2}}{\delta} \tag{12-36}$$

e dalla Eq. (12-31):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 J_0\left(\sqrt{-j}\,\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right) \tag{12-37}$$

nel cilindro conduttore.

Nella equazione ora scritta compare una funzione di Bessel ad argomento complesso. Questa funzione porta alla somma di due serie: i termini reali formano una serie chiamata « ber(x) », mentre i termini immaginari formano la serie « bei(x) », per cui:

$$J_0(\sqrt{-j}\,x) = \text{ber}(x) + j\,\text{bei}(x) \tag{12-38}$$

le derivate di queste serie si indicano con i simboli « ber'(x) » e « bei'(x) » cioè:

$$\frac{d}{dx} J_0(\sqrt{-j}\,x) = -\,[\text{ber}'(x) + j\,\text{bei}'(x)] \tag{12-39}$$

anche queste funzioni sono tabellate in Bibl. 10. L'eq. (12-37) si può allora esprimere sfruttando le relazioni ora scritte, come segue:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right) + j\,\text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right)\right] \tag{12-40}$$

La densità di corrente è data da $\sigma\varepsilon$, si ha pertanto:

$$J = \sigma\mathcal{E}_0 \sqrt{\left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right)\right]^2 + \left[\text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right)\right]^2} \qquad (12\text{-}41)$$

presa in valore assoluto.

In fig. 12-8 è riportato il diagramma di J in funzione di r nel caso di un conduttore di rame; si vede che, al crescere della frequenza, la corrente si addensa alla superficie. Dalla definizione

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

è possibile calcolare la corrente totale nel cilindro come:

$$I_T = 2\pi a H_a = \frac{j2\pi a\gamma\mathcal{E}_0 J_1(\gamma a)}{\omega\mu}$$

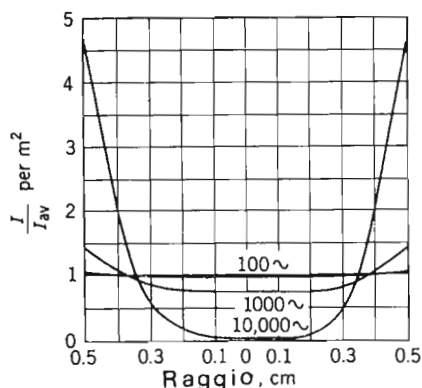



FIG. 12-8. — Rapporto fra la densità di corrente e la corrente media in un conduttore; si vede la profondità di penetrazione, dovuta all'effetto pellicolare.

Si può eliminare $J_1(\gamma a)$ utilizzando l'Eq. (12-33); la corrente totale nel cilindro conduttore è allora:

$$I_T = \frac{-j2\sqrt{2}\,\pi a\mathcal{E}_0}{\omega\mu\delta}\left[\text{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{\delta}\right) + j\,\text{bei}'\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{\delta}\right)\right]$$

L'impedenza per unità di lunghezza del cilindro è allora:

$$Z = \frac{\mathcal{E}}{I_T} = \frac{j\omega\mu\delta}{2\sqrt{2}\,\pi a}\left[\frac{\text{ber}\,(\sqrt{2}\,a/\delta) + j\,\text{bei}\,(\sqrt{2}\,a/\delta)}{\text{ber}'\,(\sqrt{2}\,a/\delta) + j\,\text{bei}'\,(\sqrt{2}\,a/\delta)}\right] \qquad (12\text{-}43)$$

Questa impedenza è del tipo $Z = R_{ac} + jX_{ac}$ e può essere scritta in forma normalizzata come:

$$\frac{Z}{R_{dc}} = \frac{R_{ac}}{R_{dc}} + J\,\frac{X_{ac}}{R_{dc}}$$

con $R_{dc} = 1/\sigma\pi a^2$. Il coefficiente allora si riduce a

$$\frac{\omega\mu\delta}{2\sqrt{2}\,\pi a}\,\frac{1}{R_{dc}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,a}{\delta} \tag{12-44}$$

sicchè risulta:

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,a}{\delta}\,B_1 \tag{12-45}$$

$$\frac{X_{ac}}{R_{dc}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,a}{\delta}\,B_2 \tag{12-46}$$

in cui B_1 e B_2 sono espressioni comprendenti delle funzioni di Bessel. In fig. 12-9, sono tracciati i grafici di queste funzioni in funzione di a/δ cioè del raggio, misurato rispetto allo spessore di penetrazione.

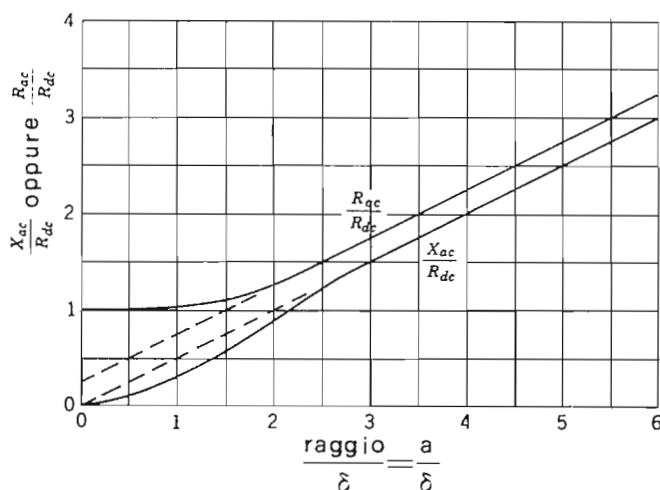



FIG. 12-9. — Resistenza e reattanza ad alta frequenza.

Al disopra di $a/\delta = 2$, le relazioni sono praticamente lineari e le equazioni:

$$\text{per } \frac{a}{\delta} > 2 \quad \begin{cases} \dfrac{R_{ac}}{R_{dc}} = \dfrac{a}{2\delta} + 0{,}25 & (12\text{-}47) \\[2ex] \dfrac{X_{ac}}{R_{dc}} = \dfrac{a}{2\delta} & (12\text{-}48) \end{cases}$$

approssimano soddisfacentemente le relazioni esatte.

Con riferimento alla Eq. (12-35), si vede che un aumento della frequenza f, di σ, o di μ, produce una diminuzione della profondità di penetrazione della corrente. La diminuzione di δ, e quindi della sezione efficace del conduttore, produce un aumento della resistività all'aumentare della frequenza. Si consideri una corrente continua che circoli nel conduttore pieno di fig. 12-10a; la resistenza per unità di lunghezza è:

$$R_1 = \frac{E_1}{I} = \frac{1}{\sigma\pi a^2}$$

Si consideri poi il conduttore tubolare di fig. 12-10b, di spessore δ in cui la stessa corrente sia distribuita uniformemente. Si trova:

$$R_2 = \frac{E_2}{I} = \frac{1}{\sigma[\pi a^2 - \pi(a - \delta)^2]}$$

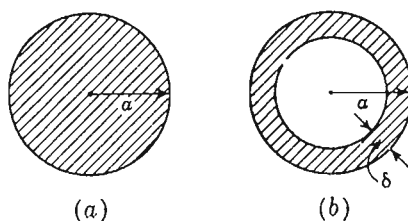



FIG. 12-10. — Conduttore tubolare di spessore uguale alla profondità di penetrazione, equivalente ad un conduttore pieno.

il rapporto R_2/R_1 è dunque:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma\pi a^2}{\sigma[\pi a^2 - \pi(a - \delta)^2]} = \frac{a}{2\delta}\,\frac{1}{(1 - \delta)/2a}$$

e se $\delta/2a \ll 1$,

$$\frac{1}{(1 - \delta)/2a} \cong 1 + \frac{\delta}{2a}$$

per cui

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{a}{2\delta}\left(1 + \frac{\delta}{2a}\right) = \frac{a}{2\delta} + 0{,}25 \qquad (12\text{-}49)$$

che è proprio l'Eq. (12-47), il che dimostra che il rapporto R_{ac}/R_{dc} è quello che si ottiene se tutta la corrente è costretta in uno strato di spessore δ ed è uniformemente distribuita in esso.

12-7 Riscaldamento ad induzione dei cilindri.

Il riscaldamento ad induzione dei metalli, si realizza spesso mediante una struttura simile a quella riportata in fig. 12-11, cioè un lungo conduttore cilindrico circondato da un conduttore avvolto ad elica in cui circola la corrente. La corrente indotta nella sbarra produce delle perdite, uguali ad I^2R, che riscaldano la sbarra.

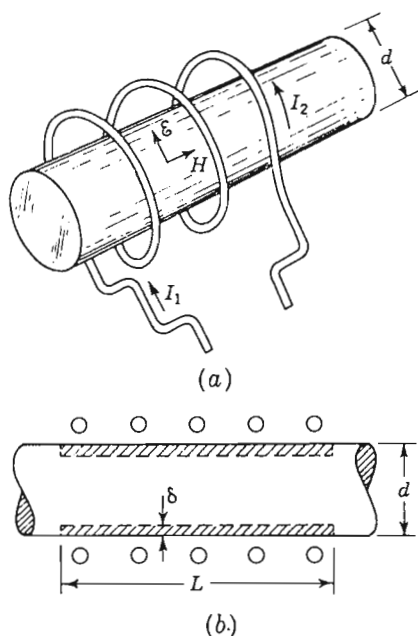



FIG. 12-11. — (*a*) Avvolgimento che circonda una barra cilindrica. (*b*) La profondità di penetrazione.

Si fa l'ipotesi che la sbarra e l'avvolgimento siano tanto lunghi da non dover tenere conto dei fenomeni che accadono alle estremità. Si fa anche l'ipotesi che H sia ovunque diretto secondo l'asse e che sia solo funzione del raggio *r* e del tempo; inoltre si suppone che ε sia funzione solo del raggio e del tempo.

Tornando alle Eq. (12-21) e (12-22), in cui H_z ed ε_Φ sono le uniche componenti presenti nella geometria che abbiamo scelto, si può giungere alle seguenti espressioni:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Phi}{\partial r} + \frac{\mathcal{E}_\Phi}{r} = -j\omega\mu H_z \tag{12-50}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma + j\omega\epsilon)\,\mathcal{E}_\Phi \tag{12-51}$$

che descrivono la configurazione dei campi. Analogamente a quanto fatto al paragrafo 12-5, si trova:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)H = 0 \tag{12-52}$$

ove si è posto $H = H_z$. Si può di nuovo supporre che $\sigma \gg \omega\varepsilon$ se il cilindro è metallico.

L'Eq. (12-52) è formalmente identica alla Eq. (12-27), sostituendo H ad ε ed orientando i campi secondo quanto suggerisce la realtà fisica, cioè con H diretto secondo l'asse ed ε tangente alla circonferenza. La soluzione si può scrivere, utilizzando l'Eq. (12-40),

$$H = C\left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right) + j\ \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\delta}\right)\right] \tag{12-53}$$

Il campo, immediatamente all'esterno della superficie del cilindro, deve essere uguale a quello prodotto dall'avvolgimento che circonda il pezzo più quello prodotto dalle correnti che circolano nel cilindro. Nel caso di un conduttore perfetto, queste due quantità dovrebbero essere uguali e dello stesso segno; per un conduttore reale e per lunghezze d'onda grandi rispetto alla distanza fra l'avvolgimento ed il cilindro, questa condizione è ancora quasi esattamente verificata. Allora il campo magnetico totale alla superficie del cilindro di raggio a è praticamente uguale al doppio del campo applicato, cioè $2H_0$. Calcolando C per $r = a$ si trova:

$$H = 2H_0\left[\frac{\text{ber}(\sqrt{2}\,r/\delta) + j\ \text{bei}(\sqrt{2}\,r/\delta)}{\text{ber}(\sqrt{2}\,a/\delta) + j\ \text{bei}\ \sqrt{2}\,a/\delta)}\right] \tag{12-54}$$

e, dall'eq. (12-51)
$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{2\sqrt{2}\,H_0}{\sigma\delta}\left[\frac{\text{ber}'(\sqrt{2}\,r/\delta) + j\ \text{bei}'(\sqrt{2}\,r/\delta)}{\text{ber}(\sqrt{2}\,a/\delta) + j\ \text{bei}(\sqrt{2}\,a/\delta)}\right] \tag{12-55}$$

La potenza dissipata in ogni metro del cilindro metallico sarà:

$$P = \int_{r=o}^{r=a} 2\pi r\sigma\mathcal{E}^2 dr$$

che è data da:

$$P = \frac{8\pi H_0^2}{\sigma}\frac{a}{\delta}F \tag{12-56}$$

in cui F è definito come:

$$F = \sqrt{2}\left\{\frac{\text{ber}(\sqrt{2}\,a/\delta)\ \text{ber}'(\sqrt{2}\,a/\delta) + \text{bei}(\sqrt{2}\,a/\delta)\ \text{bei}'(\sqrt{2}\,a/\delta)}{[\text{ber}(\sqrt{2}\,a/\delta)]^2 + [\text{bei}(\sqrt{2}\,a/\delta)]^2}\right\}$$

In fig. 12-12 è riportato F in funzione del rapporto a/δ.

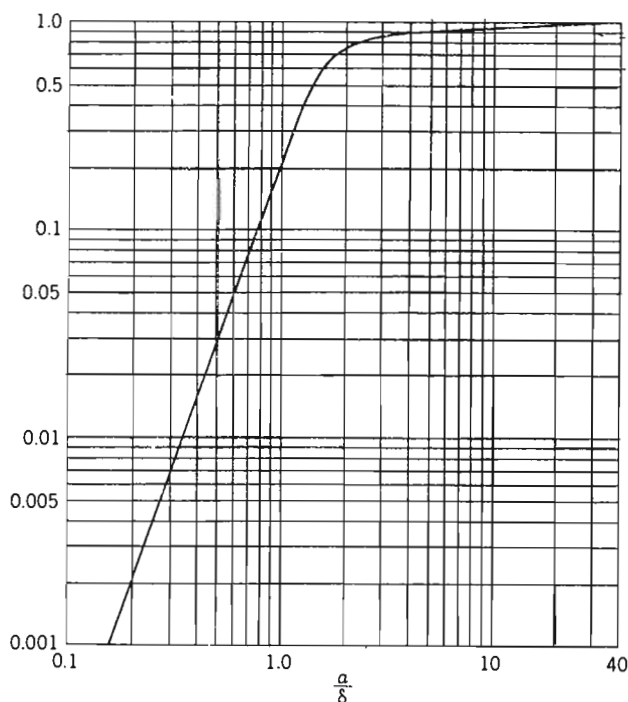



FIG. 12-12. — F in funzione di a/δ.

Nel caso di un cilindro di circonferenza $2\pi a$ ed 1 metro di lunghezza, la densità di potenza superficiale, cioè la potenza per unità di superficie è:

$$P_d = \frac{P}{2\pi a} = \frac{8\pi H_0^2}{2\pi a}\ \frac{a}{\sigma\delta}\ \text{W/m}^2$$

e al limite, *nel caso di un foglio piano,* quando *a* assume un valore molto elevato, si ha:

$$P_d = \frac{4H_0^2}{\sigma\delta}\ \text{W/m}^2 \qquad (15\text{-}57)$$

Per una data corrente nell'avvolgimento di eccitazione, H_o è costante, e la potenza P indotta nel cilindro metallico aumenta con aF/δ, che è funzione della frequenza. Tuttavia Brown ha messo in evidenza il fatto che F non aumenta rapidamente al variare di a/δ se $a/\delta > 2{,}5$; la fig. 12-12 mostra questo fatto. Il ginocchio della curva individua una frequenza critica al disopra della quale non conviene lavorare. In realtà si vede che, per le frequenze maggiori del valore critico f_c, le perdite nell'avvolgimento di eccitazione aumentano alla stessa velocità con cui aumenta la potenza indotta nel pezzo, per cui non si ha aumento di rendimento. Per frequenze inferiori ad f_c, la potenza massima applicabile in ingresso diminuisce rapidamente; in definitiva, la frequenza adatta per un dato pezzo deve essere superiore a:

$$\frac{a}{\delta} = \frac{a}{\sqrt{2/\omega\mu\sigma}} = 2{,}5$$

$$f_c = \frac{12{,}5}{2\pi\mu\sigma a^2} \cong \frac{2}{\mu\sigma a^2} \qquad (12\text{-}58)$$

Tutte le formule finora scritte, salvo la Eq. (12-27), sono state ricavate studiando una barra cilindrica; naturalmente si possono avere numerose altre configurazioni per l'oggetto da riscaldare.

12-8. Riscaldamento di cilindri e lastre dielettriche.

Una applicazione del metodo illustrato al paragrafo 12-5 è quello del riscaldamento dei dielettrici. Si supponga che il dielettrico di fig. 12-13 sia perfetto, cioè che $\sigma = 0$. Per i dielettrici, $\mu = \mu_v$ e quindi:

$$\gamma = \sqrt{\omega^2\mu_v\varepsilon_v\varepsilon_r}$$

la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è $c \cong 3 \cdot 10^8$ m/sec e la lunghezza d'onda nel vuoto è $\lambda_0 = c/f$. Quindi:

$$\gamma = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0} \qquad (12\text{-}59)$$

l'Eq. (12-31) fornisce la seguente espressione del campo elettrico nei dielettrici perfetti:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = J_0\,\frac{2\pi r\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0} \qquad (12\text{-}60)$$

In fig. 12-14, la curva a tratto pieno indica la variazione relativa $\varepsilon/\varepsilon_0$ dell'intensità del campo elettrico; si vede che questa intensità varia nel cilindro al variare della profondità, espressa in lunghezze d'onda.

Ordinariamente si desidera aumentare uniformemente la temperatura dei dielettrici applicando una tensione ad alta frequenza agli elettrodi. Se il materiale presenta delle perdite, cioè $0<\sigma<\omega\varepsilon$, dall'Eq. (12-28) si ricava:

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu_v \epsilon_v \epsilon_r (1 - j\alpha)}$$

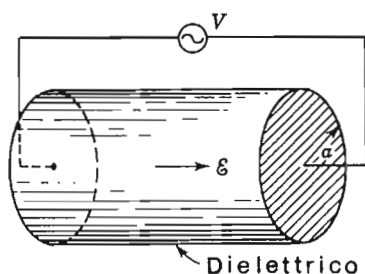



Fig. 12-13. — Cilindro dielettrico fra due elettrodi conduttori.

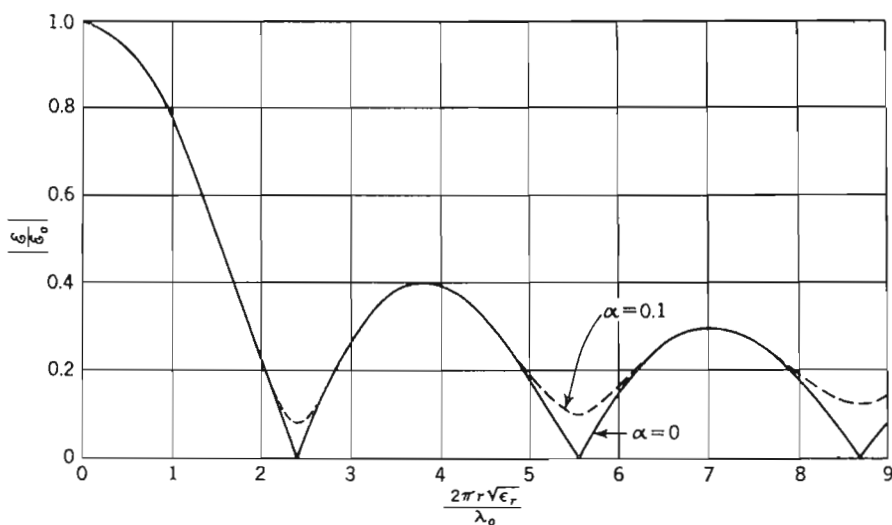



Fig. 12-14. — $|\varepsilon/\varepsilon_0|$ in un cilindro dielettrico.

dove $\alpha = \sigma/\omega\varepsilon_v\varepsilon_r = \sigma/\omega\varepsilon$, ed è quindi una piccola quantità. Perciò:

$$\gamma = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0}\sqrt{1 - j\alpha} \tag{12-61}$$

valore che può essere sostituito nello sviluppo in serie di $J_0(\lambda r)$.

Sostituendo il risultato nella espressione di ε nell'Eq. (12-31), e trascurando i quadrati e le potenze superiori di α, si trova:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = J_0 \frac{2\pi r\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} + j\frac{\alpha}{2}\frac{2\pi r\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} J_1 \frac{2\pi r\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \tag{12-62}$$

Il valore assoluto di questa espressione, con $\alpha = 0{,}1$ è riportato, tratteggiato, in fig. 12-14. È utile paragonare questa curva a quella ottenuta nel caso del dielettrico perfetto. La coincidenza è notevole, salvo che nel caso ideale vi sono dei punti ad intensità nulla. I valori di α per la maggior parte dei dielettrici sono compresi fra 0 e 0,1 per cui le due curve di fig. 12-14 costituiscono i limiti per molti casi pratici.

Poichè c'è poca differenza fra l'intensità del campo elettrico nel caso di un dielettrico con perdite e quella in un dielettrico perfetto, e poichè l'Eq. (12-60) è notevolmente più semplice della Eq. (12-62) che è quella esatta, si userà la prima equazione per determinare la potenza dissipata nel dielettrico, tenendo presente che vi sarà un certo errore in prossimità dei punti in cui il campo è nullo.

L'espressione della potenza dissipata, in funzione del raggio è:

$$P_r = \sigma\mathcal{E}^2 = \sigma\mathcal{E}_0^2 J_0^2 \frac{2\pi r\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \ \text{W/m}^3 \tag{12-63}$$

la potenza totale in un metro di cilindro è:

$$P = 2\pi\sigma\mathcal{E}_0^2 \int_{r=0}^{r=a} r J_0^2 \frac{2\pi r\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0}\, dr$$

indicando con $2\pi r dr \times 1$ il volume elementare e cambiando la variabile di integrazione, si ha:

$$P = \frac{2\pi\sigma\mathcal{E}_0^2}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0} \int_0^{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0} x J_0^2(x)\, dx$$

$$= \pi a^2\sigma\mathcal{E}_0^2 \left(J_0^2 \frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} + J_1^2 \frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0}\right) \quad \text{W/m} \tag{12-64}$$

Il volume di un cilindro lungo un metro è $\pi a^2 \times 1$, e la potenza media dissipata per metro cubo è:

$$P_m = \sigma\mathcal{E}_0^2 \left(J_0^2 \frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} + J_1^2 \frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0}\right) \tag{12-65}$$

È interessante misurare l'uniformità del riscaldamento, cioè della potenza dissipata a ciascun raggio, paragonata al valore medio. Si trova:

$$\frac{P_r}{P_m} = \frac{J_0^2(2\pi r\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0)}{J_0^2(2\pi a\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0) + J_1^2(2\pi a\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0)} \tag{12-66}$$

In fig. 12-15 è riportata questa relazione nel caso di una lastra di dielettrico di 50 cm di diametro e di spessore arbitrario, per frequenze di 60, 150 e 300 MHz. Le due frequenze più alte non producono un riscaldamento uniforme.

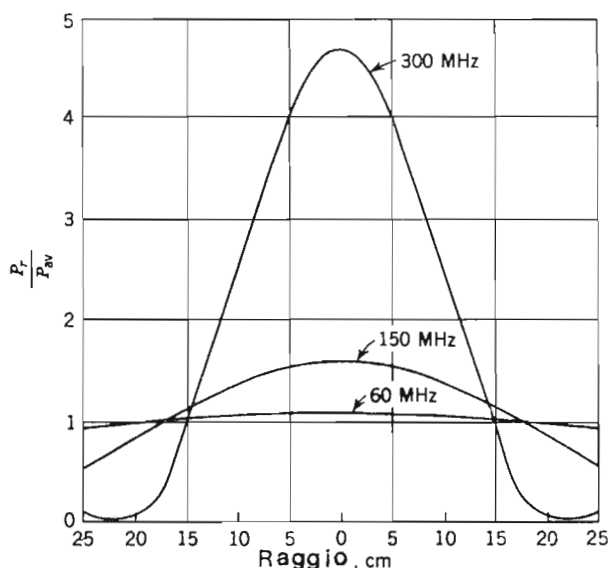



FIG. 12-15. — Distribuzione della potenza lungo un disco dielettrico; diametro 50 cm, $\varepsilon_r = 3{,}0$.

In molti casi è necessario che il riscaldamento sia uniforme; si può allora fissare una frequenza limite f_c secondo la variazione massima che si può tollerare.

Nell'ipotesi che δ_0 sia costante a tutte le frequenze, il rapporto fra la potenza dissipata ad r e quella al centro è:

$$\frac{P_r}{P_{centro}} = \frac{J_0^2(2\pi r\sqrt{\epsilon_r}/\lambda_0)}{1} \tag{12-67}$$

poichè $J_0(0) = 1{,}0$. Se allora alla periferia deve esservi lo 0,95 della potenza dissipata al centro, si ha:

$$J_0 \frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} = \sqrt{0{,}95} = 0{,}975$$

dalle tabelle risulta:

$$\frac{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} = 0{,}3$$

$$f_c = \frac{0{,}3 \times 3 \times 10^8}{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{14{,}31}{a\sqrt{\epsilon_r}}\ \text{MHz}$$

che è la frequenza massima per cui la potenza alla periferia non è meno del 95% di quella al centro.

12-9 Potenza occorrente per un riscaldamento rapido.

Un vantaggio del riscaldamento dielettrico ad induzione è la velocità con cui si riesce a produrre il calore. Questa velocità è un fattore molto importante nella qualità del prodotto finito, perchè la temperatura viene elevata così rapidamente da rendere piccolissime sia la dispersione di calore per conduzione alle parti vicine al pezzo che viene riscaldato, sia le perdite per convezione. È utile poter prevedere la potenza occorrente a portare un pezzo ad una data temperatura in un dato tempo, se sono trascurabili le perdite per conduzione e per convezione. Il calore prodotto serve allora solo ad elevare la temperatura, a compensare le perdite per irraggiamento, ed a fornire il calore latente di fusione o di evaporazione.

Dato un materiale di M Kg, il cui calore specifico sia S, si ha che il calore necessario ad elevarne la temperatura di $\Delta\theta^0$ è:

$$\Delta h = SM\Delta\theta$$

il calore da fornire nell'unità di tempo è:

$$\frac{dh}{dt} = SM \frac{d\vartheta}{dt}$$

che è il calore che viene immagazzinato durante la variazione di temperatura.

Si è supposto che le perdite siano dovute solo all'irraggiamento. Per un radiatore perfetto, cioè un *corpo nero*, la potenza irradiata è data dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = CA(\theta^4 - \theta_o^4) \tag{12-68}$$

in cui θ_0 è la temperatura ambiente, espressa in gradi Kelvin ed A la superficie radiante espressa in m^2. Nel caso del corpo nero, la costante $C = 5{,}73 \times \times 10^{-8} \times W/m^2 \cdot {}^0K^4$. Le superfici reali sono caratterizzate da un'emissività inferiore a quella del corpo nero, cioè irraggiano meno. L'energia occorrente a portare un corpo nero alla temperatura θ è quindi più grande di quella occorrente nei casi reali; ma poichè si sono trascurate le perdite per conduzione e per convezione, il valore di potenza che si è calcolato per il corpo nero terrà conto in pratica anche di queste altre perdite. La temperatura finale è data dall'equilibrio fra la potenza fornita e quella irradiata. In condizioni stazio-

narie, tutta l'energia ricevuta viene irradiata e si raggiunge la temperatura θ_u data dalla Eq. (12-68):

$$\theta_u = \sqrt[4]{\frac{P}{CA} + \theta_0^4} \tag{12-69}$$

La potenza totale fornita al pezzo fino all'istante *t* è la somma di quella in esso immagazzinata più quella necessaria per mantenerlo alla temperatura voluta.

Si ha allora:

$$P = SM \frac{d\theta}{dt} + CA(\theta^4 - \theta_0^4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{CA}{SM}\left(\frac{P}{CA} + \theta_0^4 - \theta^4\right)$$

Sostituendo, dall'Eq. (12-69) si trova:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{CA}{SM}(\theta_u^4 - \theta^4) \tag{12-70}$$

che è l'equazione differenziale del sistema. Separando le variabili, si ottiene:

$$dt = \frac{SM}{CA} \frac{d\theta}{\theta_u^4 - \theta^4} \tag{12-71}$$

Sviluppando il termine a destra in frazioni, si ha:

$$\frac{1}{\theta_u^4 - \theta^4} = \frac{a}{\theta_u^2 - \theta^2} + \frac{b}{\theta_u^2 + \theta^2}$$

$$1 = (\theta_u^2 + \theta^2)a + (\theta_u^2 - \theta^2)b$$

che è verificato per qualunque θ, quindi anche per $\theta = \theta_u$, per cui si ha:

$$a = \frac{1}{2\theta_u^2}$$

ponendo invece $\theta = -\theta_u$ si trova:

$$b = \frac{1}{2\theta_u^2}$$

L'equazione (12-71) si può allora scrivere:

$$dt = \frac{SM}{CA} \frac{1}{2\theta_u^2}\left(\frac{d\theta}{\theta_u^2 - \theta^2} + \frac{d\theta}{\theta_u^2 + \theta^2}\right)$$

integrando, si ottiene:

$$t = \frac{SM}{2CA\theta_u^3}\left[\text{arctang}\frac{\theta}{\theta_u} - \text{arctang}\frac{\theta_o}{\theta_u} + \frac{1}{2}\ln\frac{(\theta_u + \theta)(\theta_u - \theta_o)}{(\theta_u - \theta)(\theta_u + \theta_o)}\right] \quad (12\text{-}72)$$

questo è il tempo, espresso in secondi, che impiega un corpo nero a raggiungere la temperatura θ, se P è la potenza che gli viene somministrata.

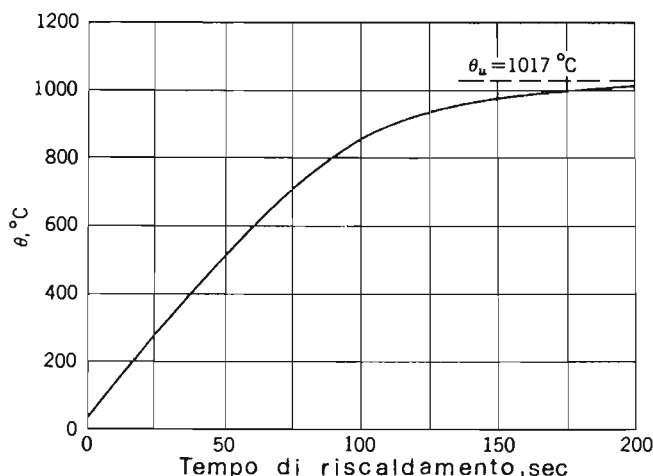



FIG. 12-16. — Tempo di riscaldamento di una barra di ferro lunga 6 cm, del diametro di 2 cm, con una sorgente da 700 watt.

In fig. 12-16 è riportato il grafico di questa equazione. Il calore specifico medio del ferro, nel campo di temperatura esaminato è di 461 Joule per Kg e per ^{0}K; $\theta_o = 27\ ^0C = 300\ ^0K$. In tabella 30 sono riportate le costanti di altri materiali.

TABELLA 30 — Costanti fisiche dei conduttori

Metalli	*Calore spec. medio S, Joule/^{0}K Kg*	*Densità Kg/m^3*	*Conduttività termica W/m^2 ^{0}K*	*Conduttività elettrica mho/m*	*Punto di fusione ^{0}C*
Alluminio	962	2560	$2{,}03 \cdot 10^4$	$3{,}54 \cdot 10^7$	660
Rame	394	8800	$3{,}88 \cdot 10^4$	$5{,}8 \cdot 10^7$	1083
Ferro	461	7860	$0{,}67 \cdot 10^4$	$1{,}04 \cdot 10^7$	1535
Piombo	126	11300	$0{,}34 \cdot 10^4$	$0{,}46 \cdot 10^7$	327
Nickel	460	8900	$0{,}6 \cdot 10^4$	$1{,}15 \cdot 10^7$	1452
Argento	234	10400	$4{,}19 \cdot 10^4$	$6{,}11 \cdot 10^7$	960
Acciaio (18-8)	500	7700	$0{,}16 \cdot 10^4$	$0{,}011 \cdot 10^7$	1410
Stagno	240	7300	$0{,}64 \cdot 10^4$	$0{,}86 \cdot 10^7$	232

12-10 Calcolo della potenza necessaria per il riscaldamento.

Si consideri una barra di ottone di 20 cm (6,6 pollici) di lunghezza e 2 cm di diametro, che debba subire un processo di ricottura a 700 °C e che si trovi alla temperatura ambiente di 27 °C. Si vuole determinare la potenza che deve poter fornire il generatore a 300 KHz. Per l'ottone,

$$\text{Densità} = 8{,}4 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{Calore specifico medio} = 3{,}94 \cdot 10^2 \text{ Joule/°K/kg}$$

$$\text{Conduttività elettrica media} = 1{,}5 \cdot 10^7 \ \Omega^{-1}/\text{m}$$

$$\text{permeabilità relativa, } \mu_r = 1$$

Per raggiungere la temperatura finale voluta, occorre fornire al pezzo una potenza data da:

$$\text{Area della superficie} = 2\pi al + 2\pi a^2 = 0{,}0126 + 0{,}0006 = 0{,}0132 \text{ m}^2$$

$$\text{Potenza irradiata} = 5{,}73 \times 10^{-8} \times 1{,}32 \times 10^{-2}(973^4 - 300^4) = 670 \text{ W}$$

Perchè si raggiungano 700 °C in un tempo ragionevole, occorre una potenza più elevata, per esempio 2000 W. Con questa potenza, si trova:

$$\theta_u = \sqrt[4]{\frac{2 \times 10^3}{5{,}73 \times 10^{-8} \times 1{,}32 \times 10^{-2}} + 81 \times 10^8} = 1277 \text{ °K} = 1004 \text{ °C}$$

nel caso del corpo nero.

Il volume della sbarra è uguale a $\pi \times 0{,}01^2 \times 0{,}2 = 6{,}28 \times 10^{-5}\text{m}^3$ ed il peso è $M = 8{,}4 \times 10^3 \times 6{,}28 \times 10^{-5} = 0{,}527$ Kg. Dall'Eq. (12-72):

$$\frac{SM}{2CA\theta_u^3} = \frac{3{,}94 \times 10^2 \times 0{,}527}{2 \times 5{,}73 \times 10^{-8} \times 1{,}32 \times 10^{-2} \times 2{,}08 \times 10^9} = 66$$

Quindi il tempo occorrente per il riscaldamento è:

$$t = 66\left(\text{arctang}\,\frac{973}{1277} - \text{arctang}\,\frac{300}{1277} + \frac{1}{2}\ln\frac{2250 \times 977}{304 \times 1577}\right) =$$

$$= 66(0{,}654 - 0{,}230 + 0{,}762) = 78{,}3 \text{ s}$$

trascurando le perdite per conduzione e per convezione.

La potenza per metro di lunghezza della barra è:

$$\frac{P}{m} = \frac{2000}{0,2} = 10.000$$

$$\frac{a}{\delta} = a\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = 0,01\sqrt{\frac{3 \times 10^5 \times 2\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1,5 \times 10^7}{2}} =$$

$$= 0,01\sqrt{17,7 \times 10^6} = 42$$

Dalla fig. 12-12, si trova F = 1; l'Eq. (12-56) dà allora:

$$P = \frac{8\pi H_0^2 a}{\sigma\delta} \times 1,0 = 10.000 \text{ W/m}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{P\sigma}{8\pi a/\delta}} = \sqrt{\frac{10^4 \times 1,5 \times 10^7}{8\pi \times 42,0}} = 11,9 \times 10^3 \text{ amperspire/m}$$

Si faccia l'ipotesi che l'avvolgimento sia lungo, e che la forza magnetomotrice al centro sia uguale alle amperspire per metro di avvolgimento. Se l'avvolgimento è costituito da un conduttore di rame da 0,25 pollici, con le spire distanti 0,25 pollici, le spire per metro saranno:

$$\frac{N}{l} = \frac{39,37}{0,5} = 78,7 \text{ spire/m}$$

e dovrà circolare una corrente uguale a:

$$I = \frac{H_0}{N/l} = \frac{11,5 \times 10^3}{78,7} = 151 \text{ A}$$

In sintesi, la soluzione del problema e:

Potenza del generatore = 2kW più le perdite nell'avvolgimento.
Tempo occorrente per riscaldare a 700 °C = 78,3 s
Avvolgimento = 2 spire per pollice
Corrente nell'avvolgimento = 151 A

12-11 La reazione negli oscillatori.

Le oscillazioni, o la generazione di sinusoidi, dipendono dalla presenza di una reazione positiva fra l'uscita e l'ingresso di un amplificatore. Spesso gli oscillatori vengono usati nei processi di riscaldamento, per cui è opportuno parlarne in questo capitolo.

In fig. 12-17 è mostrato un amplificatore di guadagno:

$$A = \frac{E_2}{E_1} \tag{12-73}$$

con una rete di reazione la cui caratteristica è β, per cui all'ingresso dell'amplificatore viene riportata una tensione:

$$E_f = \beta E_2 \tag{12-74}$$

La rete di reazione deve modificare l'ampiezza e la fase di βE_2 in modo tale che E_f sia uguale ad E_1 sia in ampiezza che in fase.

$$A = \frac{E_2}{\beta E_2} = \frac{1}{\beta}$$

$$A\beta = 1 \tag{12-75}$$

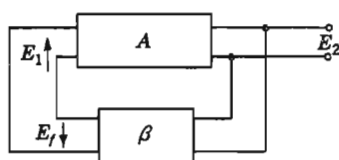



Fig. 12-17. — Oscillatore reazionato.

La condizione ora trovata, deve essere verificata nel circuito chiuso su se stesso, se si vuole che esso dia un'uscita E_2 senza segnale applicato dall'esterno. Poichè l'equazione della reazione indica che è possibile un guadagno a ciclo chiuso infinito,

$$A' = \frac{A}{1 - A\beta}$$

quando $|A\beta| = 1$, occorre che nel circuito intervenga qualche fenomeno il quale limiti l'ampiezza ed impedisca che essa aumenti illimitatamente. La limitazione si ottiene di solito per effetto delle zone non lineari di interdizione e di saturazione della caratteristica del dispositivo; in queste zone il guadagno effettivo a ciclo aperto scende ad un valore che non è sufficiente a verificare la condizione $|A\beta| = 1$. Perciò si lavora comunemente in zona non lineare, e la distorsione delle forme d'onda e la generazione di armoniche sono problemi connessi a questi fenomeni di autolimitazione dell'ampiezza di oscillazione.

Se si vogliono forme d'onda pure, occorre fare uso di limitatori di ampiezza esterni e di filtri.

12-12. Alcuni tipi di oscillatore.

Gli oscillatori riportati in fig. 12-18 differiscono fra loro solo per il modo in cui si realizza la reazione fra uscita ed ingresso.

Il circuito Hartley è molto comune; in esso la reazione si ottiene attraverso l'accoppiamento mutuo fra le induttanze L_1 ed L_2. La posizione della presa collegata all'emettitore è variabile e serve a controllare il valore della reazione ed il guadagno, e quindi la tensione che si ottiene in uscita. Nel tipo alimentato in derivazione la reattanza induttiva della bobina a radio frequenza (RFC) impedisce che la corrente alternata di uscita circoli attraverso l'alimentatore invece che nel circuito accordato.

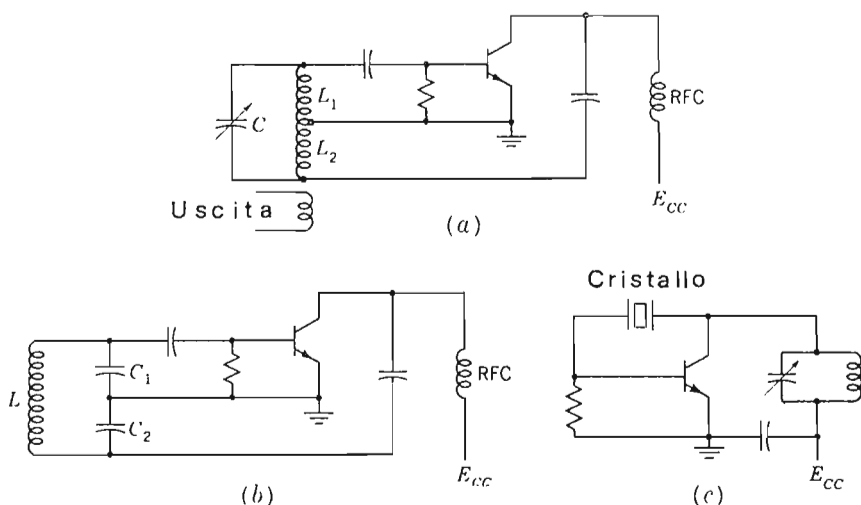



FIG. 12-18. — (*a*) Oscillatore Hartley alimentato in derivazione. (*b*) Oscillatore Colpitts alimentato in derivazione. (*c*) Oscillatore a cristallo.

Il circuito Colpitts di fig. 12-18 b è simile al circuito Hartley; in esso l'emettitore è collegato fra C_1 e C_2. Si ottiene una reazione per la presenza dell'avvolgimento L comune al collettore ed alla base; i condensatori di accordo sono ordinariamente dello stesso valore. La scelta fra il Colpitts e l'Hartley dipende soprattutto dal peso che ha, caso per caso, il vantaggio del controllo della tensione di base, offerto dal circuito Hartley, rispetto al vantaggio, del circuito Colpitts, di richiedere un'induttanza a due terminali.

In questi oscillatori, la frequenza di oscillazione è determinata soprattutto dalla risonanza dei circuiti accordati. Si ha tuttavia un'instabilità di frequenza di qualche percento, dovuta agli effetti secondari prodotti dalla resistenza di carico e dai parametri del tubo a vuoto o del transistore.

Un notevole miglioramento della stabilità in frequenza, si consegue sostituendo il circuito accordato con un cristallo di quarzo piezoelettrico, come in fig. 12-18 c. Questi cristalli convertono l'energia da elettrica in meccanica ed oscillano meccanicamente ad una frequenza di risonanza determinata dalle loro dimensioni. Poichè il quarzo è una sostanza molto stabile la frequenza di oscillazione, che si ricava in condizioni di risonanza meccanica, è stabile a meno di qualche unità per ogni megahertz. Alcuni oscillatori realizzati in laboratorio, hanno raggiunto una stabilità di 1 parte su 10^{11}.

12-13 Oscillatori a sfasamento.

Negli oscillatori non sono necessari componenti induttivi e circuiti risonanti, se nel ciclo di reazione si realizza in qualche altro modo lo sfasamento necessario.

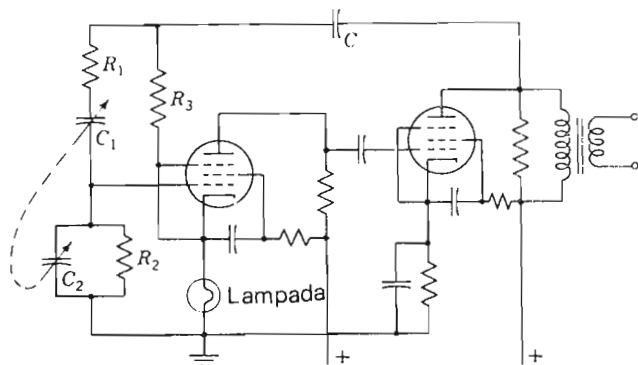



FIG. 12-19. — Schema pratico per un oscillatore da laboratorio.

Nel circuito di fig. 12-19, la reazione positiva e lo sfasamento sono realizzati mediante una rete RC. Se trascuriamo la reattanza di C, che è piccola rispetto alle altre, si può scrivere:

$$Z_1 = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \qquad Z_2 = \frac{-jR_2/\omega C_2}{R_2 - j/\omega C_2}$$

e, se A è il guadagno dell'amplificatore, la condizione di oscillazione è:

$$A\beta = 1 = A \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{12-76}$$

da questa equazione si ricavano le due condizioni che devono essere soddisfatte per avere una reazione di ampiezza e fase adatte a sostenere le oscillazioni. Queste condizioni sono:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad e \qquad A = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$$

che determinano la frequenza di oscillazione ed il guadagno necessario.

Se $R_1 = R_2$ e $C_1 = C_2$ si trova:

$$\omega = \frac{1}{R_1 C_1} \qquad ed \qquad A = 3$$

R_3 e la lampadina a tungsteno, danno luogo ad una reazione negativa che ha la funzione di limitare l'ampiezza delle oscillazioni e di migliorare la forma d'onda. Se l'uscita aumenta, aumenta la temperatura del filamento e quindi la resistenza della lampadina; aumenta così la reazione negativa e l'ampiezza della uscita si stabilizza.

Il principale vantaggio di questo circuito è il suo ampio campo di frequenza, dato che la frequenza è inversamente proporzionale a C e non a $\sqrt{C}$ come accade negli oscillatori ad LC. Si riesce perciò ad ottenere un campo di frequenze dell'ampiezza di una decade, cioè 10 : 1, impiegando un comune condensatore variabile. Questo circuito è comunemente usato per gli oscillatori da laboratorio.

12-14 Generatori di ultrasuoni.

Gli ultrasuoni costituiscono un mezzo molto importante per emulsionare liquidi, accelerare reazioni chimiche, tagliare metalli e per effettuare trattamenti medici. Per produrre dei campi acustici molto intensi nei liquidi e nei solidi, a frequenze comprese fra qualche migliaio di Hz e molti MHz, si usano ordinariamente dei *trasduttori* cioè dei convertitori di energia, accoppiati con amplificatori elettronici. I *trasduttori* più comuni sono le barre a magnetostrizione ed i cristalli piezoelettrici, entrambi molto adatti a convertire le oscillazioni elettriche in energia meccanica di tipo acustico.

Nel circuito a magnetostrizione riportato in fig. 12-20 a, vi sono due avvolgimenti accoppiati mediante una barra di Nichel o di Invar. Quando

una barra di questo tipo si trova in un campo magnetico, nascono delle sollecitazioni magnetiche, le quali producono un cambiamento di lunghezza. Per accentuare queste variazioni, si fa in modo che la barra sia risonante, cioè sia lunga mezza lunghezza d'onda. La lunghezza della barra si determina mediante la formula:

$$l = \frac{1}{2} \lambda = \frac{v}{2f}$$

in cui v è la velocità del suono nel materiale (circa 5000 m/s nel nichel).

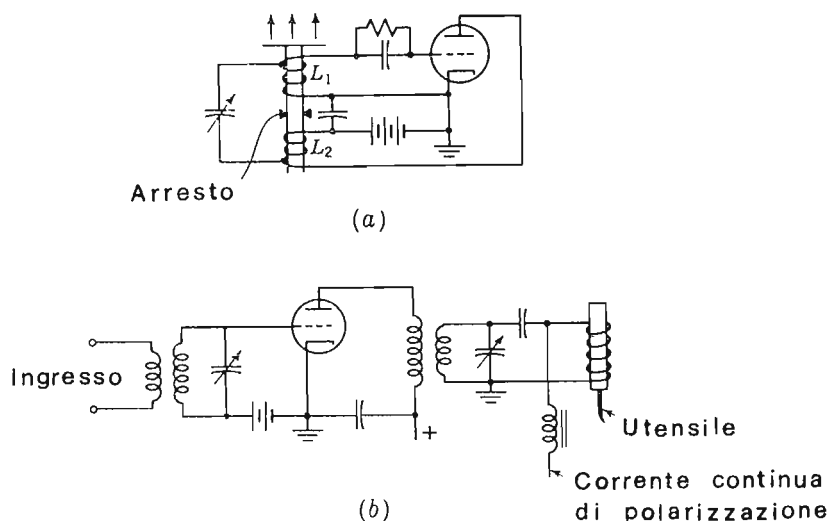



FIG. 12-20. — (*a*) Oscillatore a magnetostrizione. (*b*) Trasduttore a magnetostrizione pilotato.

Una variazione della corrente di placca fa variare il flusso magnetico nella barra; si verifica allora una variazione di lunghezza della barra e una onda longitudinale che modifica la lunghezza della barra posta all'interno dell'avvolgimento di griglia, il che produce una variazione di flusso e quindi una tensione nell'avvolgimento. Questa tensione in griglia produce un'ulteriore variazione di corrente anodica ed il circuito entra in oscillazione alla frequenza di risonanza della barra. Benchè il circuito sembri del tipo Hartley, in effetti le due bobine sono avvolte in modo da opporsi alle oscillazioni e sono di solito schermate una rispetto all'altra in modo che l'accoppiamento avvenga solo attraverso la barra. Quest'ultima deve essere polarizzata mediante un magnete permanente poichè la variazione di lunghezza è dello stesso segno per entrambe le polarità di magnetizzazione. Senza polarizzazione, la barra

vibrerebbe ad una frequenza doppia di quella del campo magnetico applicato. Il fatto che la barra deve essere di lunghezza ragionevole, limita la frequenza di oscillazione a circa 100 KHz (tabella 31). Alla risonanza, la variazione di lunghezza della barra è di circa 25 micron.

TABELLA 31 — Frequenze di oscillazione dei trasduttori ultrasonici

Tipo	*Campo di frequenza*
Tartrato di ammonio	0-250 kHz
Sale di Rochelle	0-300 kHz
Titanato di Bario	0,3-1 MHz
Quarzo	0,01-10 MHz
Magnetostrizione	10-100 kHz

Il circuito di fig. 12-20 b mostra in che modo è possibile pilotare un traduttore a magnetostrizione mediante un amplificatore in Classe C.

Anche i cristalli piezoelettrici sono adatti a generare ultrasuoni. Come già detto al paragrafo 12-12, questi cristalli subiscono delle deformazioni meccaniche quando ad essi sono applicate delle tensioni elettriche. Il quarzo è il più comune fra i materiali usati; il sale di Rochelle dà un'uscita maggiore ma viene danneggiato dall'umidità. Nel titanato di Bario la piezoelettricità è indotta mediante polarizzazione con elevati campi elettrici. Una volta tolto il campo elettrico, permane una polarizzazione residua.

Il *fattore di accoppiamento elettromeccanico* è il rapporto fra l'energia meccanica che si ottiene e l'energia elettrica messa in gioco. Per il quarzo questo fattore è uguale a 0,011 cioè l'1,1%; per il titanato di bario questo fattore può salire a 0,30. In tutte le applicazioni degli ultrasuoni è importante realizzare l'adattamento della impedenza d'uscita acustica a quella del carico, in modo da avere un efficace trasferimento di energia. Questo adattamento si realizza modificando le dimensioni relative dell'elettrodo e del carico. L'importanza degli ultrasuoni risiede nell'alta velocità che acquistano le particelle sotto l'azione delle onde acustiche. L'accelerazione delle molecole soggette all'azione di una piccola potenza ad ultrasuoni (qualche watt per centimetro quadrato) ad 1 MHz, è all'incirca 10^6 volte l'accelerazione di gravità. Le piccole particelle si spaccano e nei liquidi si hanno fenomeni di cavitazione.

La fig. 12-21 a mostra un utensile a magnetostrizione impiegato come trapano per materiali molto duri. Con questo metodo è possibile fare ad alta

velocità e con utensili di acciaio dolce o di ottone, dei buchi di forma irregolare, identici alla forma dell'utensile, in materiali duri come il vetro.

Il movimento alternativo dell'utensile proietta le particelle di abrasivo contro il pezzo e lo sgretola. La fig. 12-21 b mostra un montaggio adatto ad agitare liquidi.

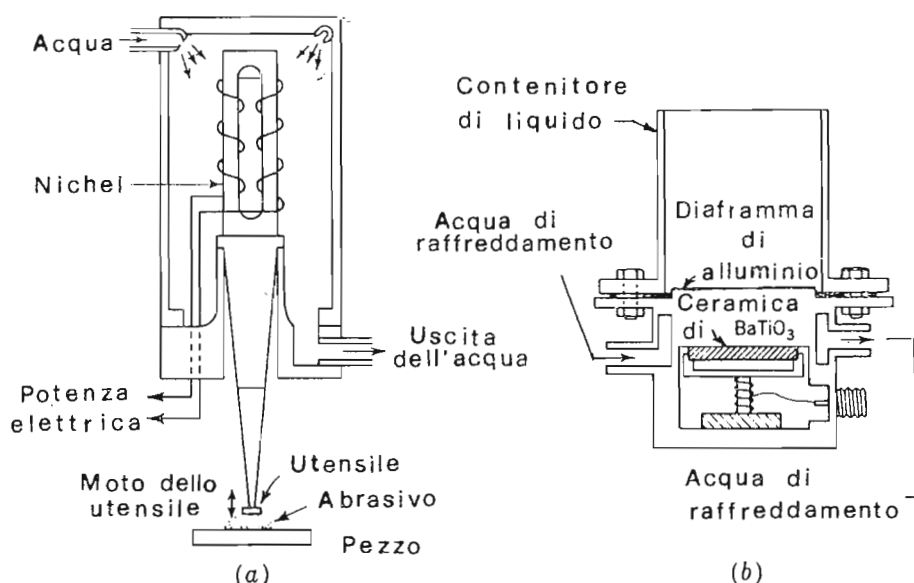



FIG. 12-21. — (*a*) Macchina utensile a magnetostrizione. (*b*) Agitatore di liquidi a trasduttore ceramico.

PROBLEMI

12-1 Il triodo di fig. 12-22 a funziona in un amplificatore di potenza in classe C, con E_{bb} = 5000 V, E_{cc} = tre volte la tensione di interdizione, $\hat{E}_g$ = 1300 V. Posto $e_{b,\,min} = e_{c,\,max}$ ed f = 1,5 MHz, si calcoli (*a*) la corrente continua in placca, (*b*) il valore efficace di I_1, (*c*) la potenza di uscita, (*d*) la potenza fornita al circuito anodico, (*e*) il rendimento del circuito anodico, (*f*) l'impedenza del carico risonante, (*g*) le perdite in placca, (*h*) la potenza occorrente in griglia.

12-2 Un amplificatore funzionante ad 1,0 MHz fa uso di un triodo le cui caratteristiche sono quelle di fig. 12-22 b. E_b = 1500 V, E_{cc} = due volte la tensione di interdizione, $\hat{E}_g$ = 400 V, $e_{b,\,min} = e_{c,\,max}$, Q del circuito con carico = 12, capacità di accordo C = 200 pF. Si calcoli la potenza di uscita ed il rendimento del circuito anodico. Si progetti inoltre il circuito risonante.

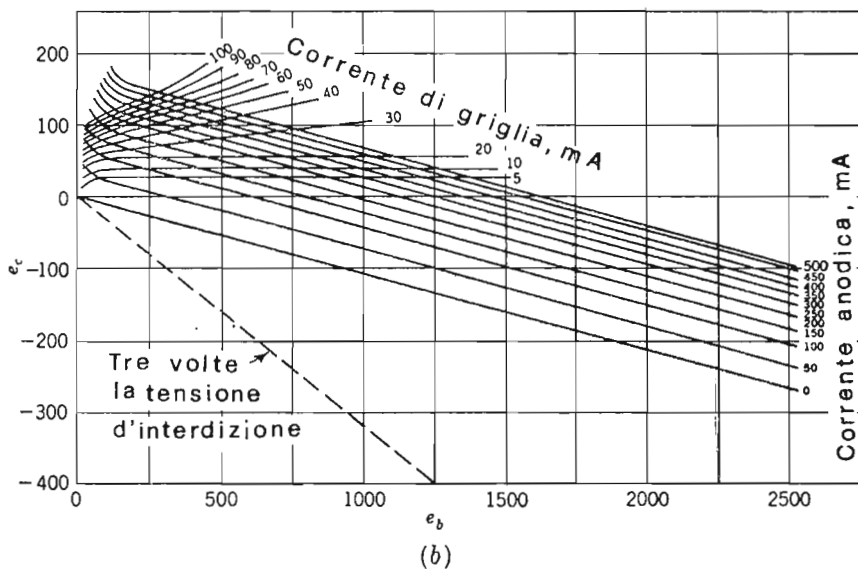
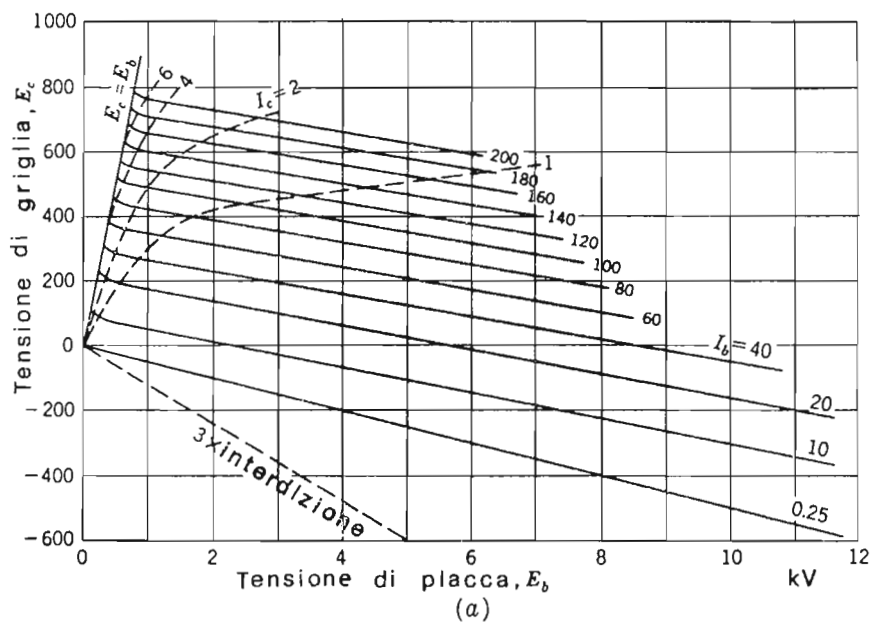



FIG. 12-22 — (*a*) $\mu = 25$; $E_{bb} = 10.000$ V massimo. (*b*) $\mu = 10{,}6$; $E_{bb} = 300$ massimo.

12-3. Il tubo di fig. 12-22 b è usato in un amplificatore in classe C con tensione anodica di 1500 V, E_{cc} = tre volte l'interdizione, una corrente anodica di picco di 400 mA, $e_{b,\,min} = e_{c,max}$. Calcolare (*a*) la potenza alternata di uscita, (*b*) la potenza fornita dall'alimentatore, (*c*) il rendimento del circuito anodico, (*d*) la potenza occorrente in griglia, (*e*) le perdite in placca espresse in watt, (*f*) si progetti il circuito accordato in parallelo per un Q sotto carico uguale a 12 ed una frequenza di 0,5 MHz.

12-4. Il tubo di fig. 12-22 b può lavorare al massimo ad $E_{bb} = 3000$ V, $I_b = 175$ mA, la massima potenza dissipata in placca è di 75 W, la massima corrente di griglia è $I_c = 30$ mA. Il tubo funziona in classe C ad 1,59 MHz, con $E_{bb} = 2000$ V, griglia polarizzata al doppio della tensione di interdizione, $e_{b\,min} = e_{c\,max}$, picco di corrente anodica = 450 mA. Calcolare (*a*) la potenza alternata in uscita, (*b*) la potenza fornita ed il rendimento del circuito anodico, (*c*) le perdite in placca, (*d*) il guadagno in potenza, (*e*) l'impedenza che deve avere, alla risonanza, il carico del circuito anodico, (*f*) qual'è, se esiste, la grandezza che supera il valore massimo sopportabile dal tubo impiegato?

12-5. Dalle curve a corrente costante di fig. 12-4, si traccino le forme d'onda delle correnti di griglia e di placca, per $E_{bb} = 5000$ V, $E_{cc} = 500$ V, $e_{b\,min} = 1{,}5\, e_{c\,max} = +400$ V. Si calcoli l'angolo di conduzione per la corrente di griglia e per quella di placca.

12-6. Calcolare e tracciare l'andamento del campo elettrico lungo il diametro di un conduttore di rame del diametro di 0,6 cm ad una frequenza di 7960 Hz.

12-7. Si calcoli la resistenza in alternata di un metro del conduttore del problema 12-6. Se si asporta il centro del conduttore in modo da ottenere un tubo spesso 1 mm, quale sarà la resistenza in alternata? La si paragoni a quella calcolata in precedenza.

12-8. Dimostrare che la profondità di penetrazione data dall'Eq. 12-35 ha le dimensioni di una lunghezza. Dimostrare anche che $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ ha le dimensioni di una velocità.

12-9. Un tubo di nichel a sezione circolare del diametro di 2,5 cm, dello spessore di 0,3 mm e della lunghezza di 8 cm, deve essere riscaldato ad induzione alla temperatura di 700 °C. Nella ipotesi che vi siano solo perdite per irraggiamento, si determini la quantità di calore necessaria se la temperatura ambiente è 27 °C. Si determini inoltre il tempo occorrente per il riscaldamento, se si somministra una quantità di calore doppia. Si determini la più bassa frequenza adatta ad una buona trasmissione di energia; $\mu_r = 1$.

12-10. Un materiale plastico ha $\varepsilon_r = 3{,}7$ calore specifico S = 600, densità = 2000 Kg/m^3, $\alpha = 0{,}05$. Questo dielettrico è a forma di disco del diametro di 25 cm e dello spessore di 2,5 cm. Calcolare la frequenza massima da impiegare se si vuole che il calore sviluppato ai bordi sia lo 0,9 di quello sviluppato al centro.

12-11 Una barra di acciaio lunga 5 cm e di diametro 5 mm deve essere riscaldata da una bobina di rame da 5 mm, che ha una spira per cm e di diametro 4 cm. Nell'ipotesi che ci siano solo le perdite per radiazione e che la permeabilità relativa sia

unitaria, tracciare la curva del riscaldamento in funzione del tempo, per l'acciaio, supponendo di doverlo riscaldare da 37°C a 1000°C. Determinare la corrente nella bobina per una frequenza di 100 kHz e il tempo di riscaldamento nel caso che venga impiegata una potenza di 4 kW.

12-12. Calcolare la resistenza di un tubo di rame di 12 mm di diametro esterno, 3 mm di diametro interno e di lunghezza 8 m, alla frequenza di 100.000 Hz e 10 MHz. Ripetere il calcolo con lo stesso tubo realizzato con nichel, $\varepsilon_r = 1,0$.

BIBLIOGRAFIA

1. Cady W. G.: The Piezo-electric Resonator, *Proc. IRE*, **10:** 83 (1922).
2. Pierce G. W.: Magnetostriction Oscillators, *Proc. IRE*, **17:** 42 (1929).
3. Terman F. E., et al.: Some Applications of Negative Feedback with Particular Reference to Laboratory Equipment, *Proc. IRE*, **27:** 649 (1949).
4. Ryder J. D.: "Networks, Lines, and Field," 2d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1955.
5. Zade, Hans Peter: "The Heatscaling and High-Frequency Welding of Plastics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.
6. Sohon, Harry: "Engineering Mathematics," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1944.
7. Reed M. B., and Georgia Reed: "Mathematical Methods in Electrical Engineering," Harper & Row, Publishers, Inc., New York, 1951.
8. Brown G. H., C. N. Hoyler, and R. A. Bierwirth: "Theory and Application of Radio-frequency Heating," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1947.
9. Stansel N. R.: Induction Heating—Selection of Frequency, *Trans. AIEE*, **63:** 755 (1944).
10. Jahnke E., and F. Emde: "Tables of Functions with Formulae and Curves," Dover Publications, Inc., New York, 1943.
11. Carlin B.: "Ultrasonics," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

Capitolo XIII

RADDRIZZATORI DI POTENZA E CIRCUITI DI FILTRO

La maggior parte degli amplificatori e degli apparati elettronici viene alimentata con corrente continua, ottenuta raddrizzando corrente alternata mediate diodi. In questo capitolo si studierà il comportamento dei diodi e le proprietà dei circuiti di filtro o di livellamento della corrente di uscita.

La potenza elettrica alternata di alimentazione è normalmente trifase, ma i principi base dei circuiti raddrizzatori non differiscono sostanzialmente da quelli relativi ad una sola fase, per cui i circuiti monofase e polifase verranno studiati insieme. I circuiti di filtro sono impiegati raramente nella rettificazione di potenza; tuttavia il loro progetto è più semplice di quello relativo ai circuiti necessari a livellare la corrente diretta pulsante degli apparati elettronici.

Qualche apparato che utilizza correnti dirette molto elevate impiega, per il raddrizzamento, tubi a gas. Questi tubi verranno trattati brevemente alla fine del capitolo.

13-1. Il diodo ideale.

Il diodo è un componente circuitale unipolare, cioè permette la circolazione della corrente in una sola direzione. Il diodo a vuoto conduce unicamente quando l'anodo è positivo rispetto al catodo mentre il diodo a semiconduttore P-N permetterà il passaggio della corrente di utilizzazione solo nella direzione a bassa resistenza.

La regione P, in tal caso, rappresenta l'anodo del diodo a semiconduttore.

Un diodo ideale dovrebbe presentare la caratteristica tensione corrente di fig. 13-1 *a*, dalla quale risulta una resistenza interna nulla, ovvero una caduta di tensione nulla per qualunque valore di corrente diretta. In realtà, un diodo a semiconduttore al silicio presenta una caduta di circa 0,7 Volt, valore trascurabile se paragonato alle normali tensioni applicate al circuito. La corrente che attraversa la giunzione del diodo in senso inverso è I_0, detta corrente inversa di saturazione, e risulta di piccola entità se raffrontata alle correnti dirette. In effetti il diodo a semiconduttore ha un comportamento prossimo a quello ideale ed in seguito verrà considerato come tale.

Il diodo a vuoto ha una caratteristica tensione-corrente simile a quella di fig. 13-1 *b*; l'inclinazione della curva indica una resistenza interna dello ordine di 150 ohm. Poichè tale valore è piccolo se paragonato alle normali resistenze di carico, commettendo un lieve errore, si può trascurare la resistenza interna del diodo nell'eseguire l'analisi del circuito. Ne segue che entrambi i tipi di diodi possono considerarsi ideali.

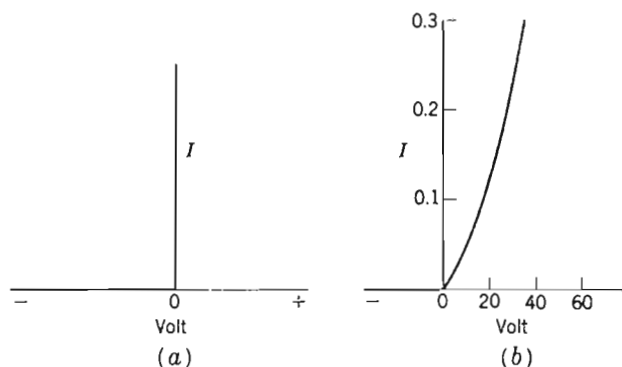



FIG. 13-1. — (*a*) Caratteristica di un diodo ideale. (*b*) Caratteristica di un diodo a vuoto.

Nei riguardi di un circuito esterno un diodo ideale può essere visto come un interruttore la cui funzione è quella di connettere la sorgente al carico, ogni qualvolta l'anodo risulti positivo rispetto al catodo, e di sconnetterla qualora l'anodo risulti negativo.

13-2. Il circuito raddrizzatore ad una semionda.

Il circuito di fig. 13-2 è un circuito raddrizzatore nel quale si ha conduzione solo durante il semiperiodo della tensione di alimentazione che rende l'anodo positivo. È questo il circuito base da cui hanno origine i circuiti raddrizzatori più complessi.

Si supponga che il diodo sia ideale, o privo di resistenza, e che siano inoltre trascurabili la resistenza e la reattanza di dispersione del trasformatore. Con una tensione di ingresso sinusoidale, $e = E_m \operatorname{sen} \omega t$, si hanno per le correnti le seguenti relazioni:

$$i_b = \frac{E_m}{R} \operatorname{sen} \omega t \qquad 0 \leq \omega t \leq \pi \qquad (13\text{-}1)$$

$$i_b = 0 \qquad \pi \leq \omega t \leq 2\pi \qquad (13\text{-}2)$$

Le correnti sono quindi impulsive, con impulsi a forma di mezza sinusoide come riportato in fig. 13-2 *c*.

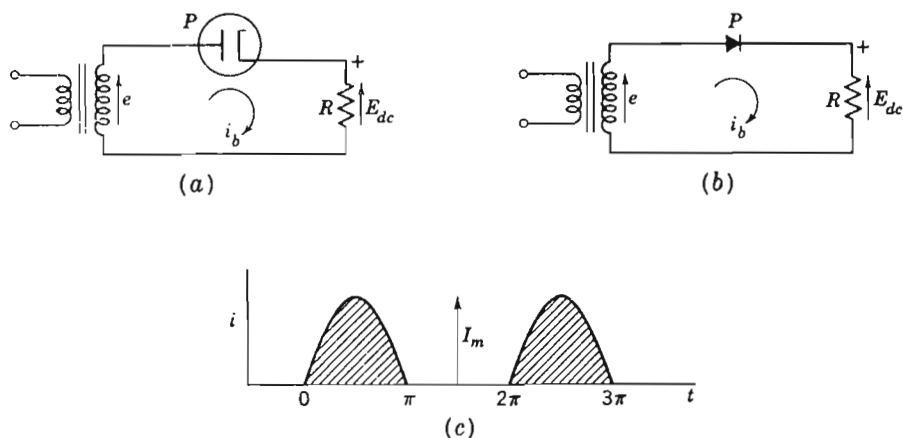



FIG. 13-2. — (*a*) Circuito ad una semionda con un diodo a vuoto. (*b*) Come (*a*) con un diodo *P-N*. (*c*) Impulsi di corrente nel carico *R*.

Il compito di un circuito raddrizzatore è quello di fornire una corrente continua partendo da una sorgente alternativa. Si può determinare l'attitudine del circuito a compiere questa funzione valutando la componente continua, o il valor medio degli impulsi di corrente:

$$\begin{aligned} I_{dc} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} i_b\, d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{E_m}{R}\operatorname{sen}\omega t\, d(\omega t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\, d(\omega t) \\ &= \frac{E_m}{\pi R} = \frac{I_m}{\pi} \end{aligned} \tag{13-3}$$

La corrente continua è il valore che viene indicato da un amperometro per corrente continua in serie con il carico.

La tensione continua sul carico è fornita da:

$$E_{dc} = \frac{I_m R}{\pi} = \frac{E_m}{\pi} \tag{13-4}$$

che è semplicemente il valor medio della semionda positiva della tensione sinusoidale d'ingresso, come era da aspettarsi.

La potenza alternativa fornita al circuito dal trasformatore, è data da:

$$P_{ac} = I^2_{rms} R \tag{13-5}$$

in quanto si è supposto il diodo senza perdita, o ideale. Il valore efficace della corrente I_{rms}, può essere ricavato in base alla sua definizione:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} i_b^2 \, d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \, d(\omega t)} = \frac{I_m}{2} \quad (13\text{-}6)$$

È questo il valore letto da un amperometro per corrente alternata in serie al carico.

L'analisi di Fourier della tensione impulsiva applicata al carico, fornisce, tenendo conto che gli impulsi sono mezze sinusoidi:

$$e = \frac{E_m}{\pi} + \frac{E_m}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2E_m}{\pi} \sum_K \frac{\cos k\omega t}{(k+1)(k-1)} \quad (13\text{-}7)$$

dove k assume i valori 2, 4, 6, 8, ...

Nel primo termine a secondo membro si riconosce subito la componente continua della tensione da utilizzarsi eventualmente nella carica di una batteria o in un processo elettrolitico. I rimanenti termini sono armoniche di tensione, che danno luogo a perdite sul carico resistivo e che non contribuiscono alla componente continua della corrente. La più bassa frequenza presente è quella d'alimentazione.

Si richiede che un circuito raddrizzatore fornisca corrente continua e che siano minime le perdite dovute alle armoniche sul carico. Il rendimento di conversione della corrente alternata in continua viene misurato mediante il *rendimento di conversione*, espresso da:

$$\eta_R = \frac{P_{dc} \text{ uscita}}{P_{ac} \text{ ingresso}} \times 100\% \quad (13\text{-}8)$$

che per un circuito ad una semionda vale:

$$\eta_R = \frac{(I_m/\pi)^2 R \times 100\%}{(I_m/2)^2 R} = \frac{4}{\pi^2} \times 100\% = 40{,}6\% \quad (13\text{-}9)$$

È possibile migliorare questo rendimento mediante l'uso di *circuiti di filtro*, che aumentino l'impedenza offerta alle armoniche oppure rappresentino per queste un cortocircuito posto in parallelo alla resistenza di carico. Il risultato è una corrente continua livellata, quale generalmente è necessaria per gli apparati elettronici.

La *tensione inversa di picco* (PIV) * è la massima tensione negativa presente ai capi del diodo. Per il circuito ad una semionda, PIV $= E_m$. I diodi

* PIV Dall'inglese Peak Inverse Voltage (N.d.T.).

impiegati in questi circuiti devono essere scelti in modo che il valore di E_m non superi il valore massimo specificato dal costruttore.

13-3. Il circuito raddrizzatore ad onda intera.

Se si potesse alimentare il carico per entrambi i semiperiodi della tensione alternativa d'ingresso, si otterrebbe in uscita una potenza continua più elevata.

Questo può ottenersi utilizzando un secondo diodo, un secondo circuito ad una semionda ed un carico in comune, come risulta dalla fig. 13-3 *a*. Il circuito riportato in fig. 13-3 *a* prende il nome di circuito raddrizzatore *ad onda intera*. L'ingresso in alternata al secondo diodo è sfasato di 180° rispetto a quello del primo circuito; in tal modo i diodi D_1 e D_2 conducono alternativamente per metà periodo dando luogo all'onda di corrente di fig. 13-3 *b*.

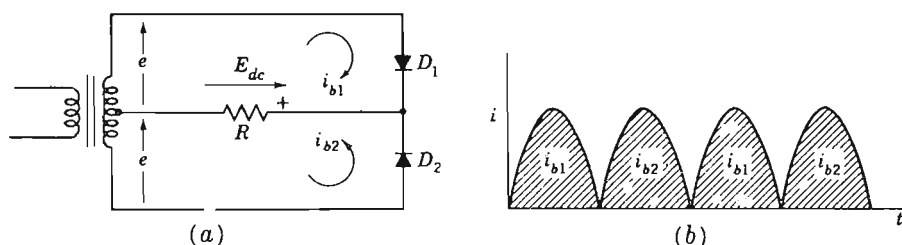



FIG. 13-3. — (*a*) Raddrizzatore ad onda intera. (*b*) Impulsi di corrente nel carico.

Se si utilizzano diodi identici, le rispettive correnti sono:

$$\left.\begin{aligned} i_{b1} &= \frac{E_m}{R} \text{ sen } \omega t \\ i_{b2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq \omega t \leq \pi \tag{13-10}$$

$$\left.\begin{aligned} i_{b1} &= 0 \\ i_{b2} &= -\frac{E_m}{R} \text{ sen } \omega t \end{aligned}\right\} \quad \pi \leq \omega t \leq 2\pi \tag{13-11}$$

dove E_m è la tensione di picco ai capi di metà dell'avvolgimento secondario.

Ciascun diodo lavora in condizioni identiche a quelle del circuito ad una semionda, e le correnti si sommano nel carico comune. Il valor medio delle mezze sinusoidi di fig. 13-3 b è:

$$I_{dc} = \frac{2E_m}{\pi R} = \frac{2I_m}{\pi} \tag{13-12}$$

e la tensione continua in uscita risulta allora: $E_{dc} = 2E_m/\pi$ ossia il doppio di quella che si ha nel circuito ad una semionda per lo stesso valore di E_m.

Il valore efficace della corrente I_{rms} che circola in ciascun diodo, nonchè la potenza alternativa in ingresso a ciascun diodo sono gli stessi di quelli che si hanno per i circuiti raddrizzatori ad una semionda. La potenza totale alternativa in ingresso è allora il doppio, cioè

$$P_{ac} = \frac{E_m^2}{2R} \qquad (13\text{-}13)$$

ed il rendimento di conversione è pari all'81%, il doppio di quello del circuito ad una semionda.

L'analisi di Fourier della tensione impulsiva formata da mezze sinusoidi fornisce:

$$e = \frac{2E_m}{\pi} - \frac{4E_m}{\pi} \sum_k \frac{\cos k\omega t}{(k+1)(k-1)} \qquad (13\text{-}14)$$

dove k assume i valori pari: 2, 4, 6, 8, ... La frequenza più bassa presente è il doppio di quella di alimentazione, e questo rende più semplice il filtraggio delle armoniche. Proprio perchè la tensione continua d'uscita è più alta ed il filtraggio più facile, il circuito ad onda intera viene impiegato normalmente per l'alimentazione di potenza degli apparati elettronici.

Se si scrive l'equazione relativa ai potenziali istantanei per il circuito secondario della fig. 13-3 *a*, essendo il diodo D_1 in conduzione e D_2 interdetto, si ha:

$$e_{b1} = 2e = -2E_m \operatorname{sen} \omega t$$

La tensione inversa di picco che agisce su D_2 è il valore massimo della suddetta espressione, e viene ottenuta per $\omega t = 3\pi/2$. Quindi

$$PIV = 2E_m \qquad (13\text{-}15)$$

valore da tener presente come dato di progetto per i circuiti ad onda intera.

Nella maggior parte di tali circuiti il terminale negativo è vincolato a massa, ponendo il catodo del diodo alla piena tensione continua contro massa. Per i diodi a vuoto si richiede, in tal caso, che il circuito riscaldatore sia opportunamente isolato.

13-4. Il circuito raddrizzatore a ponte ad onda intera.

Il circuito di fig. 13-4, noto come *circuito a ponte*, viene ormai normalmente usato con i diodi a semiconduttore; benchè sia un circuito raddrizzatore ad onda intera, non è necessario il trasformatore a presa centrale.

Per l'analisi del circuito, si consideri il semiperiodo in cui il punto A è positivo rispetto a B; la corrente circola attraverso D_1, il carico, D_3 e ritorna al terminale inferiore del secondario del trasformatore. Nel semiperiodo in cui B è positivo rispetto ad A, la corrente circola attraverso D_4, il carico, D_2 e ritorna al punto A del secondario. Durante ciascuno dei due semiperiodi, due diodi conducono in serie mentre gli altri due sono polarizzati in senso inverso; gli impulsi di corrente attraverso il carico sono sempre nella stessa direzione e costituiscono l'uscita in continua con la forma d'onda di fig. 13-3 b.

Un dato trasformatore alimentando un circuito a ponte fornisce una tensione continua doppia di quella che fornirebbe alimentando il circuito a presa centrale di fig. 13-3 a. Inoltre, mentre in un circuito a ponte la corrente circola nel secondario del trasformatore per entrambi i semiperiodi, in un circuito a presa centrale la corrente circola in ciascun semi-avvolgimento secondario per un tempo complessivo pari alla metà del tempo precedente.

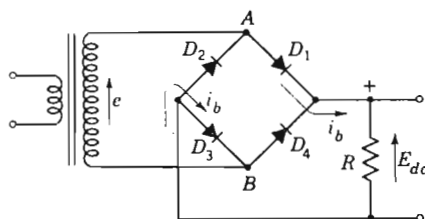



FIG. 13-4. — Raddrizzatore a ponte; è indicato il verso della corrente in un semiperiodo.

Per ottenere un riscaldamento equivalente del trasformatore, è necessario che la corrente circolante nel trasformatore del circuito a ponte sia circa i due terzi di quella che potrebbe circolare nello stesso trasformatore qualora alimentasse un circuito a presa centrale. Ovviamente, essendo aumentato l'angolo di conduzione della corrente, il trasformatore, nel circuito a ponte, è impiegato più efficacemente. L'analisi del funzionamento di quest'ultimo circuito dimostrerà che l'intera tensione secondaria cade su ciascuno dei diodi interdetti; il valore di picco della tensione inversa in tal caso vale E_m invece di $2E_m$ come si aveva per il circuito raddrizzatore a presa centrale.

13-5. Il fattore di ondulazione.

Le componenti alternative provocano nei circuiti raddrizzatori delle pulsazioni dette *ondulazione*, che causano ronzio negli amplificatori audio,

e sono fastidiose per l'alimentazione della maggior parte dei circuiti elettronici. L'entità dell'ondulazione, paragonata alla componente continua della corrente o tensione, rappresenta un indice del livellamento dell'uscita del raddrizzatore e viene chiamata *fattore di ondulazione.*

$$\gamma = \text{fattore di ondulazione} = \frac{\text{valore efficace di tutte le componenti alternative}}{\text{componente continua}} \tag{13-16}$$

La corrente di carico di un raddrizzatore è composta della componente continua I_{dc} e del valore efficace di tutte le componenti alternative I_{ac}. Per definizione, il valore efficace I_{rms} della corrente totale di carico è:

$$I_{rms} = \sqrt{I_{dc}^2 + I_{ac}^2}$$

da cui si ricava:

$$I_{ac} = \sqrt{I^2_{rms} - I_{dc}^2} \tag{13-17}$$

In base alla definizione di fattore di ondulazione risulta allora:

$$\gamma = \frac{\sqrt{I^2_{rms} - I_{dc}^2}}{I_{dc}} = \sqrt{\left(\frac{I_{rms}}{I_{dc}}\right)^2 - 1} \tag{13-18}$$

Queste grandezze possono essere misurate mediante strumenti adatti per componenti alternative e continue, ed il fattore di ondulazione può essere determinato facilmente quando l'ondulazione è grande; nel caso di piccola ondulazione si richiedono misure più raffinate.

Avendo già ricavato precedentemente l'espressione di I_{dc} e di I_{rms} per i circuiti raddrizzatori ad una semionda e ad onda intera, è possibile determinare i relativi fattori di ondulazione in assenza di filtro di uscita: per il primo circuito $\gamma = 1{,}21$ per il secondo $\gamma = 0{,}48$. Quest'ultimo risultato, che comporta un più semplice filtraggio per il circuito raddrizzatore ad onda intera, ne giustifica ulteriormente il più vasto impiego.

13-6. Il filtro capacitivo.

Uno dei più semplici e soddisfacenti circuiti di filtro è quello di fig. 13-5, nel quale le armoniche di corrente sono cortocircuitate dal condensatore C posto in parallelo al carico.

Il rendimento del filtro dipende da X_c il cui valore dovrà essere molto piccolo rispetto a quello del carico R.

La presenza della capacità influisce sul funzionamento del diodo e sulla forma d'onda della corrente in quanto in tal caso il raddrizzatore lavora con un carico RC.

Quando il valore della tensione di ingresso $e = E_m$ sen ωt supera quello

della tensione ai capi del condensatore, il diodo connette la sorgente con il carico ed il condensatore si carica. Quando invece il valore della tensione di ingresso scende al di sotto di quello della tensione ai capi del condensatore, l'anodo del diodo diventa negativo rispetto al catodo, il diodo disconnette la sorgente e il condensatore si scarica sul carico. L'energia immagazzinata nel condensatore mantiene allora la tensione sul carico ad un valore elevato per un periodo di tempo più lungo di quello che si avrebbe senza il condensatore, come si può vedere dalla fig. 13-6 *a*. Il diodo conduce solo per un breve intervallo e con corrente elevata.

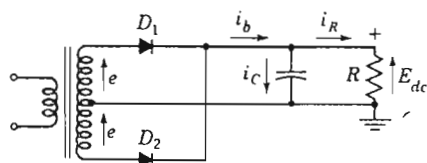



Fig. 13-5. — Raddrizzatore ad onda intera con filtro capacitativo.

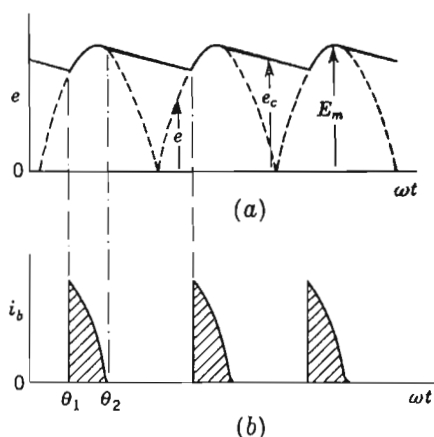



Fig. 13-6. — (*a*) Forma d'onda della tensione. (*b*) Forma d'onda della corrente nei diodi.

Per l'analisi del circuito si suppone ancora trascurabile la resistenza del diodo; inoltre si assume trascurabile la reattanza di dispersione del trasformatore, il che non è sempre vero. Infatti i piccoli trasformatori presentano una reattanza di dispersione sufficiente a limitare in modo apprezzabile la corrente nella fase iniziale di carica del condensatore.

Come viene indicato in fig. 13-16 *b*, uno dei diodi connette la sorgente

al carico durante l'intervallo di carica, cioè da $\omega t = \theta_1$ a $\omega t = \theta_2$, mentre l'altro compie la stessa funzione tra $\omega t = \pi + \theta_1$ e $\omega t = \pi + \theta_2$. Prendendo in considerazione il solo diodo D_1, si può osservare che durante l'intervallo di conduzione:

$$i_b = i_C + i_R = \frac{C\, de_c}{dt} + \frac{e_c}{R} \qquad (13\text{-}19)$$

il diodo inizia a condurre all'istante θ_1 quando:

$$e_c = E_m \operatorname{sen} \theta_1$$

e di conseguenza:

$$i_b = \omega C E_m \cos \omega t + \frac{E_m}{R} \operatorname{sen} \omega t \qquad \theta_1 < \omega t < \theta_2 \qquad (13\text{-}20)$$

da cui si ha:

$$i_b = \frac{E_m}{R} \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \qquad \theta_1 < \omega t < \theta_2 \qquad (13\text{-}21)$$

con

$$\varphi = \operatorname{arctang} \omega RC \qquad (13\text{-}22)$$

Da $\omega t = \theta_2$ in poi la tensione di alimentazione diminuisce più rapidamente di quanto diminuisca e_c per effetto della scarica del condensatore attraverso il carico R. Risultando la tensione di alimentazione minore di e_c, l'anodo del diodo diventa negativo e disconnette la sorgente dal carico RC. In corrispondenza di θ_2, istante di interruzione, $i_b = 0$ e l'eq. (13-20) assume la forma:

$$-\omega C E_m \cos \theta_2 = \frac{E_m}{R} \operatorname{sen} \theta_2 \qquad (13\text{-}23)$$

da cui

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} (-\omega RC) \qquad (13\text{-}24)$$

Con queste equazioni si è introdotto il parametro adimensionale ωRC. Se la costante di tempo RC del circuito di carico è grande, l'angolo di conduzione è piccolo e il picco di corrente risulta elevato; in compenso la caduta di tensione continua sul carico è piccola durante l'intervallo di interdizione tra θ_2 e $\pi + \theta_1$. La figura 13-7 mostra il piccolo angolo di conduzione e l'andamento del picco di corrente per un valore non troppo elevato di ωRC.

Durante l'intervallo di interdizione, il condensatore si scarica sulla resistenza R, fornendo la corrente di carico:

$$-i_C = i_R$$

L'equazione del circuito assume allora la forma:

$$-C\frac{de_C}{dt} = \frac{e_C}{R} \tag{13-25}$$

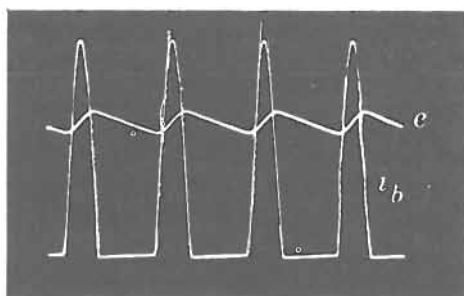



FIG. 13-7. — Impulsi di corrente nei diodi e tensione sul carico *e*, per un circuito ad onda intera per $\omega RC = 30$.

ed ha per soluzione:

$$e_C = A\varepsilon^{-t/RC}$$

Per $\omega t = \theta_2$, $e_c = E_m \operatorname{sen}\theta_2$, cosicchè si può calcolare A ottenendo:

$$e_C = E_m \operatorname{sen}\theta_2 \varepsilon^{-(\omega t - \theta_2)/\omega RC} \qquad \theta_2 \leq \omega t < \pi + \theta_1 \tag{13-26}$$

che rappresenta la tensione sul carico nell'intervallo di scarica.

Da quanto detto si deduce che per ωRC grande, il termine esponenziale tende all'unità, e la tensione di uscita raggiunge E_m. Per valori più piccoli di ωRC, la tensione media diminuisce durante la scarica ed è presente una notevole ondulazione nella forma d'onda d'uscita.

Il diodo inoltre connette la sorgente al carico in corrispondenza di $\pi + \theta_1$ e cioè quando la tensione di alimentazione eguaglia la tensione ai capi del condensatore o sul carico, per cui:

$$E_m \operatorname{sen}\theta_1 = E_m \operatorname{sen}\theta_2 \varepsilon^{-(\pi - \theta_2 + \theta_1)/\omega RC}$$

da cui:

$$\operatorname{sen}\theta_1 \varepsilon^{\theta_1/\omega RC} = \operatorname{sen}\theta_2 \varepsilon^{-(\pi - \theta_2)/\omega RC} \tag{13-27}$$

L'angolo θ_2 è definito nell'eq. (13-24) in funzione di ωRC.

L'equazione (13-27) può essere risolta graficamente; i risultati sono riportati in diagramma in funzione di ωRC in fig. 13-8 e 13-9.

Si può determinare la tensione continua in uscita calcolando il valor medio delle eq. (13-20) e (13-26) in corrispondenza di quelle parti del periodo

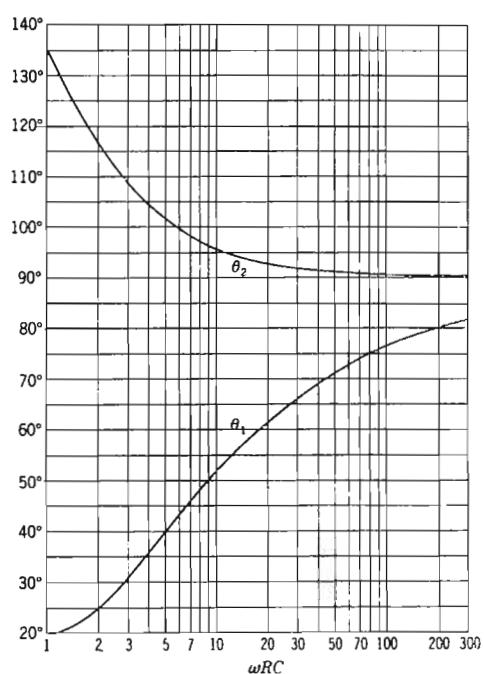



FIG. 13-8. — Valori di θ_1 e θ_2 per un filtro capacitativo.

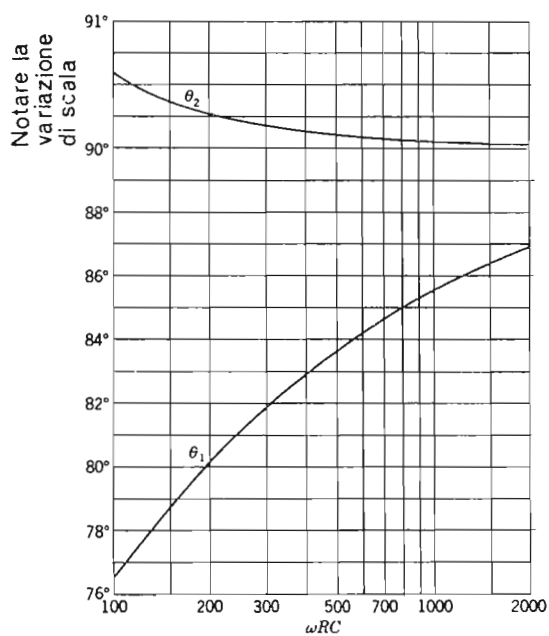



FIG. 13-9. — Particolare espanso della fig. 13-8.

in cui esse sono valide. La soluzione si presenta complessa, tuttavia si può ottenere un'espressione sufficientemente approssimata modificando la forma d'onda in uscita come in fig. 13-10; si suppone cioè che il condensatore si scarichi linearmente e che il valore di picco della tensione sia pari a E_m. Tale ipotesi è avvalorata dall'oscillogramma di fig. 13-10 *b*; il valore della tensione d'uscita, inferiore a quello di picco, è dovuto alla caduta di tensione sul diodo ed alla reattanza di dispersione del trasformatore.

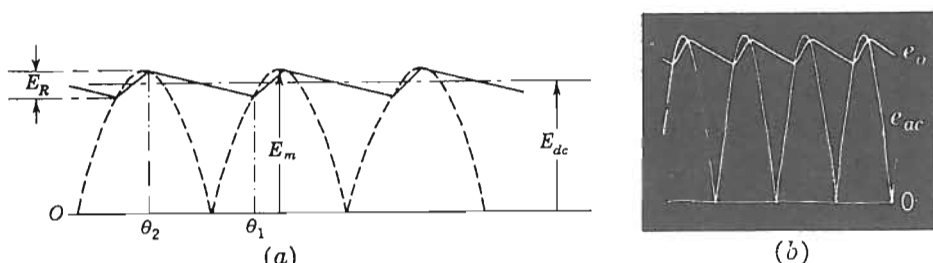



FIG. 13-10. — (*a*) Forma approssimata della tensione sul carico per un circuito ad onda intera con filtro capacitivo. (*b*) Tensione effettiva di ingresso e di uscita per $\omega RC = 30$.

La variazione complessiva di tensione sul condensatore, o l'ondulazione picco a picco, è indicata con E_R. Quindi

$$E_{dc} = E_m - \frac{E_R}{2} \tag{13-28}$$

Durante l'intervallo di scarica, si è supposto che il condensatore si scarichi linearmente a corrente costante I_{dc}. Essendo $e_c = q/c$, l'entità della diminuzione di potenziale sul condensatore risulta:

$$\frac{de_C}{d(\omega t)} = \frac{E_R}{\pi + \theta_1 - \theta_2} = \frac{1}{\omega C}\frac{dq}{dt} \tag{13-29}$$

Ma per ipotesi $dq/dt = I_{dc}$, per cui:

$$E_R = \frac{\pi + \theta_1 - \theta_2}{\omega C} I_{dc} = \frac{\pi + \theta_1 - \theta_2}{\omega RC} E_{dc} \tag{13-30}$$

Sostituendo nell'eq. (13-28) si ha:

$$\frac{E_{dc}}{E_m} = \frac{1}{1 + (\pi + \theta_1 - \theta_2)/2\omega RC} \tag{13-31}$$

Tale rapporto è riportato in diagramma in fig. 13-11 per il circuito raddrizzatore ad onda intera con filtro capacitivo. Il valore efficace dell'ondula-

zione triangolare di tensione dipende unicamente dal valore di picco. Nel caso in esame, si può dimostrare che il valore efficace della tensione di ondulazione è:

$$E_{ac} = \frac{E_R}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi + \theta_1 - \theta_2}{2\sqrt{3}\,\omega RC} E_{dc} \tag{13-32}$$

Dalla definizione del fattore di ondulazione, segue:

$$\gamma = \frac{E_{ac}}{E_{dc}} = \frac{\pi + \theta_1 - \theta_2}{2\sqrt{3}\,\omega RC} \tag{13-33}$$

per il circuito raddrizzatore ad onda intera con filtro capacitivo. In fig. 13-12 è riportato un diagramma di γ in funzione di ωRC.

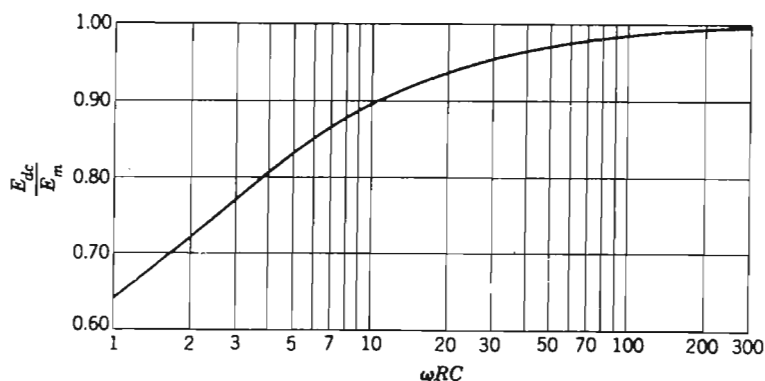



FIG. 13-11. — E_{dc}/E_m in funzione di ωRC per un circuito ad onda intera.

Ai fini del progetto si può mettere in relazione il valore efficace della tensione secondaria del trasformatore con la tensione continua in uscita sfruttando l'eq. (13-31):

$$E_{rms} = \frac{E_{dc}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\pi + \theta_1 - \theta_2}{2\omega RC}\right) \tag{13-34}$$

dove E_{rms} è l'aliquota di tensione relativa all'avvolgimento del trasformatore che alimenta ciascun diodo.

Il termine $\pi + \theta_1 - \theta_2 = \pi - \theta_c$, essendo θ_c l'angolo $\theta_2 - \theta_1$ di conduzione del diodo. Per ωRC grande, l'angolo di conduzione diventa piccolo, approssimandosi a 14,6° per $\omega RC = 100$ e a 4,6° per $\omega RC = 1000$. In tal modo il numeratore dell'espressione del fattore di ondulazione tende a π,

e sia il fattore di ondulazione che la tensione continua d'uscita diventano largamente funzione di $\pi/\omega RC$. Quindi il valore dell'ondulazione aumenta al crescere della corrente di carico, ossia al diminuire di R.

Si ottiene una buona regolazione di tensione se ωRC è sufficientemente grande da portare le condizioni di lavoro in corrispondenza della parte pia-

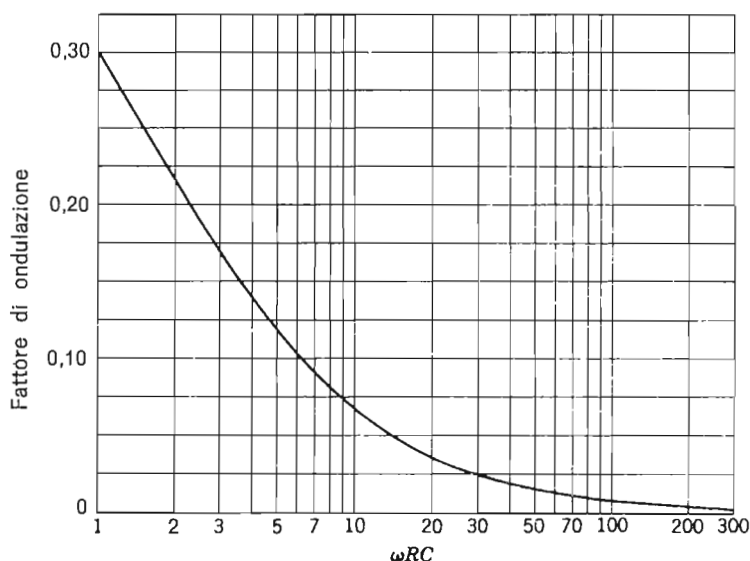



FIG. 13-12. — Andamento del fattore di ondulazione.

neggiante della curva di fig. 13-11. Valori elevati di ωRC sono realizzabili con condensatori elettrolitici, ma con alti picchi di corrente nei diodi. Questi semplici filtri capacitivi sono pratici ed economici nei limiti dei rapporti realizzabili tra correnti di picco e valore medio; questo rapporto è circa 15 per diodi al silicio. L'energia immagazzinata dal condensatore consente una buona regolazione della tensione su carichi che richiedono correnti variabili rapidamente. Per valori elevati di ωRC si ottengono inoltre valori del fattore di ondulazione ragionevolmente bassi, valori che possono essere ulteriormente abbassati mediante altri filtri.

13-7. Circuiti moltiplicatori di tensione.

Un altro circuito che utilizza il filtro capacitivo e che impiega un trasformatore di minore complessità e costo, è il *duplicatore di tensione* di fig. 13-13. È possibile realizzare circuiti più elaborati in grado di triplicare o quadru-

plicare la tensione di ingresso; in generale questi circuiti vengono chiamati *moltiplicatori di tensione.*

Dalla fig. 13-13 si deduce che il diodo D_1 conduce e carica il condensatore C_1 al valore di picco dell'onda di tensione alternativa ogni qual volta il terminale superiore del secondario del trasformatore diventa positivo. Nel semiperiodo successivo D_2 conduce e carica C_2 alla tensione di picco della semionda negativa. I due condensatori alimentano il circuito di carico in serie, fornendo una tensione di uscita prossima alla somma dei valori di picco dell'onda d'ingresso. Le condizioni di lavoro dei diodi e le correnti nei condensatori possono essere ricavate in base ai risultati del paragrafo precedente.

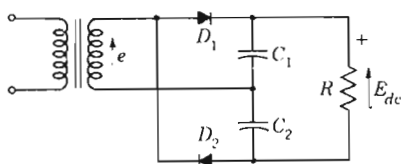



FIG. 13-13. — Duplicatore di tensione.

I valori delle capacità C_1 e C_2 devono essere sufficientemente grandi in modo che le condizioni di lavoro corrispondano al tratto pianeggiante della curva che fornisce la tensione d'uscita, come si è visto precedentemente, onde assicurare un piccolo fattore di ondulazione.

13-8. Il filtro induttivo.

Un induttore in serie al carico costituisce un'impedenza serie per le componenti alternative, nel circuito d'uscita del raddrizzatore, ed agisce da filtro. L'induttore può essere considerato come un dispositivo atto ad immagazzinare energia elettromagnetica quando la corrente supera il valor medio; tale energia viene successivamente ceduta al carico, quando il valore della corrente tende a scendere al di sotto del valore medio; in tal modo si riduce la variazione di corrente o l'ondulazione.

Per comprendere il funzionamento del circuito, si consideri dapprima il circuito ad una semionda di fig. 13-14 *a*.

Con $e = E_m$ sen ωt, l'equazione del circuito per l'intervallo di conduzione, può scriversi:

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E_m}{L} \text{sen } \omega t \qquad (13\text{-}35)$$

e la corrente:

$$i_b = B\epsilon^{-Rt/L} + \frac{E_m}{R\sqrt{\omega^2L^2/R^2 + 1}} \text{sen } (\omega t - \varphi) \qquad 0 \leq \omega t \leq \theta_2 \qquad (13\text{-}36)$$

Oltre l'angolo π, la corrente continua a circolare per effetto della tensione positiva $L \frac{di}{dt}$, indotta dalla corrente decrescente, ed opposta alla tensione di alimentazione negativa; solo quando in corrispondenza dell'angolo θ_2 le due tensioni si eguagliano in valore assoluto, il diodo si interdice. La conduzione inizia nuovamente quando la tensione di alimentazione diventa di nuovo positiva. Poichè per $\omega t = 0$, $di/dt = 0$, la costante B è determinabile. La soluzione completa per gli impulsi di corrente di fig. 13-15 è:

$$i_b = \frac{E_m}{R\sqrt{\omega^2 L^2/R^2 + 1}} [\text{sen}(\omega t - \varphi) + \epsilon^{-R\omega t/\omega L} \text{sen}\,\varphi] \qquad 0 \leq \omega t \leq \theta_2 \qquad (13\text{-}37)$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{\omega L}{R} \qquad (13\text{-}38)$$

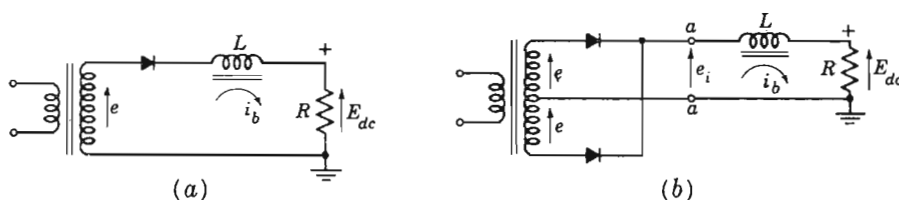



FIG. 13-14. — (*a*) Raddrizzatore ad una semionda con filtro induttivo. (*b*) Raddrizzatore ad onda intera con filtro induttivo.

Dalla (13-37) risulta evidente come all'aumentare di $\omega L/R$, il termine esponenziale diminuisca più lentamente, e la corrente possa circolare, anche con tensione di alimentazione nulla, oltre $\omega t = \pi$. Quanto detto dà un'idea di quello che sarà il funzionamento del circuito ad onda intera di fig. 13-14 *b*. Per la presenza dell'induttore la conduzione del primo diodo si sovrappone in parte all'inizio della conduzione del secondo diodo, cosicchè sia nell'induttore che nel carico la corrente diventa continua, come in fig. 13-15 *b*. La corrente circola alternativamente nei due diodi, risultando il diodo con lo anodo positivo quello in conduzione (trascurando sempre gli effetti della reattanza del trasformatore).

Una tensione sinusoidale raddrizzata la cui forma è riportata in fig. 13-15 *b* o 13-16 *b* è applicata ai terminali di ingresso del filtro di fig. 13-14 *b*. Questa tensione e_i, è scomponibile in armoniche, come risulta dall'eq. (13-14)

$$e_i = \frac{2E_m}{\pi} - \frac{4E_m}{3\pi}\cos 2\omega t - \frac{4E_m}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{4E_m}{35\pi}\cos 6\omega t \;\ldots\ldots \qquad (13\text{-}39)$$

Il primo termine rappresenta la componente media o continua.

Se l'induttore, detto anche *induttore di blocco*, presenta una resistenza R_c, la corrente continua nel carico è:

$$I_{dc} = \frac{2E_m}{\pi(R_c + R)} \tag{13-40}$$

e la tensione continua sul carico risulta:

$$E_{dc} = \frac{2E_m}{\pi(1 + R_c/R)} \tag{13-41}$$

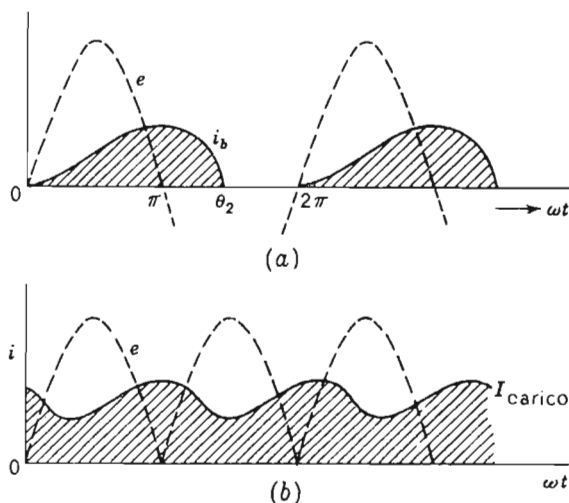



FIG. 13-15. — (*a*) Corrente di carico per un raddrizzatore ad una semionda con filtro induttivo. (*b*) Corrente di carico per un raddrizzatore ad onda intera con filtro induttivo.

Facendo riferimento all'eq. (13-39) si nota che la quarta e la seconda armonica di tensione sono nel rapporto $E_4/E_2 = 1/5$, mentre le impedenze presentate dal filtro alle corrispondenti frequenze, tra i terminali a, a, sono date da:

$$|Z_2| = \sqrt{(R_c + R)^2 + 4\omega^2L^2} \qquad |Z_4| = \sqrt{(R_c + R)^2 + 16\omega^2L^2}$$

Se ne deduce allora che la quarta armonica di corrente nel filtro risulterà inferiore al 20 per cento della seconda armonica di corrente e che le armoniche di ordine più elevato risultano progressivamente più piccole. Quindi l'ondulazione è dovuta principalmente alla seconda armonica di corrente I_2, dove:

$$|I_2| = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\pi(R_c + R)\sqrt{1 + 4\omega^2L^2/(R_c + R)^2}} \tag{13-42}$$

Nell'ipotesi che $[2\omega L/(R_c+R)]^2 \gg 1$, il fattore di ondulazione risulta:

$$\gamma = \frac{|I_2|}{I_{dc}} = \frac{R_c + R}{3\sqrt{2}\omega L} = 0{,}236 \frac{R_c + R}{\omega L} \qquad (13\text{-}43)$$

L'equazione (13-43) mostra che al crescere della corrente di carico o al diminuire di R, l'ondulazione decresce. Ciò è dovuto alla maggiore energia immagazzinata nell'induttore all'aumentare della corrente. Il risultato è opposto a quello ottenuto con il filtro capacitivo, in cui la ondulazione diventa maggiore al crescere della corrente di carico.

(*a*) (*b*)

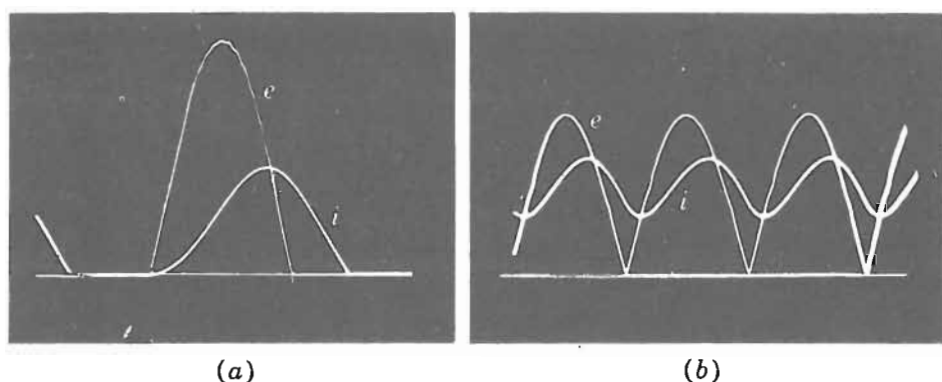



FIG. 13-16. — (*a*) Tensione applicata e corrente di carico, per un raddrizzatore ad una semionda con filtro induttivo. (*b*) Come per (*a*) per un raddrizzatore ad onda intera e con corrente continua.

Il filtro induttivo non da luogo ad alcun picco di corrente nel diodo, tuttavia esso richiede una tensione di ingresso elevata ,per una data tensione continua in uscita, il che aumenta il costo dell'unità. L'induttore inoltre è costoso e pesante, per cui il filtro induttivo è normalmente impiegato come parte del filtro LC.

13-9. Il filtro LC.

Sia il filtro capacitivo che quello induttivo non sono convenienti, da un punto di vista economico, per alimentare la maggior parte degli apparati elettronici con un fattore di ondulazione sufficientemente basso. Si adotta frequentemente una combinazione dei due tipi, come nel caso del circuito ad LC o *ad ingresso induttivo* di fig. 13-17. Mentre l'induttore limita l'ampiezza delle armoniche di corrente, il condensatore le cortocircuita in parallelo

al carico; si ottiene così un'ondulazione più bassa di quella che si avrebbe con lo stesso induttore o il condensatore utilizzati indipendentemente.

Poichè il filtro capacitivo e quello induttivo presentano bassa ondulazione rispettivamente a bassi ed alti carichi, è normale che il filtro LC abbia una ondulazione costante per tutti i valori di carico. Generalmente è opportuno che l'impedenza, vista dal carico verso il filtro, sia piccola a tutte le frequenze del segnale; la capacità del filtro LC può essere allora scelta tanto grande da fornire una impedenza di uscita sufficientemente bassa. Una capacità di valore elevato, disposta in parallelo, migliora inoltre la regolazione della tensione dinamica per carichi variabili, come si è già visto per il filtro capacitivo.

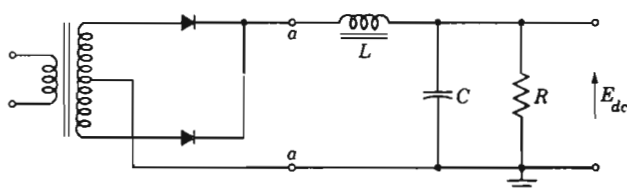



FIG. 13-17. — Filtro LC.

Per carichi nulli, per i quali R ≌ ∞ il condensatore si carica alla tensione di picco e l'uscita è pari ad E_m.

Al diminuire di R, i diodi iniziano a condurre per piccoli angoli, il condensatore si carica ancora al valore di picco, ma la tensione media sul condensatore risulterà leggermente inferiore al valore di picco. Il modo di operare del diodo è molto simile in tal caso a quello che si ha per un filtro capacitivo, in quanto la corrente è tanto piccola che l'effetto dell'induttore è trascurabile. Al crescere della corrente di carico, l'angolo di conduzione aumenta per effetto dell'induttanza e, per un certo valore della corrente continua I_B, l'angolo di conduzione raggiunge i 180^0 come se il filtro fosse induttivo.

In fig. 13-18*a*, il punto della curva di regolazione in cui la corrente diventa continua, è indicato con I_B. Da questo valore della corrente in poi il filtro è di tipo induttivo e non capacitivo.

Per realizzare una buona regolazione di tensione per correnti inferiori ad I_B, normalmente si lavora con una *resistenza zavorra*, o di minimo carico, in parallelo all'uscita. La resistenza R_B è progettata in modo da assorbire una corrente di valore I_B, anche senza alcun carico esterno, in modo da prevenire l'aumento di tensione fino al valore E_m. Per l'analisi del circuito si indica con R il carico effettivo ottenuto dal parallelo del carico reale e di R_B. In condizioni di corrente di carico continua, la tensione raddrizzata appli-

cata all'ingresso tra i morsetti a,a di fig. 13-17 è quella fornita dall'eq. (13-39). Inoltre si suppone che X_c sia trascurabile rispetto ad R, in modo che le componenti alternative circolino in C mentre le componenti continue in R, come

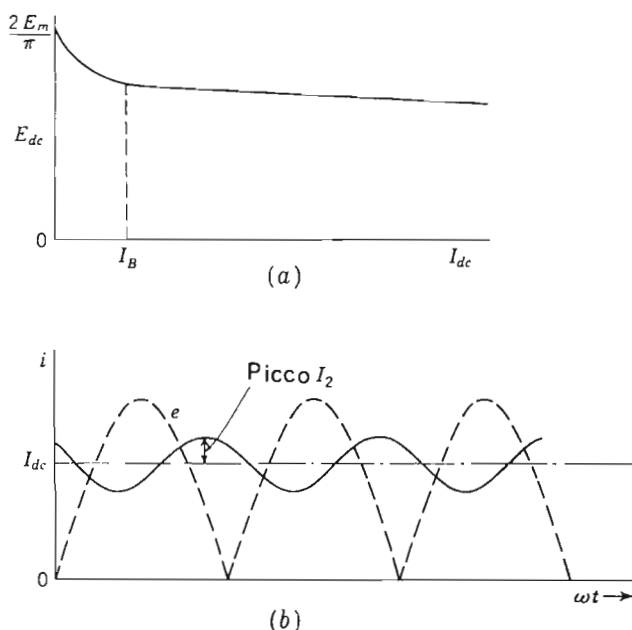



FIG. 13-18. — (*a*) Curva di regolazione per un filtro LC. (*b*) Corrente di uscita in un filtro LC.

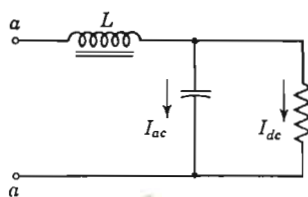



FIG. 13-19. — Percorsi della componente alternativa e continua.

indicato in fig. 13-19. In tali ipotesi, il valore efficace della seconda armonica di corrente attraverso L e C è espressa da:

$$|I_2| = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\pi(2\omega L - 1/2\omega C)} = \frac{8E_m\omega C}{3\sqrt{2}\pi(4\omega^2 LC - 1)} \qquad (13\text{-}44)$$

La seconda armonica di tensione ai capi del parallelo costituito dal carico e dal condensatore, è fornita da:

$$|E_2| = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\pi(4\omega^2 LC - 1)} \tag{13-45}$$

Supponendo ancora che l'ondulazione sia dovuta prevalentemente alla seconda armonica si ha:

$$\gamma = \frac{|E_2|}{E_{dc}} = \frac{\sqrt{2}}{3(4\omega^2 LC - 1)} = \frac{0,47}{4\omega^2 LC - 1} \tag{13-46}$$

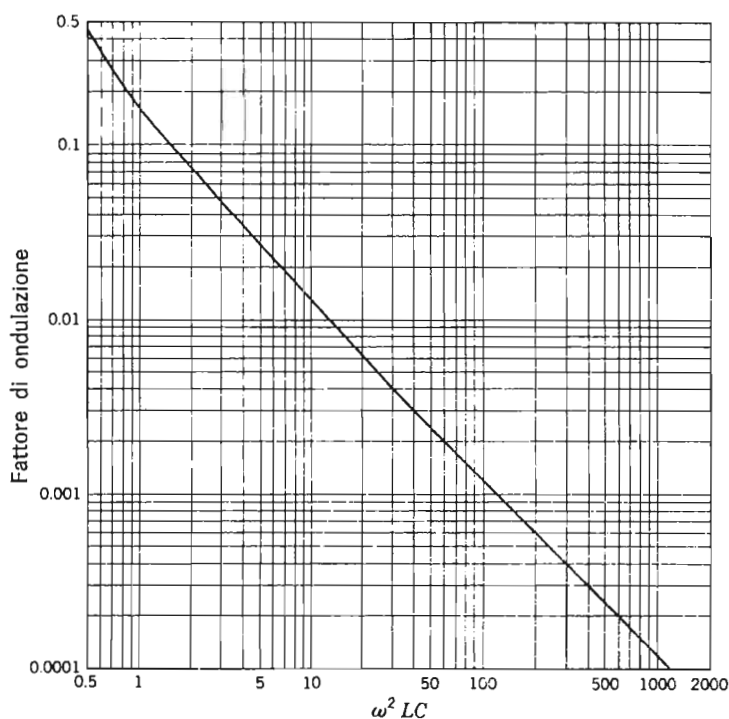



FIG. 13-20. — Fattore di ondulazione in funzione di ω^2LC per un filtro LC.

In fig. 13-20, si può notare che il fattore di ondulazione con il filtro LC è minore di quello ottenibile sia con il filtro induttivo che capacitivo. La condizione $4\omega^2 LC = 1$ deve essere evitata altrimenti la risonanza serie per la seconda armonica di tensione dà luogo ad una forte ondulazione.

In serie al filtro in esame si possono aggiungere ulteriori sezioni di filtro, in tal caso il fattore di ondulazione diventa:

$$\gamma = \frac{0,47}{(4\omega^2 L_1 C_1 - 1)\ (4\omega^2 L_2 C_2 - 1)\ldots\ldots} \tag{13-47}$$

in quanto ciascuna sezione riduce l'ondulazione del fattore $4\omega^2 LC - 1$. Se si impiegano n sezioni identiche l'eq. (13-47) può essere risolta rispetto ad LC:

$$LC = \frac{1}{4\omega^2}\left[1 + \left(\frac{0,47}{\gamma}\right)^{1/n}\right] \tag{13-48}$$

dove L è espresso in Henry e C in Farad.

Comunemente si utilizzano induttori da 4 a 20 H, con condensatori compresi tra 20 e 100 μF. Gli effetti della variazione del valore della capacità sull'ondulazione sono evidenti in fig. 13-21.

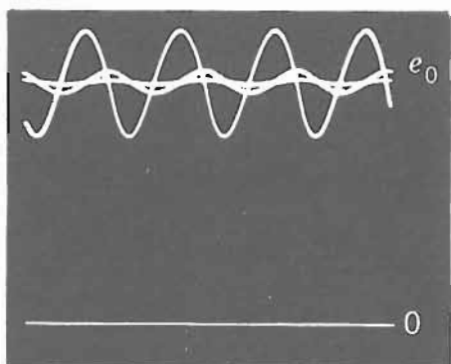



FIG. 13-21. — Effetto dovuto all'aumento di C in un filtro ad LC. Diminuzione dell'ondulazione per C = 0; 2; 10 μF e per L = 10H.

13-10. Il resistore zavorra e l'induttanza critica di ingresso.

Per il circuito raddrizzatore ad onda intera con filtro LC, la corrente di carico non deve mai essere inferiore ad I_B, il che richiede la determinazione del valore della resistenza zavorra. In corrispondenza di questo valore di corrente il picco negativo dell'onda di corrente è tangente all'asse delle ascisse come in fig. 13-22. Con $R = R_B$, o senza alcun carico esterno, si ha:

$$I_{dc} = I_{2m}$$

dove I_{2m} è il valore di picco della seconda armonica di corrente. Essendo $I_{ac} = 2E_m/\pi R$ e ricavando I_{2m} dall'eq. (13-44) ne segue:

$$\frac{2E_m}{\pi R_B} = \frac{4E_m}{3\pi(2\omega L - 1/2\omega C)}$$

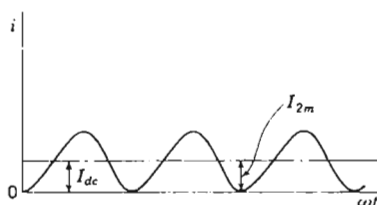



FIG. 13-22. — Forma d'onda della corrente nel carico per $I_{dc} = I_B$.

È facile vedere che $2\omega L \gg 1/2\omega C$, per cui:

$$R_B = 3\omega L = 1131L \qquad (13\text{-}49)$$

nel caso che l'alimentazione sia a 60 Hz. Di solito si usa un valore di $R_B = 1000$ L per maggiore sicurezza.

La corrente assorbita dal resistore zavorra è:

$$I_B = \frac{2E_m}{3\pi\omega L} = 0{,}000562 \frac{E_m}{L} \qquad (13\text{-}50)$$

in un circuito a 60 Hz.

È opportuno che I_B sia piccola, o R_B grande, per ridurre la perdita di potenza continua nel resistore zavorra. Il valore critico di I_B può essere diminuito aumentando R_B e quindi L. Aumentando L ne aumenta il costo, ed inoltre il nuovo valore di L può risultare esuberante rispetto a quello necessario a fornire il richiesto fattore di ondulazione. Si può risolvere il problema diminuendo il traferro dell'induttore, e permettendo che il ferro si saturi, in parte, per valori elevati di I_{dc}, in quanto per i carichi elevati il valore critico dell'induttanza è minore. Al diminuire di I_{dc}, l'induttanza della bobina aumenta in modo da verificare le specifiche di progetto con un opportuno valore di R_B.

Il terminale negativo del carico della maggior parte degli alimentatori è connesso a massa. Questo richiede che le bobine di filtraggio non siano inserite nella parte negativa del circuito raddrizzatore. Se questo accade, una tensione a 60 Hz uguale alla tensione *e* del trasformatore è posta in serie all'induttore e alle capacità degli avvolgimenti del trasformatore, come si vede

in fig. 13-23. Questo dà origine ad una corrente a 60 Hz nella bobina che si aggiunge alla normale ondulazione.

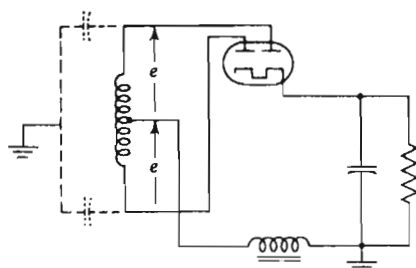



FIG. 12-23. — L'induttore nella connessione con negativo a massa.

13-11. Il Filtro a π.

Talvolta si aggiunge un condensatore in ingresso al filtro LC per ottenere una tensione maggiore in uscita. Per studiare il comportamento di questo circuito, riportato in fig. 13-24*a*, si possono impiegare i metodi precedentemente studiati. Se il condensatore C_1 ha una capacità di almeno 20 μF, il circuito si comporta come un filtro capacitivo, e C_1 si carica alla tensione di picco, come risulta in fig. 13-24 b. Si supponga che la corrente che attra-

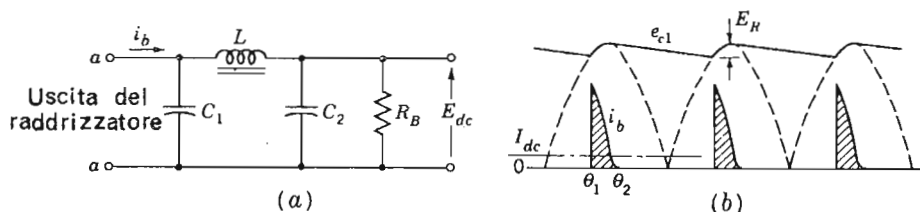



FIG. 13-24. — (a) Filtro ad ingresso capacitivo. (*b*) Forma d'onda approssimata della tensione e della corrente nel diodo.

versa il condensatore, durante l'intervallo di interdizione del diodo, sia costante, come si era già supposto per il filtro capacitivo. Questo significa che anche la corrente in L è costante, ovvero che l'ondulazione deve essere piccola. La tensione in uscita in tal caso risulta:

$$E_{dc} = E_m - \frac{E_R}{2} - I_{dc}R_c$$

ove R_c è la resistenza della bobina. Il valòre di E_R può essere determinato tenendo presente che se C_1 è grande, l'intervallo di conduzione del condensatore è pari a metà ciclo, $T = 1/2f$, e:

$$E_R = \frac{q}{C_1} = \frac{I_{dc}T}{C_1} = \frac{\pi I_{dc}}{\omega C_1} \tag{13-51}$$

Per cui:

$$E_{dc} = E_m - I_{dc}\left(\frac{\pi}{2\omega C_1} + R_c\right) \tag{13-52}$$

relazione che mostra come la regolazione della tensione sia una funzione di C_1, come è mostrato in fig. 13-25. Abitualmente si dice che C_1 agisce prevalentemente nella regolazione e C_2 sull'ondulazione.

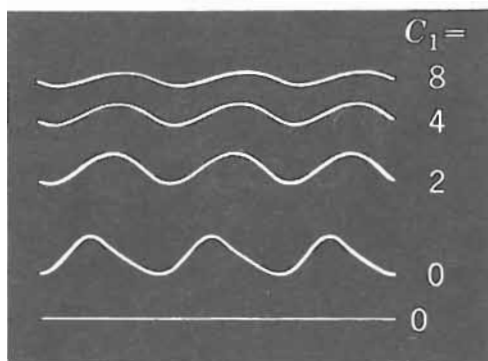



FIG. 13-25. — Effetto dovuto all'aumento di C_1; $E_{dc} = 50, 120, 160, 190$ volt in ordine crescente.

Se si considera triangolare la forma d'onda dell'ondulazione di fig. 13-24, si ha una serie di Fourier espressa da:

$$e_R = \frac{E_R}{\pi} \text{ sen } 2\omega t - \frac{E_R}{2\pi} \text{ sen } 4\omega t + \frac{E_R}{3\pi} \text{ sen } 6\omega t - \ldots\ldots \tag{13-53}$$

che è la tensione applicata ai terminali a,a di fig. 13-24. Se si fanno le solite ipotesi riguardo le reattanze e l'importanza della seconda armonica, la seconda armonica di tensione su C_2, o R, è:

$$|E_2| = \frac{E_R}{\sqrt{2}\,\pi} \frac{1}{4\omega^2 LC_2 - 1} = \frac{I_{dc}}{\sqrt{2}\,\omega C_1 (4\omega^2 LC_2 - 1)}$$

Il fattore di ondulazione è:

$$\gamma = \frac{|E_2|}{E_{dc}} = \frac{1}{\sqrt{2}(4\omega^2 LC_2 - 1)\omega RC_1} \tag{13-54}$$

Il fattore di ondulazione in un filtro con circuito a π è funzione del carico, ed aumenta con la corrente di carico.

Questo circuito, riguardo la corrente di picco, ha le stesse limitazioni già considerate per il filtro capacitivo, tuttavia presenta il vantaggio di un costo ridotto del trasformatore in quanto si può adoperare una tensione secondaria più bassa per una data tensione continua in uscita.

13-12. Il filtro RC.

Per ridurre ulteriormente l'ondulazione residua del filtro capacitivo, si può aggiungere un circuito RC come in fig. 13-26. La resistenza R_1 dovrebbe essere di valore elevato rispetto a $1/2\omega C_2$, ovvero rispetto alla reattanza presentata da C_2 alla seconda armonica; ciò è possibile solo entro certi limiti sia per la caduta di tensione ai capi della R_1 sia per non diminuire troppo la stabilità della tensione di uscita al variare della corrente.

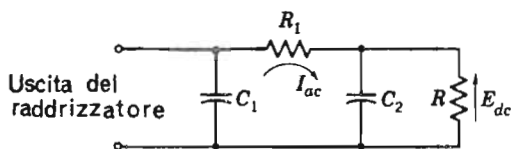



FIG. 13-26. — Filtro RC aggiunto al semplice filtro capacitivo.

Il metodo impiegato per l'analisi del circuito è ormai familiare. La tensione alternativa applicata al circuito R_1C_2 è quella di ondulazione su C_1, ovvero è la tensione E_{ac} dell'eq. (13-32). Inoltre supponendo che sia predominante la seconda armonica di tensione e che R sia grande si ha:

$$|I_2| = \frac{\omega C_2 E_R}{2\sqrt{3}\sqrt{4\omega^2 R_1^2 C_2^2 - 1}} \tag{13-55}$$

La tensione su C_2 risulta allora:

$$|E_2| = \frac{E_R}{2\sqrt{3}\sqrt{4\omega^2 R_1^2 C_2^2 - 1}}$$

ne segue che:

$$\gamma = \frac{\text{ondulazione su } C_1}{\sqrt{4\omega^2 R_1^2 C_2^2 - 1}} \tag{13-56}$$

ossia l'ulteriore sezione del filtro RC riduce ulteriormente l'ondulazione.

13-13. Progetto del circuito raddrizzatore monofase.

Poichè finora si è trascurato la reattanza di dispersione del trasformatore, è necessario, qualora si voglia ottenere una data tensione in uscita, aumentare dal 5 al 10 per cento la tensione alternata in ingresso al trasformatore stesso. I secondari dei trasformatori sono normalmente progettati in funzione del valor massimo della tensione a.c. cui essi sono sottoposti e del valor massimo della corrente continua che può essere assorbita dal carico.

I fattori che intervengono nella scelta dei diodi sono i seguenti:

Tensione inversa di picco (P.I.V.)*, o **massima tensione inversa.**

Un diodo a semiconduttore potrà resistere solo ad una tensione inversa di valore limitato senza che avvenga la rottura a valanga. La P.I.V. deve essere inferiore a quella massima data dal costruttore. Per il circuito ad una semionda con filtro capacitivo, la P.I.V. è fornita da $E_m + E_{dc}$ in quanto l'uscita in continua ha polarità tale da sommarsi al picco negativo. Per il circuito a ponte ad onda intera, la P.I.V. è E_m, mentre per il circuito a presa centrale ad onda intera, è $2E_m$.

Corrente media. — La corrente media unitamente alla corrente inversa dà luogo a perdite per riscaldamento; i picchi di corrente sono pericolosi perchè danno luogo a forti riscaldamenti della giunzione.

Corrente di picco nel diodo. — Le prestazioni di un diodo sono limitate dal riscaldamento istantaneo dovuto alle correnti di picco; tuttavia possono essere sopportati picchi non ripetitivi di notevole ampiezza.

I diodi a semiconduttore sono sensibili alla temperatura per la dipendenza da questa della corrente inversa. Se la tensione inversa aumenta oltre il punto di valanga o se aumenta la temperatura ambiente, la corrente inversa cresce in modo drastico. Per il germanio ed il silicio, la corrente inversa si raddoppia approssimativamente ogni 10 °C. A causa dell'aumento di tale corrente cresce ulteriormente la temperatura della giunzione, il che provoca

---

* PIV Dall'inglese Peak Inverse Voltage (N.d.T.).

un nuovo aumento della corrente inversa; ha così origine una *degenerazione termica,* che ha come risultato la distruzione del diodo.

Le temperature limiti di lavoro per il silicio ed il germanio sono 200 °C e 80°C rispettivamente; tali limiti sono fissati in base ai valori tollerabili per le correnti inverse.

Nel caso di temperatura ambiente elevata è generalmente necessario ridurre la potenza dissipata nei diodi secondo la curva di fig. 13-27.

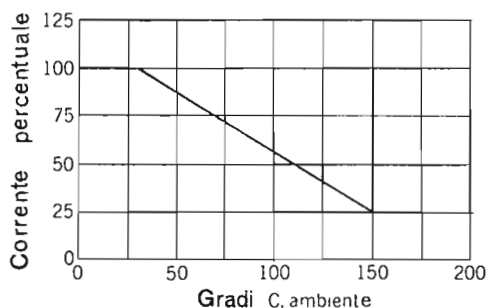



FIG. 13-27. — Campo di utilizzazione per un diodo al silicio.

Spesso si usano dissipatori di calore ovvero grosse lamine metalliche munite di alette radianti che irradiano il calore.

I diodi al silicio ed al germanio sono spesso impiegati in serie per sopportare tensioni inverse più elevate. Il circuito viene allora protetto mediante resistenze e condensatori in parallelo, come in fig. 13-28. Infatti le resistenze inverse dei diodi possono essere disuguali, in tal caso le resistenze in parallelo consentono una migliore ripartizione della tensione tra i diodi.

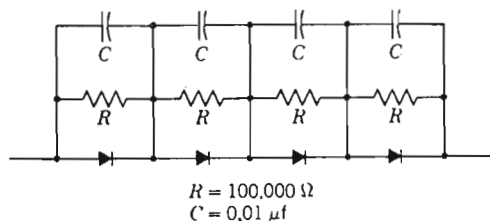



FIG. 13-28. — Collegamento in serie di diodi a semiconduttore.

I condensatori in parallelo forniscono una via per cortocircuitare le variazioni di tensioni e per ottenerne una ripartizione più uniforme tra le varie giunzioni, in quanto le capacità delle giunzioni non sono identiche.

Per il progetto di circuiti che impiegano diodi a vuoto, la resistenza interna di questi può essere valutata dalle caratteristiche tensione-corrente, oppure il progetto dei circuiti può essere effettuato usando le *caratteristiche di lavoro*, come è mostrato in fig. 13-29; sono necessari ovviamente diagrammi specifici per ciascun tipo di diodo e per ciascun circuito di filtraggio. I trasformatori per il riscaldamento del filamento del catodo dei tubi a vuoto devono essere isolati verso massa per il valore della tensione continua, in quanto la maggior parte del raddrizzatore è fuori massa proprio al valore di tensione suddetto.

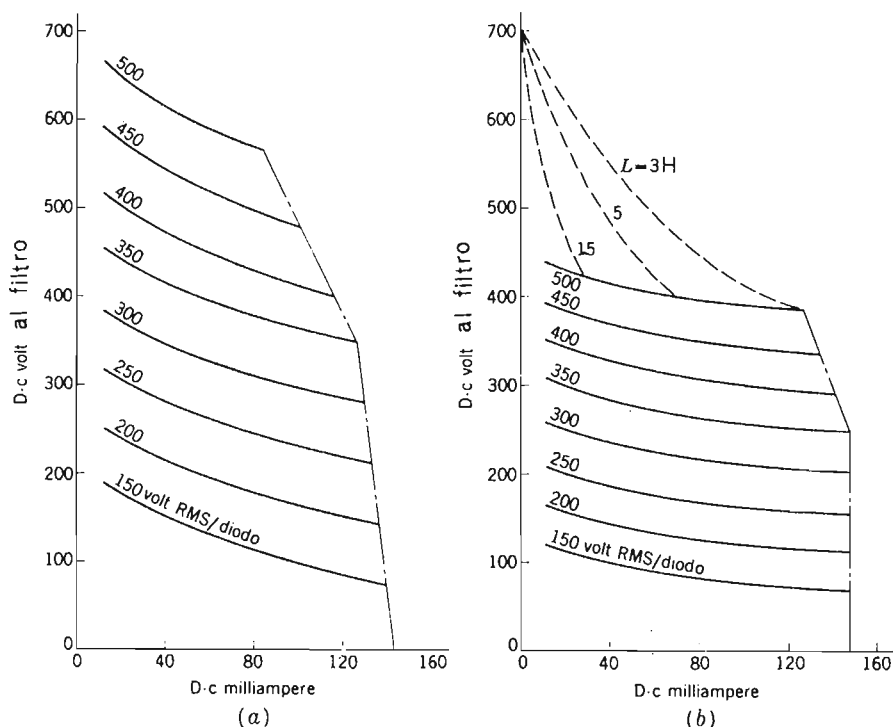



FIG. 13-29. — Filtro a π con ingresso capacitivo; C_1 = 10 μF. (*b*) Filtro LC con ingresso induttivo.

Esempio — *Un rettificatore ad onda intera con filtro LC fornisce una tensione continua di* 250 *volt ed una corrente di* 100 *mA. Determinare le caratteristiche dei diodi necessari e del trasformatore, il valore della resistenza zavorra e il fattore di ondulazione, se la* R_c *della bobina è uguale a* 400 *ohm,* $L = 10$ *H, e* $C = 20$ μF.

La resistenza di carico (e di zavorra) è data da:

$$R = \frac{250}{0{,}100} = 2.500 \text{ ohm}$$

Utilizzando l'eq. (13-41) *e ricordando che* $I_{rms} \cong I_{dc}$ *in un filtro con ingresso induttivo, si ha che la tensione di alimentazione risulta:*

$$E_m = \frac{\pi E_{dc}}{2}\left(1 + \frac{R_c}{R}\right)$$
$$= \frac{\pi \times 250}{2}\left(1 + \frac{400}{2500}\right) = 455 \text{ volt}$$

Ciascun ramo del trasformatore a presa centrale dovrà fornire 322 *volt in valore efficace e questo senza tener conto dell'impedenza del trasformatore, il quale quindi dovrà essere proporzionato per circa* 340-0-340 *volt e* 100 *mA in continua.*

La resistenza zavorra può essere calcolata mediante la formula:

$$R_B = 1000\ L = 10.000 \text{ ohm}$$

$$I_B = \frac{2E_m}{3\pi\omega L} = \frac{2 \times 455}{3\pi \times 377 \times 10} = 0{,}0256 \quad A$$

Il fattore di ondulazione è dato da:

$$\gamma = \frac{0{,}47}{4\omega^2 LC - 1}$$
$$= \frac{0{,}47}{4 \times 377^2 \times 10 \times 20 \times 10^{-6}} = 0{,}00413$$

La tensione di ondulazione è cioè di 4 *mV per ogni volt di tensione continua in uscita, o* 1 *volt in valore efficace come tensione di ondulazione totale. Tale ondulazione non è sufficientemente bassa per molte applicazioni elettroniche per cui è opportuno aggiungere un secondo filtro.*

Per ogni diodo la corrente deve essere di 50 *mA. In un filtro LC non è necessario controllare il valore del picco di corrente, mentre ciò deve essere fatto per un filtro capacitivo o a* π *in quanto l'entità del picco può essere determinante nella scelta del diodo.*

13-14. Il circuito raddrizzatore trifase ad una semionda.

La maggior parte dei circuiti raddrizzatori di potenza utilizza un trasformatore con il secondario connesso a stella, con un diodo inserito in ciascuna fase della stella.

In fig. 13-30 a si riporta, come esempio, un semplice circuito trifase ad una semionda. Il carico R è inserito tra i catodi comuni ed il centro della stella del trasformatore; normalmente si assume come riferimento per le tensioni il centro della stella. Gli effetti della reattanza del trasformatore verranno discussi in seguito.

Trascurando la caduta di tensione sul diodo, il potenziale del punto comune ai catodi risulta eguale a quello dell'anodo del diodo in conduzione. Cosicchè quando e_{01} è più positivo di ogni altro anodo, tra $-\pi/3$ e $\pi/3$, con-

durrà il diodo D_1. A $\pi/3$ la tensione e_{01} diminuisce, il diodo D_1 cessa di condurre e la corrente si trasferisce, ovvero *commuta* su D_2. Per $\omega t = \pi$, la corrente commuta da D_2 a D_3, in quanto ciascun anodo conduce per 120°, risultando in conduzione in ciascun istante l'anodo più positivo. La forma della corrente è riportata in fig. 13-30 c. In effetti questi impulsi di corrente assumono la forma mostrata in fig. 13-31, ove l'andamento della parte iniziale e finale di ciascun impulso di corrente è dovuta agli effetti, che sono stati trascurati, della reattanza del trasformatore.

La corrente anodica del diodo D_1, qualora si impieghi una cosinusoide, è espressa da:

$$i_b = \frac{E_m \cos \omega t}{R} \qquad -\pi/3 \leq \omega t \leq \pi/3 \qquad (13\text{-}57)$$

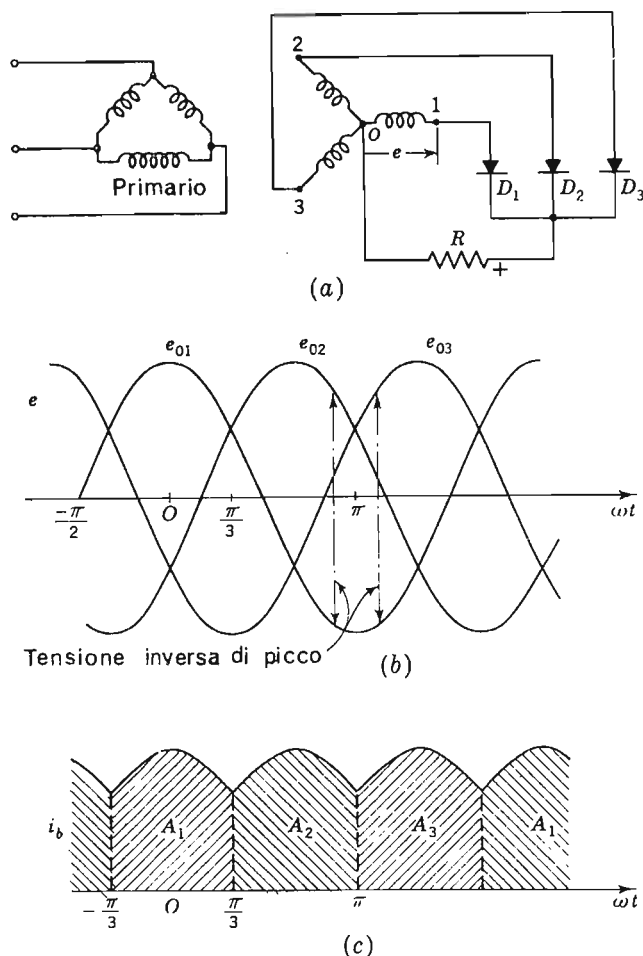



FIG. 13-30. — (*a*) Raddrizzatore trifase ad una semionda. (*b*) Tensione rispetto al neutro. (*c*) Corrente di carico.

La corrente di carico è pari al triplo della corrente media di un diodo, ovvero:

$$I_{dc} = \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{E_m \cos \omega t}{R} \, d(\omega t) = \frac{0{,}827 \, E_m}{R} \tag{13-58}$$

Scrivendo:

$$E_{dc} = I_{dc}R = 0{,}827E_m = 1{,}17E_{rms}$$

si ottiene una relazione tra la tensione continua in uscita e il valore efficace della tensione del trasformatore necessaria a produrla, sempre nell'ipotesi ideale che sia nulla la caduta sul diodo e nulla la reattanza del trasformatore.

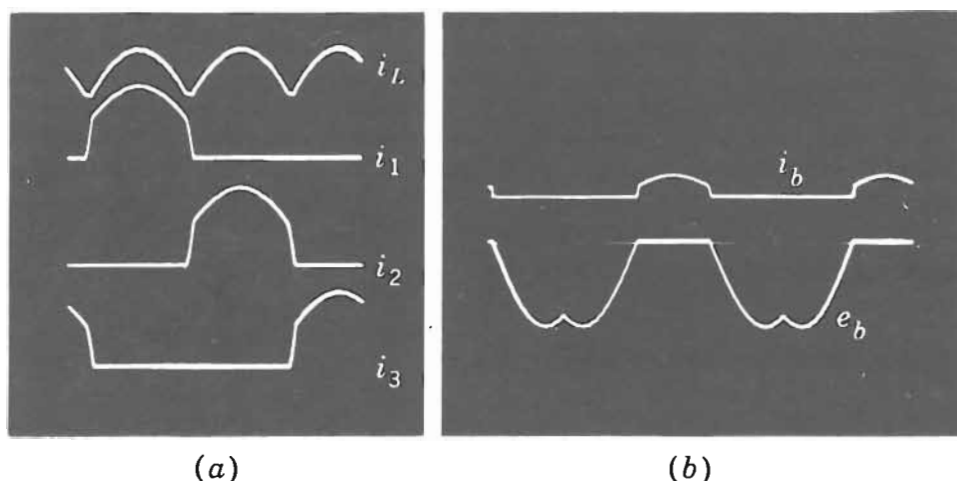



FIG. 13-31. — Raddrizzatore trifase ad una semionda: (*a*) corrente nel carico e nel diodo, (*b*) corrente e tensione del diodo.

L'ondulazione avrà una frequenza fondamentale tripla della frequenza di alimentazione. Si può determinare la grandezza dell'ondulazione valutando I_{rms}:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{E_m^2 \cos^2 \omega t}{R^2} \, d(\omega t)} = \frac{0{,}838 \, E_m}{R} \tag{13-59}$$

L'ondulazione è data da:

$$\gamma = 100\% \sqrt{\left(\frac{I_{rms}}{I_{dc}}\right)^2 - 1} = 100\% \sqrt{\left(\frac{0{,}838}{0{,}827}\right)^2 - 1} = 17\%$$

Si avrà la tensione inversa di picco quando la massima tensione si presenta su un diodo interdetto.

Quando D_1 è interdetto la tensione su di esso è e_{o1}—e_{o2} oppure e_{o1}—e_{o3}, dove ciascuna tensione è riferita al neutro.

Quindi:

$$E_m \cos \omega t - E_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = e_b \qquad (13\text{-}60)$$

La massima tensione inversa si ha per:

$$\omega t_1 = 60^0 + \frac{n\pi}{2} \qquad n = \text{dispari} \qquad (13\text{-}61)$$

Ne segue che il picco inverso di tensione avviene in corrispondenza di 150^0, ovvero a $5\pi/6$ del periodo di e_{o1}. Il valore della tensione inversa di picco per un circuito trifase ad una semionda è dato da:

$$PIV = \sqrt{3}\, E_m = 2{,}09 E_{dc}$$

In questo circuito il nucleo del trasformatore è soggetto a saturarsi in quanto la componente continua circola in ciascun secondario del trasformatore.

Normalmente questo circuito viene opportunamente modificato, come verrà discusso nel paragrafo 13-21.

13-15. Circuiti raddrizzatori ad m fasi.

Le condizioni ottime di ondulazione o di costo si ottengono spesso con 6, 12 o più fasi. Per uno studio generale dei circuiti raddrizzatori polifasi, è conveniente impiegare un trasformatore con gli avvolgimenti connessi

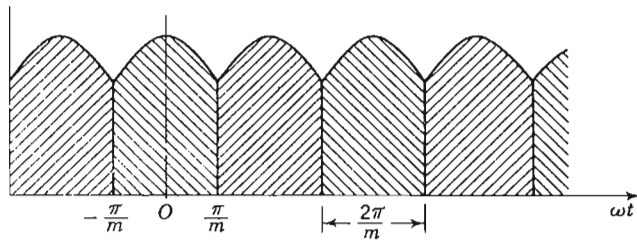



FIG. 13-32. — Impulsi di corrente nel carico resistivo di un raddrizzatore ad *m* fasi.

a stella ad m fasi, collegati ad m anodi, e con ciascun anodo in conduzione per un intervallo di $2\pi/m$ radianti, per ciclo. La forma d'onda della corrente di carico, per carico ohmico, è riportata in fig. 13-32, dove si è utilizzata

una cosinusoide per ragioni di simmetria. La definizione dell'angolo di conduzione è analoga a quella già data per il raddrizzatore monofase ad una semionda.

Per un raddrizzatore ideale, con carico ohmico, si può dare un'espressione generale per la I_{dc}:

$$I_{dc} = \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \frac{E_m \cos \omega t}{R} d(\omega t) = \frac{E_m}{R} \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \tag{13-62}$$

Essendo $E_{dc} = I_{dc}R$, si ha:

$$\frac{E_{dc}}{E_m} = \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \tag{13-63}$$

ed i valori di questo rapporto si possono valutare in termini di m, il che mostra che E_{dc} aumenta con il numero di fasi, sebbene l'incremento non sia grande per m maggiore di 6.

m	2	3	4	6	12	∞
E_{dc}/E_m....	0,636	0,826	0,896	0,955	0,999	1,00

Il valore efficace della corrente per diodo vale:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \frac{E_m^2 \cos^2 \omega t}{R^2} d(\omega t)} = \frac{E_m}{R} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \cos \frac{\pi}{m}\right)} \tag{13-64}$$

ed il valore efficace della corrente nel carico con m impulsi per ciclo è $\sqrt{m}$ volte maggiore del valore precedentemente indicato. Il fattore di ondulazione per la corrente di carico vale:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{I_{rms}}{I_{dc}}\right)^2 - 1} \times 100\%$$

$$= 100\% \sqrt{\frac{(m/2\pi)\,[(\pi/m) + \operatorname{sen}(\pi/m)\cos(\pi/m)]}{[(m/\pi)\operatorname{sen}(\pi/m)]^2} - 1} \tag{13-65}$$

I valori del fattore di ondulazione calcolati con la (13-65), sono:

m	2	3	4	6	12	∞
fattore di ondulazione..........	0,47	0,17	0,089	0,04	0,014	0
frequenza dell'ondulazione per un'alimentazione a 60 Hz	120	180	240	360	720	∞

L'ondulazione diminuisce rapidamente con il numero delle fasi, e ciò, unitamente al fatto che le frequenze di ondulazione sono più elevate, rende più facilmente filtrabile l'uscita dei circuiti raddrizzatori con sei o più fasi. Inoltre è minore la distorsione della forma d'onda della corrente primaria, e ciò è molto importante in quanto armoniche introdotte nel primario possono dar luogo ad interferenze su linee telefoniche vicine. Si impiegano raddrizzatori a 12, 18, 24 o più fasi, specialmente per alimentare apparecchiature elettrolitiche, come quelle impiegate per la riduzione dell'alluminio.

13-16. Fattore di utilizzazione dei trasformatori.

Gli avvolgimenti dei trasformatori di alimentazione dei circuiti raddrizzatori, generalmente, sono attraversati da correnti solo per frazioni di ciclo e le relative armoniche contribuiscono al riscaldamento del trasformatore che di conseguenza deve essere dimensionato per una potenza maggiore di quella richiesta dalla potenza continua in uscita; le armoniche di corrente contribuiscono quindi ad aumentare il prodotto tensione-corrente senza contribuire in alcun modo alla potenza continua in uscita.

Il fattore di utilizzazione di un trasformatore per raddrizzatore è dato dal rapporto tra la potenza continua in uscita ed il prodotto tensione-corrente assorbita da ciascun avvolgimento; tale fattore stabilisce il rendimento con cui viene utilizzato un dato avvolgimento. Il fattore di utilizzazione è funzione della forma d'onda e del rapporto tra il valore efficace ed il valore medio della tensione. Per esempio, il fattore di utilizzazione di un avvolgimento secondario impiegato in un circuito raddrizzatore monofase ad onda intera, è basso a causa della corrente secondaria a forma di mezza sinusoide. Per tale circuito si ha un valore di 0,574. Per un circuito a ponte monofase con corrente secondaria sinusoidale, il fattore di utilizzazione del secondario ha un valore di 0,813 con carico ohmico.

È possibile determinare, per i circuiti ad m fasi, delle espressioni generali per i fattori di utilizzazione dei secondari e dei primari. Per un circuito raddrizzatore come il triangolo-stella a sei fasi di fig. 13-33, i prodotti tensione -corrente per le fasi secondarie (SVA)* sono ottenibili impiegando l'eq. (13 -64):

$$\text{SVA totale} = m \frac{E_m}{\sqrt{2}} \frac{E_m}{R} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{m} + \text{sen} \frac{\pi}{m} \cos \frac{\pi}{m}\right)} \tag{13-66}$$

La potenza continua è data da I_{dc}^2R, per cui in base all'eq. (13-62) si ricava:

$$P_{dc} = \frac{E_m^2}{R} \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{m} \tag{13-67}$$

* SVA Dall'inglese Secondary Volt Ampère (N.d.T.).

Ne segue che il fattore di utilizzazione secondario (SUF)* è:

$$\text{SUF} = \frac{2[(m/\pi)\ \text{sen}^2\ (\pi/m)]}{\sqrt{\pi[(\pi/m) + \text{sen}\ (\pi/m)\ \cos\ (\pi/m)]}} \tag{13-68}$$

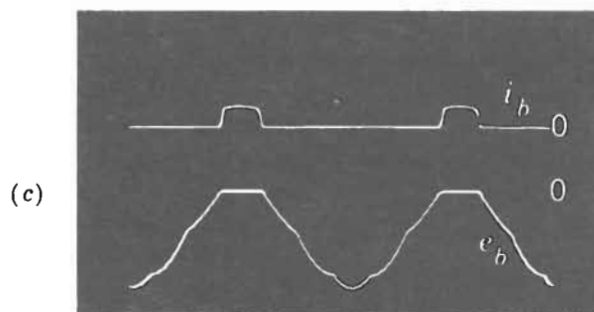
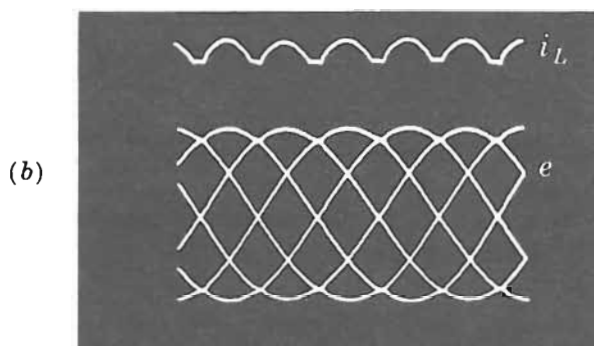
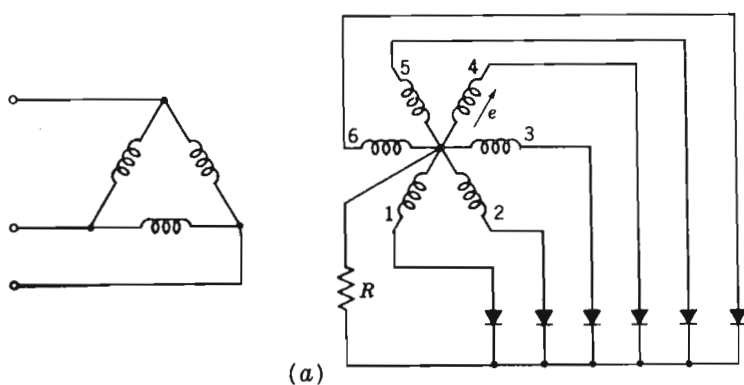



FIG. 13-33. — (*a*) Raddrizzatore esafase. (*b*) Corrente nel carico e tensione rispetto al neutro. (*c*) Corrente e tensione su uno dei diodi.

* SUF Dall'inglese Secondary Utility Factor (N.d.T.).

Dal calcolo del fattore di utilizzazione secondario in funzione di m, si ottengono i seguenti valori tabellati:

m	2	3	4	6	12	24
$2\pi/m$	180	120	90	60	30	15
SUF	0,57	0,675	0,636	0,551	0,399	0,286

Si può osservare che si ha il massimo in corrispondenza di m = 2,7, e cioè da un punto di vista più pratico in corrispondenza di m = 3, ovvero per $2\pi/m = 120^o$. Ne segue che vengono frequentemente impiegati i circuiti a stella trifase per ottenere angoli di conduzione di 120°, con le opportune modifiche onde evitare la saturazione del nucleo, come l'avvolgimento zig-zag, il doppia stella ed i circuiti ramificati che verranno studiati in seguito.

Nei circuiti collegati a stella, in cui la componente continua è bilanciata, come in fig. 13-33, due fasi secondarie sono alimentate da una sola fase primaria. Il valore efficace della corrente nell'avvolgimento primario è dato da:

$$I_{rms} = \sqrt{2}\,\frac{E_m}{R}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{m} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{m}\right)} \qquad (13\text{-}69)$$

ponendo 1 : 1 il rapporto di trasformazione delle tensioni. Se il circuito impiega p fasi primarie, per il primario il prodotto tensione-corrente (PVA)*, è:

$$PVA = \frac{pE_m^2}{R}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{m} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{m}\right)} \qquad (13\text{-}70)$$

Il fattore di utilizzazione primario (PUF)* allora risulta:

$$PUF = \frac{\sqrt{2}\,m}{p}\,\frac{m/\pi\ \operatorname{sen}^2(\pi/m)}{\sqrt{\pi[\pi/m + \operatorname{sen}(\pi/m)\cos(\pi/m)]}} = \frac{m}{\sqrt{2}\,p}\ SUF \qquad (13\text{-}74)$$

La presenza del fattore $1/\sqrt{2}$ è dovuta all'uso di una fase primaria per alimentare due fasi secondarie formanti un angolo di 180°. La tavola 32 fornisce un quadro riassuntivo delle caratteristiche dei circuiti di questo tipo.

* PVA Dall'inglese Primary Volt Ampère (N.d.T.).
** PUF Dall'inglese Primary Utility Factor (N.d.T.).

TABELLA 32 — Dati riassuntivi per circuiti raddrizzatori con carichi ohmici

	1Φ onda intera	3Φ una semionda	3Φ ponte	6Φ doppio-Y	6Φ una semionda
m	2	3	6	6	6
I_{dc}	$0{,}636E_m/R$	$0{,}827E_m/R$	$1{,}65E_m/R$	$1{,}65E_m/R$	$0{,}955E_m/R$
Corrente di picco	$1{,}57I_{dc}$	$1{,}21I_{dc}$	$1{,}21I_{dc}$	$1{,}60I_{dc}$	$1.05I_{dc}$
E_{dc}	$0{,}636E_m$	$0{,}827E_m$	$1{,}65E_m$	$1{,}65E_m$	$0{,}955E_m$
γ %	47	17	4	4	4
PVA/P_{dc}	1,23	1,23	1,05	1,05	1,28
PUF	0,81	0,83	0,95	0,95	0,78
SVA/P_{dc}	1,75	1,50	1,05	1,48	1,82
SUF	0,57	0,67	0,95	0,67	0,55
rendimento massimo teorico, %	81,2	96,5	99,8	99,8	99,8
PIV	$3{,}14E_{dc}$	$2{,}09E_{dc}$	$1{,}05E_{dc}$	$2{,}09E_{dc}$	$2{,}09E_{dc}$

13-17. Circuiti raddrizzatori ad m fasi con carico induttivo.

Nei circuiti raddrizzatori polifasi di potenza generalmente non ha alcuna importanza la piccola ondulazione presente nei circuiti a sei o a più fasi. I filtri vengono impiegati, talvolta, per diminuire l'interferenza con i circuiti telefonici adiacenti alla linea di potenza primaria, piuttosto che per livellare la corrente di carico. In fig. 13-34 è riportato il livellamento otteni-

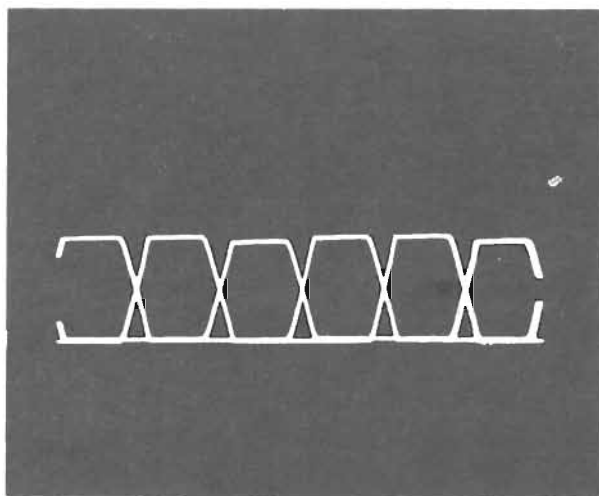



FIG. 13-34. — Impulsi di corrente parzialmente sovrapposti nel carico di un raddrizzatore esafase con carico induttivo.

bile con un piccolo induttore mediante sovrapposizione delle onde alla fine della conduzione di ciascun diodo.

Per carico induttivo si può condurre l'analisi come nel paragrafo precedente, assumendo $I_{rms} = I_{dc}$ nel carico. Tuttavia, si trova che, per valori di m $\geq$ 3, vi è una differenza trascurabile nelle prestazioni e nel comportamento del trasformatore per raddrizzatori con carico ohmico o induttivo, in quanto la corrente di carico ha una forma d'onda prossima a quella ideale rettangolare senza induttanze in serie. I fattori di utilizzazione nei due casi m $\geq$ 3 sono identici, e l'ondulazione ad una frequenza opportunamente alta è solo qualche unità per cento.

13-18. Effetto della reattanza di dispersione.

Finora si è trascurata la reattanza di dispersione dei trasformatori dei circuiti raddrizzatori, e si è supposto che la corrente si interrompa in un diodo, quando un altro inizia a condurre. Invece, per effetto dell'induttanza L_s di dispersione, come in fig. 13-35, la corrente inizia a circolare nel secondo diodo prima che si interrompa nel primo, per effetto della f.e.m. generata in L_s. La corrente complessiva tende a rimanere costante durante l'intervallo di commutazione, cosicchè mentre la corrente erogata da un diodo sul carico aumenta quella dovuta all'altro diodo diminuisce, come risulta dallo oscillogramma di fig. 13-34.

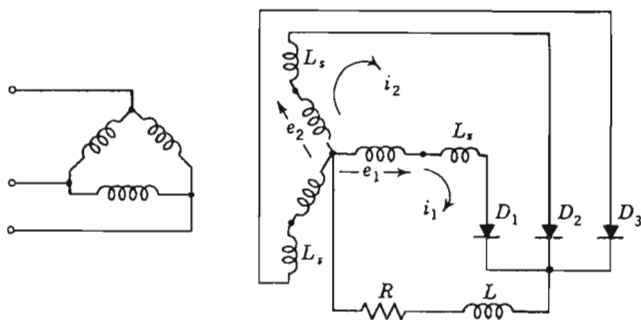



FIG. 13-35. — Circuito completo di reattanze di dispersione L_s.

La corrente commuta tra i due diodi e la tensione, dovuta alla reattanza di dispersione, si sottrae alla tensione del trasformatore, dando luogo ad una minore tensione media sul carico. In fig. 13-36 è riportata la sovrapposizione della corrente ed i suoi effetti sull'ampiezza della tensione.

Supponendo che l'anodo di D_2 sia positivo rispetto al catodo e che si

abbia conduzione prima che D_1 si interdica, si hanno due vie in parallelo tra il neutro ed i catodi in comune dei due diodi, attraverso i due avvolgimenti del trasformatore, per cui:

$$e_1 - L_s \frac{di_1}{dt} = e_2 - L_s \frac{di_2}{dt} = e_{carico} \qquad (13\text{-}72)$$

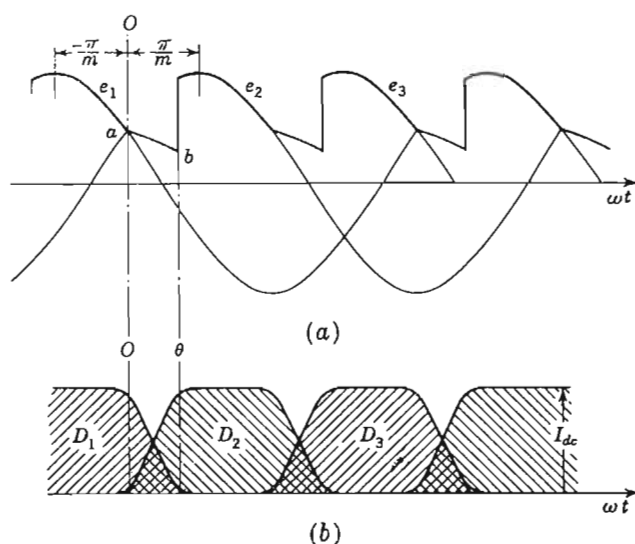



FIG. 13-36. — (*a*) Variazione della forma dell'onda di tensione di un raddrizzatore ad m fasi per effetto delle reattanze di dispersione. (*b*) Forma dell'onda di corrente con sovrapposizioni parziali.

Come si è già detto prima, la corrente complessiva rimane approssimativamente costante, durante il periodo di commutazione:

$$i_1 + i_2 \cong I_{dc}$$

Da ciò segue che:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \cong 0 \qquad (13\text{-}73)$$

e dalla eq. (13-72):

$$e_1 + e_2 - L_s \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) = 2e_{carico} \qquad (13\text{-}74)$$

Applicando l'eq. (17-73), si ha allora:

$$e_{carico} = \frac{e_1 + e_2}{2} \qquad (13\text{-}75)$$

e cioè, la tensione sul carico, durante l'intervallo di commutazione, è la media delle tensioni di fase durante il detto intervallo. Rimane così determinato l'andamento della tensione durante l'angolo θ di sovrapposizione come in fig. 13-36.

Dall'eq. (13-72) si ha:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{e_1 - e_2}{2L_s} \tag{13-76}$$

Durante l'angolo θ di sovrapposizione, ponendo uguale a zero l'istante d'inizio del periodo di sovrapposizione, le tensioni di fase risultano:

$$e_1 = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{m}\right) \qquad e \qquad e_2 = E_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{m}\right)$$

Svolgendo le espressioni dei due coseni e sottraendo l'una dall'altra si ha:

$$e_1 - e_2 = -2E_m \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \operatorname{sen} \omega t \tag{13-77}$$

per cui l'eq. (13-76) diventa:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{E_m}{L_s} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \operatorname{sen} \omega t \tag{13-78}$$

Integrando, si ha:

$$i_1 = \frac{E_m}{\omega L_s} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \cos \omega t + A$$

dove ωL_s è la reattanza di dispersione per fase del trasformatore alla frequenza di alimentazione. Essendo $i_1 = I_{dc}$ per $t = 0$:

$$A = I_{dc} - \frac{E_m}{\omega L_s} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \tag{13-79}$$

e la corrente in D_1 durante la commutazione assume l'espressione:

$$i_1 = I_{dc} - \frac{E_m}{\omega L_s} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} (1 - \cos \omega t) \tag{13-80}$$

Poichè $i_2 \cong I_{dc} - i_1$, si può determinare anche la corrente in D_2 durante la commutazione.

La tensione media durante il periodo di conduzione di D_2, si riduce dal valore:

$$E_{dc} = E_m \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}$$

valido per un raddrizzatore ideale ad m fasi privo di reattanza, al valore:

$$E_{dc} = E_m \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} - \frac{m}{2\pi} \int_0^\theta (e_2 - e_{carico})\, d(\omega t) \tag{13-81}$$

Sostituendo nella equazione precedente la (13-75) e la (13-77) si può risolvere l'integrale, ottenendo:

$$E_{dc} = E_m \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \left(1 - \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) \tag{13-82}$$

L'angolo di commutazione può essere determinato notando che per $t = 0$, $i_1 = I_{dc}$ nell'eq. (13-80):

$$\theta = \operatorname{arc\,cos} \left[1 - \frac{\omega L_s I_{dc}}{E_m \operatorname{sen}(\pi/m)}\right] \tag{13-83}$$

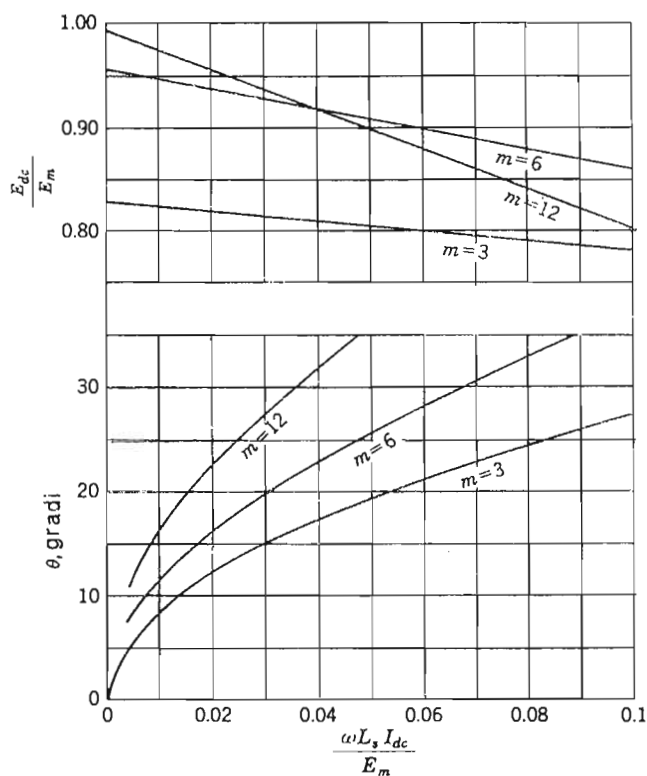



FIG. 13-37. — Curve di regolazione e dell'angolo di sovrapposizione in funzione della corrente di carico.

La sostituzione dell'eq. (13-83) nell'eq. (13-82) conduce alla relazione:

$$E_{dc} = E_m \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} - \frac{m}{\pi} \frac{\omega L_s I_{dc}}{2} \tag{13-84}$$

Per cui la tensione continua per un raddrizzatore ideale diminuisce linearmente con la corrente per effetto del secondo termine a secondo membro, dovuto alla reattanza del trasformatore.

In fig. (13-37), si nota che l'angolo di sovrapposizione varia da 10° ad oltre 30°. Per un circuito raddrizzatore dodecafase, dove l'angolo di conduzione è di 30°, la curva indica che un terzo diodo dovrebbe iniziare a condurre prima che il primo si interdica, ma i risultati dell'analisi svolta in questo paragrafo, non sono applicabili qualora vi siano più di due diodi contemporaneamente in conduzione.

13-19. Il circuito a ponte trifase.

Il circuito di fig. 13-38 è una modificazione del circuito a ponte; talvolta viene anche chiamato circuito trifase ad onda intera. Ciascun avvolgimento se-

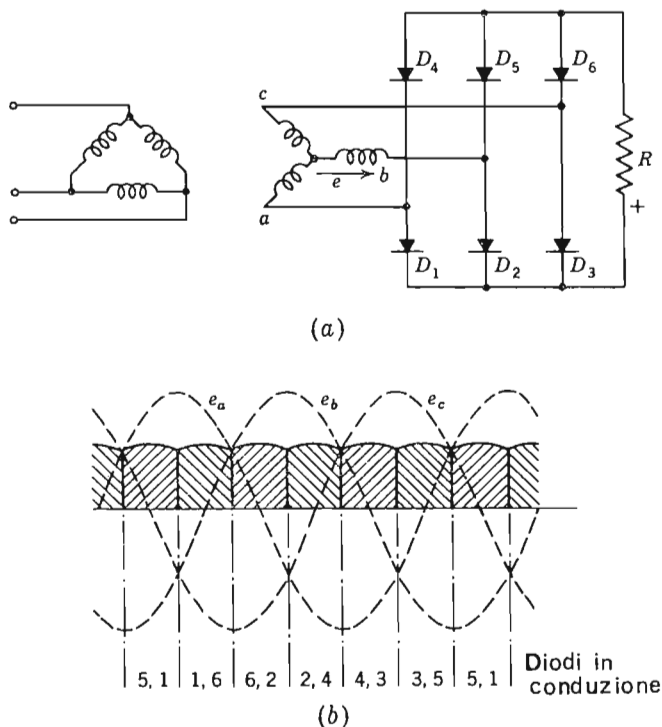



FIG. 13-38. — (a) Raddrizzatore trifase a ponte ovvero ad onda intera. (b) Tensione rispetto al neutro e corrente di carico.

condario conduce corrente per entrambi i semiperiodi il che eleva il valore del fattore di utilizzazione del trasformatore.

Dalla fig. 13-38 *b*, che rappresenta gli impulsi di corrente, si può osservare che, mentre la fase *a* è positiva, D_1 conduce per 120°, risultando, durante i primi 60°, in serie con D_5, il cui catodo è il più negativo nella fase *b*, e durante i secondi 60°, in serie con D_6, il cui catodo è ora il più negativo nella fase *c*.

La forma della corrente nel carico è la stessa di quella che si ha per un raddrizzatore esafase, per cui sono applicabili le relazioni circuitali generali con m = 6. È da notare però che E_{dc} risulta $\sqrt{3}$ volte più grande di quella calcolata con la formula generale se E_m è la tensione di fase; si ha quindi in definitiva $E_{dc} = 1{,}65\ E_m$.

La tensione inversa di picco, valutata dalle forme d'onda di tensione, risulta 1,732 E_m. Inoltre, poichè i secondari del trasformatore non sono attraversati da alcuna componente continua di corrente, non potrà sorgere alcuna difficoltà connessa con la saturazione magnetica del nucleo.

13-20. Circuiti raddrizzatori a doppio Y.

Il circuito di fig. 13-39 *a* impiega due circuiti trifase, sfasati di 60° e connessi in parallelo tramite un trasformatore interfase che collega i due centro stella. In ciascun istante due diodi sono contemporaneamente in conduzione, uno per ciascun gruppo come risulta dalla fig. 13-39 *b*; si noti che l'ondulazione della corrente di carico è pari a quella che si ha per un esafase.

Una piccola corrente circola, attraverso il trasformatore interfase, dal suo punto mediano verso la stella che si trova al potenziale istantaneo più elevato; ciascuna stella si trova ad un potenziale più alto dell'altra tre volte per ciclo. La corrente del trasformatore interfase ha una frequenza tripla di quella di alimentazione, come è mostrato dall'andamento di e_T, ed induce una tensione che si oppone a quella della stella a più alto potenziale mentre si somma a quella della stella a più basso potenziale.

Se non vi fosse il trasformatore interfase, il circuito sarebbe un normale esafase connesso a stella e con un angolo di conduzione di 60°; qualora la corrente di carico diventasse minore della corrente di eccitazione del trasformatore interfase, il sistema si trasformerebbe in un raddrizzatore esafase con un aumento di tensione del 15 per cento.

Con un'induttanza di carico, ciascuna metà del reattore interfase conduce la metà della corrente di carico, cosicchè il valore efficace della corrente del reattore risulta:

$$I_{rms} = 0{,}5 I_{dc}$$

La tensione sul trasformatore interfase risulterà eguale alla differenza tra le tensioni dei due centri, e cioè:

$$E_{picco} = 0{,}5E_m$$

essendo E_m la tensione di una fase. L'eq. (13-63), con m = 6 fornisce: $E_{dc} = 0{,}826\ E_m$. La potenza in volt-ampere del trasformatore interfase è allora:

$$VA = \frac{E_{picco}I_{rms}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}5E_m}{\sqrt{2}}\ \frac{I_{dc}}{2} = 0{,}214E_{dc}I_{dc}$$

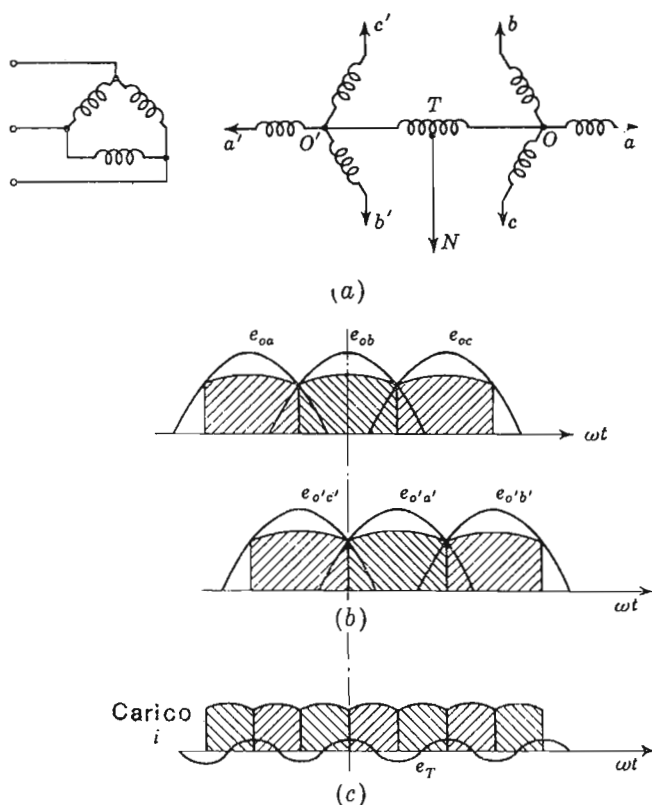



FIG. 13-39. — (*a*) Raddrizzatore esafase a doppio Y. (*b*) Forme d'onda della corrente nei diodi. (*c*) Corrente di carico e tensione interfase.

La componente continua si annulla e solo le componenti alternative compaiono nella tensione sul trasformatore.

Una connessione esafase a doppio Y in parallelo è riportata in fig. 13-40 *a*.

In tal caso si utilizzano due trasformatori interfase con i relativi neutri in parallelo. In fig. 13-40 *b* è rappresentata un'ulteriore connessione con un trasformatore interfase a tre avvolgimenti, che forza il tubo a condurre con un angolo di 180°. Questo circuito dà luogo ad un numero minore di commutazioni per ciclo, e quindi la caduta di tensione dovuta alla reattanza del trasformatore è solo quattro noni di quella che si ha per un doppio Y esafase.

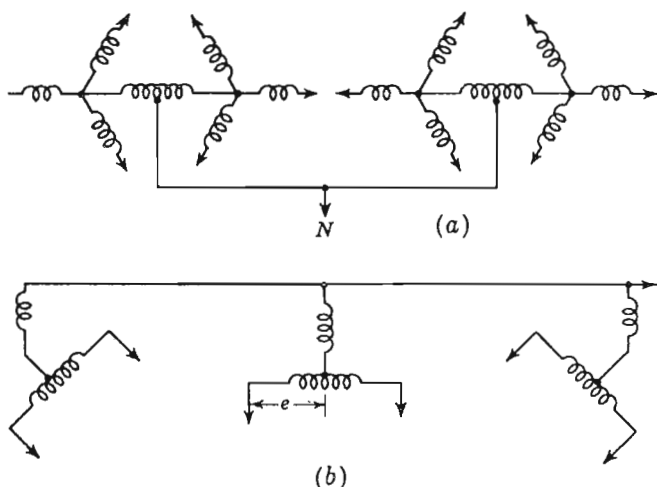



Fig. 13-40. — (*a*) Esafase parallelo a doppio Y. (*b*) Triplo esafase con connessione diametrale per conduzione di 180°.

Nella maggior parte delle grosse apparecchiature con circuiti raddrizzatori si utilizzano varianti del sistema di connessioni a doppio Y, in quanto con tale sistema si realizzano angoli di conduzione prossimi al valore ottimo ed inoltre diminuisce il numero di commutazioni per ciclo.

13.21. Circuiti polifasi con connessioni ramificate.

Precedentemente si è osservato che il circuito trifase ad una semionda è affetto da saturazione in continua del nucleo del trasformatore e che quindi è usato raramente.

Un circuito modificato che evita la saturazione è il circuito con la connessione trifase a zig-zag rappresentato in fig. 13-41 *a*. Sullo stesso nucleo si avvolgono in senso inverso le metà degli avvolgimenti relativi a due fasi diverse, in modo che le componenti continue I_{dc} circolando in senso inverso neutralizzano in ciascun nucleo la componente continua della forza magne-

tomotrice. D'altronde poichè la tensione anodica e è prelevata tra due avvolgimenti ciascuno dei quali presenta una tensione pari a 0,575 e, il trasformatore ha un fattore di utilizzazione più basso.

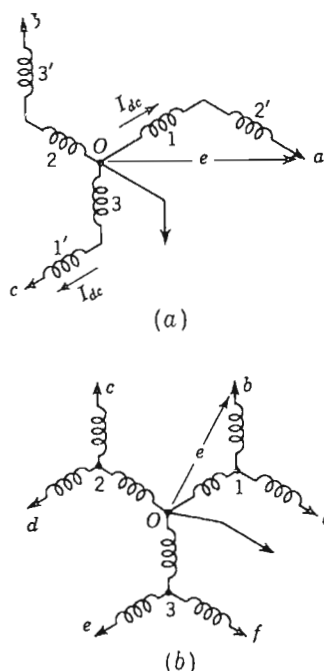



FIG. 13-41. — Connessione trifase a zig-zag. (*b*) Raddrizzatore esafase ramificato.

Sono molto comuni anche i circuiti a più rami come quello di fig. 13-41 *b*, che risulta essere un esafase realizzato in modo del tutto simile al circuito trifase a zig-zag. In tale circuito tre avvolgimenti secondari, 0-1, 3-e, 2-d avvolti sullo stesso nucleo, assorbono potenza da una sola fase primaria. Bisogna notare che l'avvolgimento secondario 0-1 porta due impulsi di corrente di 60° per ciascun impulso portato sia da 3-e che da 2-d; questo significa che i secondari 0-1, 0-2, 0-3 devono avere un prodotto tensione-corrente 1,41 volte più grande di quello degli avvolgimenti secondari ramificati. Il sistema di connessione migliora quindi l'utilizzazione e permette l'uso di trasformatori più piccoli.

Si possono evidentemente eseguire ulteriori ramificazioni a partire da *a, b, c, d, e, f* in modo da realizzare il numero di fasi desiderato.

13-22. Prestazioni.

Nei paragrafi precedenti si è discusso per vari circuiti del rendimento teorico di rettificazione e della sua dipendenza delle forme d'onda della corrente di carico, trovando che, quando il raddrizzatore ha un numero elevato di fasi, il rendimento teorico si approssima al 100 per cento. In effetti il rendimento si riduce ai valori superiori al 90 per cento se si tiene conto delle perdite nel ferro del trasformatore, nel rame e nel diodo.

La curva del rendimento di un circuito raddrizzatore (fig. 13-42) è quasi piatta a partire da un quarto del pieno carico fino a valori superiori a quelli del pieno carico stesso. Per bassi valori del carico le perdite nel diodo variano proporzionalmente e quelle nel rame secondo il quadrato della corrente continua di carico. Poichè d'altra parte le perdite nel ferro sono basse e quasi indipendenti dal carico, si può affermare che il rendimento per piccoli carichi è elevato. Le perdite, includendo quelle nel rame del trasformatore e nel diodo, provocano quindi ai valori elevati di corrente di carico un abbassamento della curva del rendimento.

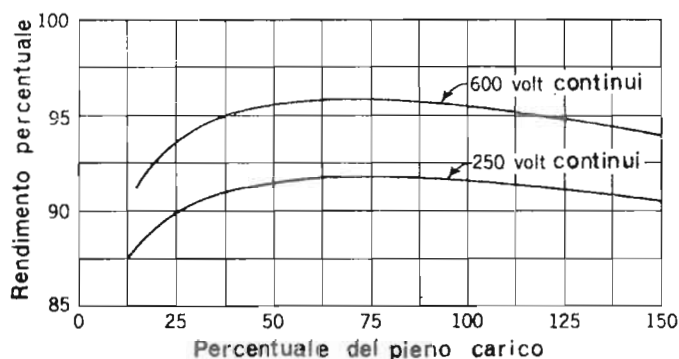



FIG. 13-42. — Curve di rendimento per un tipico raddrizzatore.

Il fattore di potenza di un circuito raddrizzatore è inferiore all'unità, a causa della corrente magnetizzante del trasformatore, delle armoniche di corrente nel carico e della reattanza trasformatorica; quest'ultima prevale ai carichi normali.

Utilizzando i fattori già calcolati per i circuiti precedenti è possibile calcolare la regolazione di tensione. La diminuzione di tensione è dovuta infatti alla caduta ohmica sulla resistenza del rame del trasformatore, alla caduta

sulla reattanza del trasformatore ed alla caduta sul diodo. Per esempio, la tensione di uscita di un raddrizzatore connesso a stella, vale:

$$E_{carico} = E_m \frac{m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} - \frac{m}{\pi} \frac{XI_{dc}}{2} - \frac{P_c}{I_{dc}} - E_o \qquad (13\text{-}85)$$

dove X, espressa in ohm, è la reattanza di commutazione del trasformatore; P_c, espresso in watt, è la potenza dissipata nel rame del trasformatore; E_o è la caduta sul diodo raddrizzatore.

Generalmente le cadute di tensione per i raddrizzatori sono comprese tra il 4 e il 6 per cento passando da pieno a basso carico.

I diodi di potenza a giunzione presentano nelle caratteristiche le stesse limitazioni già viste nel paragrafo 13-13 per i diodi a più basse correnti. I limiti usuali sono la massima corrente media o continua e la massima tensione di picco; a questi si possono aggiungere il valore della corrente di picco permesso per mantenere in limiti di sicurezza la temperatura delle giunzioni e dei contatti. Inoltre risulta di considerevole importanza *il massimo valore ammissibile di corrente di picco non ricorrente*; questa limitazione interessa

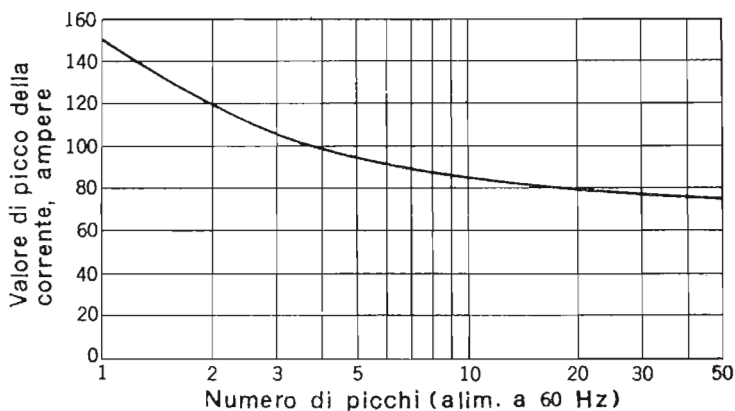



FIG. 13-43. — Corrente diretta di picco non ripetitiva per un diodo al silicio.

le condizioni di innesco con carico capacitivo, l'avviamento di un motore in continua alimentato con raddrizzatori, ed altri transitori. Il diagramma di fig. 13-43 costituisce un esempio interessante di questo tipo di limitazione per un particolare diodo. Il punto corrispondente ad 1 ciclo indica che ad una frequenza di 60 Hz è possibile ottenere una sola semisinusoide con un picco di 150 ampere, mentre il punto corrispondente a 20 cicli mostra che è possibile ottenere ben 20 semisinusoidi successive con un picco di 80 ampere.

Limiti compresi tra 150 e 200 °C sono normali per i diodi al silicio; il germanio è raramente usato nelle applicazioni industriali in quanto i suoi limiti di temperatura risultano molto prossimi alle normali temperature degli ambienti industriali.

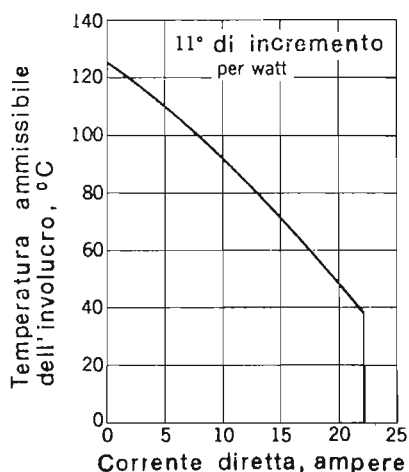



FIG. 13-44. — Corrente media limite in funzione della temperatura dell'involucro; 22 ampere di massimo valore medio per una temperatura massima di 125°.

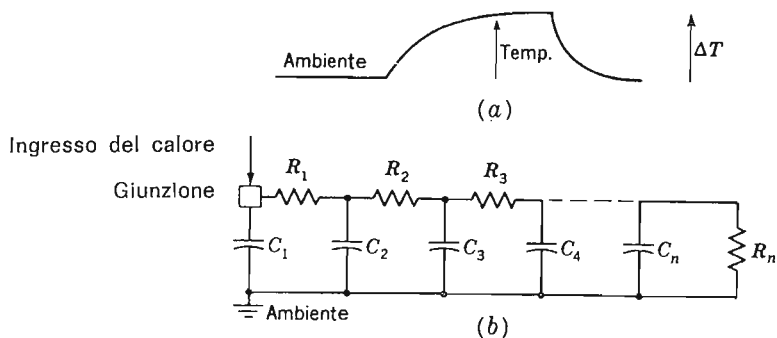



FIG. 13-45. — Circuito termico per un raddrizzatore a giunzione.

In fig. 13-44 si è riportato l'andamento del limite di corrente media in funzione dell'aumento di temperatura che si ha per una data resistenza termica del montaggio. In realtà un raddrizzatore al silicio è un circuito termico di bassa capacità termica; tanto bassa che la temperatura della giun-

zione può variare durante un ciclo della tensione di alimentazione. Tuttavia se si monta il dispositivo su un radiatore di calore o su una placca atta a dissipare il calore per conduzione e convenzione si riescono ad ottenere costanti di tempo termiche di alcuni minuti. Il circuito termico può essere rappresentato in fig. 13-45, dove si è considerata solo la giunzione trascurando i contatti e le altre perdite. Se ora si applica un impulso di calore a gradino P, la temperatura della giunzione subisce un incremento dipendente dalla rete in derivazione. Dopo un tempo sufficientemente lungo, la temperatura

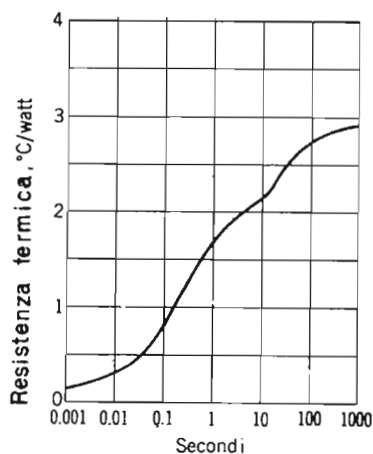



FIG. 13-46. — Transitorio della resistenza termica per un raddrizzatore montato su una piastra di 10 × 10 × 0,2 cm.

della giunzione si stabilirà ad un livello superiore alla temperatura ambiente di $\Delta T = P\theta$ ove θ rappresenterà la resistenza termica del montaggio $\Delta T/P$. Questo è il normale comportamento di un raddrizzatore a semiconduttore. Si riporta infine in fig. 13-46, l'andamento di θ in funzione del tempo e della temperatura.

13-23. Raddrizzatori a selenio e ad ossido di rame.

Prima che fossero ben note le proprietà semiconduttrici del germanio e del silicio, si sono realizzati un notevole numero di raddrizzatori che impiegavano selenio ed ossido di rame. Questi raddrizzatori vengono realizzati depositando uno strato di semiconduttore su una base metallica; la resistenza diretta o di basso valore si presenta se il semiconduttore è polarizzato positivamente. Il raddrizzatore al selenio, ampiamente impie-

gato nei circuiti elettronici prima che si scoprisse l'attitudine del silicio ad essere utilizzato in dispositivi di potenza, è realizzato per deposizione di selenio su una base di ferro o di alluminio. Ogni elemento può sopportare fino a 26 Volt di tensione inversa e può lavorare fino a 85 °C. In fig. 13-47 è riportata una caratteristica tensione-corrente per un raddrizzatore al selenio.

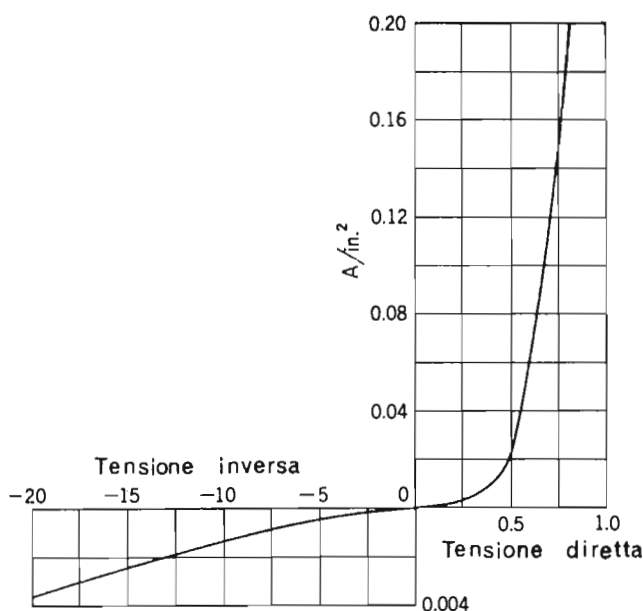



FIG. 13-47. — Caratteristica tensione-corrente per un rettificatore a selenio.

I raddrizzatori rame-ossidulo di rame vengono realizzati mediante una ossidazione controllata ad alta temperatura. I dischi sono montati su supporti isolati, usando terminali ad anello per assicurare una grande superficie di contatto. Ciascun disco è caratterizzato da una tensione inversa di 8 volt e da una temperatura massima di lavoro di circa 45 °C; per tensioni più elevate i dischi vengono disposti in serie.

Tutti questi dispositivi ormai sono stati sostituiti da più efficienti unità al germanio ed al silicio.

13-24. La ionizzazione nei gas.

La conduzione attraverso un gas è possibile in quanto gli elettroni più esterni di un atomo sono legati piuttosto debolmente al relativo nucleo e questo sia per la distanza a cui si trovano rispetto al nucleo stesso sia per l'effetto schermante degli elettroni più interni. Se gli elettroni liberi di un gas

sono dotati di sufficiente energia, essi, urtando contro una molecola del gas, possono strapparne uno degli elettroni più esterni. Gli elettroni rimangono liberi e l'atomo diventa un *ione* con una carica unitaria positiva. Per *ionizzare* un atomo si richiede una determinata quantità di energia sufficiente ad allontanare un elettrone negativo dal campo del nucleo positivo; questa energia, espressa in elettrone-volt, è chiamata *potenziale di ionizzazione* del gas Nella tabella 33 sono riportati i potenziali di ionizzazione di alcuni gas. La teoria di Bohr postula l'esistenza di molti possibili livelli di energia per gli elettroni di un atomo; quando gli atomi in una collisione ricevono una quantità di energia inferiore a quella di ionizzazione, alcuni elettroni possono passare dai loro stati normali a quelli più alti. Quando un elettrone, attirato da un ione si ricombina con esso per formare un atomo neutro, o quando un elettrone eccitato si riporta ad un livello di energia più basso, dall'elettrone stesso viene emessa dell'energia o sotto forma di radiazione elettromagnetica o sotto forma di luce la cui frequenza è legata all'energia dalla equazione di Planck:

$$W = hf \tag{13-86}$$

TABELLA 33 — Potenziali di ionizzazione

Gas o vapore	Potenziale di ionizzazione ev	Colore della scarica
Argo	15,7	Blu
Elio	24,5	Giallo
Mercurio	10,4	Verde-Blu
Sodio	5,1	Giallo
Neon	21,5	Arancione

All'effetto cumulativo delle singole emissioni di luce è dovuta la linea spettrale emessa da un gas ionizzato e la luminescenza di colore caratteristico.

Nella *scarica luminosa*, un catodo, del tipo a rivestimento di ossidi, costituisce la sorgente degli elettroni ionizzanti, i quali vengono emessi per effetto secondario, procurato dal bombardamento degli ioni positivi creati nel gas.

Una caratteristica della luminescenza, che avvolge la superficie catodica, è il fatto che la corrente per unità di area rimane praticamente costante in un vasto campo.

Nella *scarica ad arco*, la sorgente degli elettroni può essere o un catodo riscaldato, come nell'arco termoionico, o un pozzetto di mercurio, dal quale avviene l'emissione per l'elevata intensità del campo elettrico che si crea in prossimità della superficie del mercurio stesso.

Poichè inizialmente non è presente alcun ione positivo, la tensione nel tubo aumenta in un primo tempo fino al valore di *rottura* per poter accelerare

gli elettroni fino alla velocità di ionizzazione, e poi, una volta che si sia stabilita la ionizzazione, crolla improvvisamente ad un valore prossimo al potenziale di ionizzazione.

Per il vapore di mercurio, il valore di rottura può variare tra i 15 ed i 20 Volt; con i normali tubi i potenziali di lavoro o *le cadute di tensione nel tubo* variano tra i 10 ed i 12 Volt, a seconda del tipo di catodo. In fig. 13-48 si è riportata la caratteristica tensione-corrente per il fenomeno della scarica in un gas.

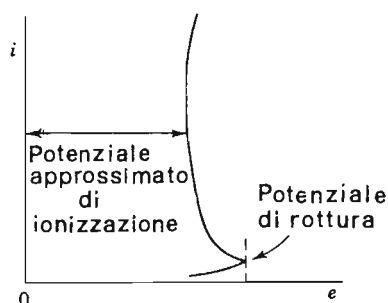



FIG. 13-48. — Caratteristica tensione-corrente per il fenomeno della scarica in un gas.

13-25. La scarica ad arco.

La scarica ad arco in un gas avviene tra un anodo di carbone o metallico ed un catodo chiusi in un involucro contenente del gas ad una pressione variabile tra qualche micron e pochi millimetri di mercurio. I catodi o sono costituiti da un pozzetto di mercurio o sono di tipo termoionico. I gas comunemente impiegati sono vapore di mercurio per applicazioni di grande potenza, dato il basso potenziale di ionizzazione, o argo, xeno, idrogeno per le applicazioni per le quali si richieda indipendenza delle caratteristiche dalla temperatura.

La scarica ad arco crea una ionizzazione intensa, e gli ioni positivi, per la loro bassa mobilità, neutralizzano completamente la carica spaziale negativa elettronica, dando luogo ad una piccola caduta di tensione per correnti elevate. Il tempo intercorrente tra la ionizzazione del primo atomo e la formazione completa dell'arco può essere di 10 μs o meno.

Gli ioni positivi vengono attratti dal catodo negativo e creano, intorno ad esso, una carica spaziale positiva ovvero uno *schermo*. Le linee del campo elettrico partendo dal catodo terminano praticamente quasi tutte in corrispondenza di queste cariche positive; ben poche linee giungono all'anodo cosicchè l'intensità del campo elettrico è bassa oltre lo schermo. Nello spazio

compreso tra schermo ed anodo si forma il cosiddetto *plasma*, che è composto di un egual numero di ioni positivi e di elettroni che si muovono a caso ma con una piccola componente della velocità diretta verso gli elettrodi. Un elettrone, nel passare attraverso lo schermo, deve necessariamente acquistare energia sufficiente a sostenere la scarica, ne segue che la caduta di potenziale catodo-schermo risulta praticamente uguale al potenziale di ionizzazione del gas. Inoltre, essendo piccola l'intensità di campo nel plasma, la caduta di tensione totale è poco maggiore del potenziale di ionizzazione.

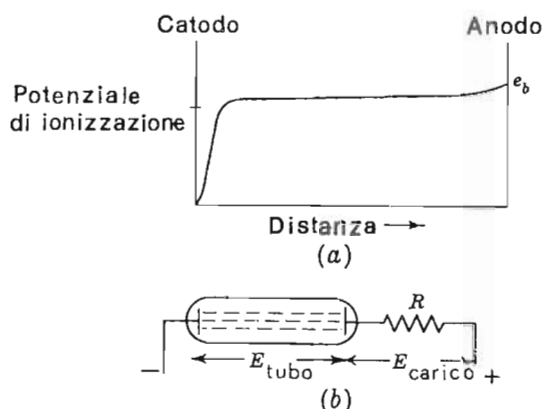



FIG. 13-49. — (*a*) Distribuzione di potenziale nel tubo (*b*) contenente un gas.

In fig. 13-49 è riportata la tipica distribuzione di potenziale presente in un tubo contenente un gas. Se la tensione sul tubo diminuisce leggermente, decresce anche la produzione di ioni e quindi la corrente; ne segue che la tensione sul carico si riduce mentre si innalza la tensione ai capi del tubo. Ma l'aumento della tensione sul tubo comporta un incremento della produzione di ioni ed una riduzione della intensità della carica spaziale negativa con ritorno della tensione sul tubo verso i valori normali. Questo descritto è un meccanismo molto sensibile per cui il potenziale del tubo risulta in definitiva indipendente dalla intensità della corrente.

13-26. Il catodo nella scarica nei gas.

La maggior parte dei catodi termoionici impiegati nei tubi a gas sono del tipo a rivestimento di ossidi presentando questi un alto rendimento di emissione.

Se si applica la tensione anodica contemporaneamente alla tensione di alimentazione del riscaldatore dei filamenti, si avrà un aumento del potenziale anodo-catodo non essendo possibile ottenere la normale corrente di

emissione. Conseguentemente il catodo verrà bombardato da ioni positivi pesanti e dotati di energia cinetica sufficiente a distruggerne il rivestimento di ossidi. La caduta di tensione presente nel normale funzionamento del tubo, è senz'altro inferiore a quella di danneggiamento; questo implica che non è possibile utilizzare l'emissione secondaria come sorgente addizionale di elettroni e che i catodi devono essere progettati con una superficie di emissione tanto ampia da fornire la massima corrente stabilita per il tubo.

Per evitare il danneggiamento del catodo è sempre necessario disporre in serie al tubo a gas una resistenza sufficientemente grande per limitare la corrente ad un valore di sicurezza.

Alle basse temperature, può accadere che gli ioni del gas non siano sufficienti a neutralizzare la carica spaziale. Poichè anche il tal caso il bombardamento ionico può causare il danneggiamento del catodo, per le applicazioni a basse temperature è necessario, talvolta, un riscaldamento esterno del tubo.

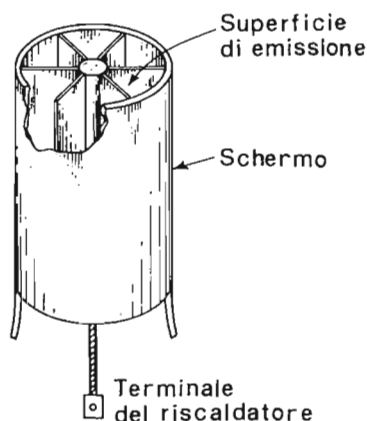



FIG. 13-50. — Catodo schermato.

Nei tubi a gas è possibile disporre intorno ad catodo uno schermo termico cilindrico perchè gli ioni positivi riescono a neutralizzare egualmente tutta la carica spaziale. Lo schermo riduce le perdite di calore per irraggiamento ed è necessaria una minore potenza di riscaldamento per milliampere emesso, ovvero si realizza un migliore rendimento di emissione. In fig. 13-50 è riportato uno schema di catodo schermato.

È possibile ottenere emissione di elettroni anche da un catodo del tipo a pozzetto di mercurio se si riesce a formare sulla superficie del mercurio una *macchia catodica* che emetta elettroni. Questa macchia catodica viene formata facendo scoccare una scintilla sulla superficie del mercurio. La scin-

tilla produce i primi ioni positivi ed elettroni i quali, se l'anodo è positivo rispetto al catodo, vengono accelerati e producono ulteriori ioni, che, neutralizzando la carica spaziale, stabiliscono un arco. La macchia catodica deve essere formata ogni qual volta si inizia la conduzione.

Gli ioni positivi non possono evidentemente danneggiare il pozzetto catodico con il bombardamento per cui è necessario limitare le correnti di picco per motivi di riscaldamento e non di emissione catodica. La caduta di tensione nel tubo risulta generalmente più alta che con un catodo di tipo termoionico in quanto l'energia corrispondente alla funzione lavoro deve essere fornita dalla caduta di tensione sul tubo invece che dal circuito di riscaldamento del catodo.

La temperatura ambiente di lavoro per i tubi a vapore di mercurio varia tra i 20 ed i 60 °C a cui corrispondono pressioni di vapore di 0,001 e 0,1 mm di mercurio.

In fig. 13-51 è riportata la caduta di tensione sul tubo in presenza di carico per tubi con catodo sia di tipo termoionico che a pozzetto.

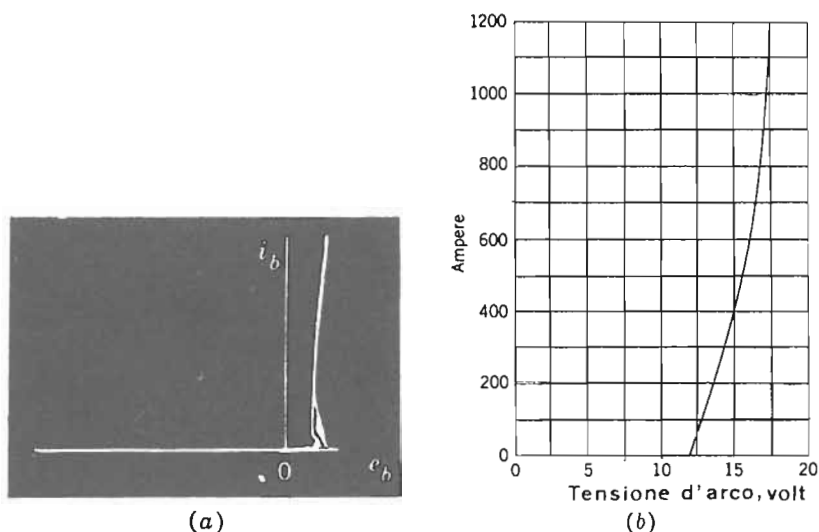



FIG. 13-51 — (*a*) Andamento della caduta di tensione sul tubo tipo 866, a catodo caldo, in funzione della corrente. (*b*) Andamento della caduta di tensione sul tubo tipo 5555, con catodo a mercurio, in funzione della corrente. - Corrente di picco 1200 A.

13-27. Circuito raddrizzatore ad una semionda con diodo a gas.

Dalla fig. 13-51 risulta che la caduta di tensione sul tubo, per un diodo a gas, varia solo leggermente al variare della corrente di lavoro. D'altra parte, essendo generalmente la tensione di rottura superiore solo di pochi volt alla caduta sul tubo, non si commette grande errore se si assume la tensione di rottura uguale alla caduta di tensione sul tubo e quest'ultima costante e

pari ad E_o indipendentemente dalla corrente. Entrambe queste assunzioni portano alla caratteristica ideale di fig. 13-52.

Per il circuito di fig. 13-52 *b*, durante l'intervallo di conduzione e per $e = E_m$ sen ωt, la corrente vale:

$$i_b = \frac{E_m \text{ sen } \omega t - E_o}{R} \tag{13-87}$$

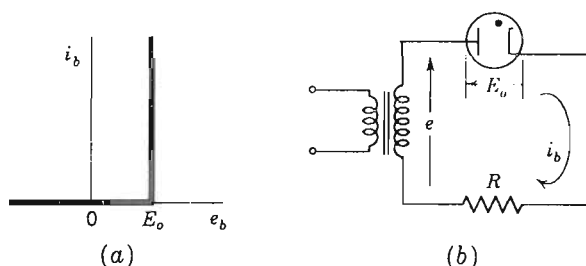



FIG. 13-52. — (*a*) Caratteristica tensione-corrente per un diodo a gas ideale. (*b*) Raddrizzatore ad una semionda.

Evidentemente non è possibile avere valori di corrente inversa o negativa, per cui i_b deve risultare nulla in corrispondenza di tutti i valori negativi del numeratore. La conduzione inizia o termina quando il numeratore si annulla, per cui l'angolo di innesco è dato da:

$$\alpha_1 = \text{arc sen } \frac{E_o}{E_m} \tag{13-88}$$

e l'angolo di interdizione da:

$$\alpha_2 = \pi - \text{arc sen } \frac{E_o}{E_m} \tag{13-89}$$

In questo caso quindi l'angolo di conduzione risulta $\pi - 2\alpha_1$. In fig. 13-53 sono indicati sia α_1 che α_2. Osservando l'eq. (13-87) o la forma della onda di fig. 13-53 *b*, si nota come la forma d'onda della corrente sia rappresentata dalla parte superiore di una sinusoide, a cui si sia sottratto il valore E_o/R.

La componente media o continua può essere ricavata dalla relazione:

$$I_{dc} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i_b \, d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_m \text{ sen } \omega t - E_o}{R} \, d(\omega t)$$

sostituendo ai limiti α_1 ed α_2 i corrispondenti valori si ha:

$$I_{dc} = \frac{E_m}{\pi R}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{E_o}{E_m}\right)^2} - \frac{E_o}{E_m} \text{ arc cos } \frac{E_o}{E_m}\right] \tag{13-90}$$

Se si aumenta la tensione applicata, E_m diventa notevolmente più grande di E_o che normalmente oscilla tra 10 e 15 volt; di conseguenza risulta trascurabile il rapporto E_o/E_m, e l'angolo di conduzione si approssima ai 180 °C. Contemporaneamente sia I_{dc} che E_{dc} aumentano e si avvicinano ai valori:

$$I_{dc} = \frac{E_m}{\pi R} \qquad E_{dc} = \frac{E_m}{\pi}$$

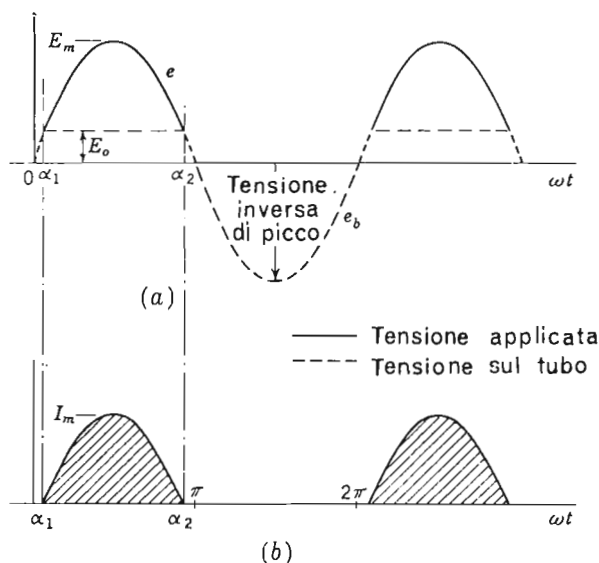



FIG. 13-53. — (*a*) Forma dell'onda di tensione. (*b*) Forma dell'onda di corrente.

che sono i valori precedentemente ottenuti per un diodo ideale. Nella maggior parte delle applicazioni dei tubi a gas, in cui il rapporto E_o/E_m risulta piccolo, si possono trascurare gli angoli α_1 ed α_2, e si può studiare il diodo a gas con i metodi considerati nei precedenti paragrafi. Per valori apprezzabili di E_o/E_m, si può utilizzare la fig. 13-55 per stimare la correzione da apportare.

La potenza dissipata nel diodo deve essere irradiata o asportata mediante un sistema di raffreddamento. Queste perdite si possono calcolare nel modo seguente:

$$P_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_b i_b \, d(\omega t) = \frac{E_o}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_m \operatorname{sen} \omega t - E_o}{R} d(\omega t) \qquad (13\text{-}91)$$

in cui il fattore $e_b = E_o$ è stato portato fuori dell'integrale perchè è costante.

Si osservi che l'integrale è quello che dà l'espressione della corrente media, per cui si può scrivere

$$P_p = E_o I_{dc} \tag{13-92}$$

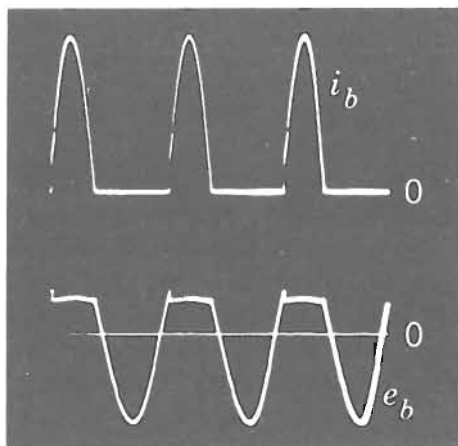



FIG. 13-54. — Corrente e tensione sul diodo per il diodo a gas a catodo caldo tipo 872. Si notino le piccole sovratensioni dovute alla tensione di rottura.

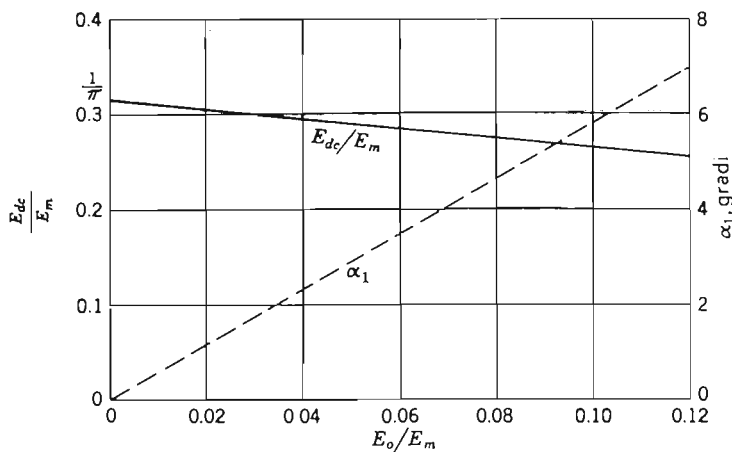



FIG. 13-55. — E_{dc}/E_m ed α_1 in funzione di E_o/E_m.

quantità che è indipendente dalla forma d'onda della corrente e dall'angolo di conduzione.

Non è possibile servirsi di un normale voltmetro per leggere E_0 in un raddrizzatore in funzionamento normale. Osservando però che $E_0 = P_p/I_{dc}$, è possibile leggere le perdite nel tubo mediante un wattmetro e quindi determinare la caduta di tensione ai capi del tubo in funzionamento normale.

Il diodo a gas viene usato nei circuiti del tipo esaminato in precedenza in questo capitolo.

13-28. Funzionamento in parallelo dei diodi a gas.

In figura 13-56 *a* sono riportate le curve tensione-corrente ideali, relative a due diodi a gas le cui cadute interne siano E_{01} ed E_{02}. Se questi due tubi sono connessi in parallelo, la tensione all'inizio di ciascun periodo aumenta fino a raggiungere la tensione di innesco E_{01}; a partire da questo istante il tubo 1 conduce, e poichè la tensione ai capi del parallelo dei due tubi non può superare il valore E_{01}, il tubo T_2 non condurrà mai. Cioè il tubo a tensione di innesco più bassa porterà tutta la corrente.

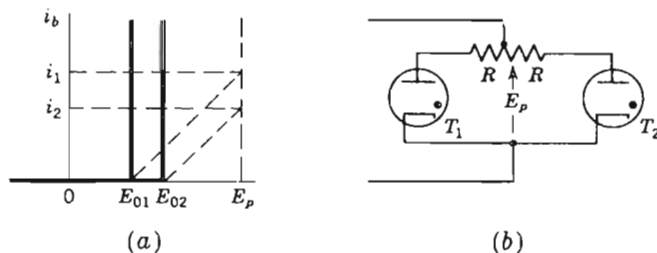



FIG. 13-56. — (*a*) Caratteristiche tensione-corrente per due diodi a gas ideali in parallelo. (*b*) Circuito per il funzionamento in parallelo.

Se si collega un piccolo resistore in serie a ciascun anodo, ciascuna caratteristica si trasforma nella retta inclinata, tratteggiata in fig. 13-56 *a*.

In corrispondenza di una certa tensione E_p, superiore a quella di innesco di ciascun tubo, anche il tubo T_2 andrà in conduzione ed il carico si dividerà fra i due tubi che porteranno rispettivamente le correnti i_1 ed i_2 con la stessa tensione di alimentazione E_p.

Le cadute di tensione interne possono variare da tubo a tubo, anche di 6 ÷ 8 volt; il loro funzionamento in parallelo sarà soddisfacente se ai capi di R si ha questa caduta di tensione, in corrispondenza della corrente che circola in ciascun tubo.

13-29. Tubi stabilizzatori di tensione (VR) *.

Numerose apparecchiature elettroniche funzionano correttamente solo se sono alimentate a tensione costante, indipendente sia da variazioni della tensione di rete, sia da variazioni del carico.

Perciò sono stati studiati numerosi componenti e circuiti, capaci di stabilizzare la tensione che si ottiene all'uscita dei gruppi raddrizzatore-filtro.

Un semplice stabilizzatore di tensione, adatto a carichi variabili non superiori a 40 mA, è il tubo a gas a catodo freddo. Questo dispositivo lavora nella regione della sua caratteristica tensione-corrente, in cui si ha la scarica luminosa, ma a correnti inferiori a quelle per cui scocca l'arco. A queste basse correnti, la caduta di tensione è praticamente costante ed il catodo è parzialmente coperto da una scarica luminosa a densità di corrente costante. Se la corrente aumenta, la tensione rimane costante ed aumenta la superficie coperta dalla scarica luminosa. Una volta che tutta la superficie è stata occupata, ogni aumento di corrente produce un aumento di tensione, come è mostrato in fig. 13-57. In corrispondenza di variazioni di corrente fra 5 e 40 mA, questi tubi danno una caduta di tensione che varia solo di $1 \div 4$ V.

La corrente $i_1 + i_2$ produce in R_1 una caduta di tensione pari alla differenza fra la tensione di alimentazione E_1 e quella E_0 del tubo VR.

All'aumentare della corrente di carico, diminuisce la corrente assorbita dal tubo, per cui rimangono costanti la corrente totale e la caduta $(i_1 + i_2) R_1$. Ad una variazione di E_1 corrisponde una variazione di i_1 in modo che la caduta in R_1 sia uguale ancora alla differenza fra la nuova E_1 e la E_0 che è praticamente costante. Al resistore R_1 si assegna un valore tale che

$$R_1 = \frac{E_1 - E_0}{I_{max}} \qquad (13\text{-}93)$$

La corrente nel carico può variare fra zero ed $I_{max} - I_{min}$, restando all'interno della regione A, B di funzionamento del tubo, se E_1 ha il massimo valore che ci si aspetta possa assumere la tensione di alimentazione.

La tensione viene fissata ad un valore che dipende dalla struttura del tubo e dalla composizione del gas; valori tipici sono 75, 90, 105 e 150 V. Se si vogliono tensioni più elevate, è possibile far lavorare più tubi in serie. La scarica inizia ad una tensione che è circa 1,3 volte superiore a quella costante di funzionamento del tubo; naturalmente la tensione di alimentazione deve essere sempre superiore a questo valore, in modo che possa aver luogo la ionizzazione del gas.

---

* Dall'inglese Voltage Regulator (N.d.T.).

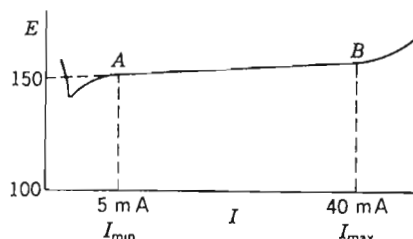
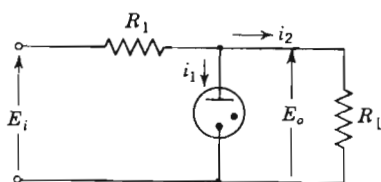
Il diodo Zener è un componente allo stato solido che si usa in applicazioni dello stesso genere, di solito per tensioni più basse. Questo componente è stato già esaminato al paragrafo 2-12.

(*a*)

(*b*)

FIG. 13-57. — (*a*) Caratteristica tensione-corrente per un tubo VR. (*b*) Stabilizzatore con tubo a gas a catodo freddo.

Esempio — *Si vuole ottenere una tensione costante di* 150 *V con una corrente di carico di* 30 *mA, da un alimentatore da* 250 ± 30 *V. La condizione che tensione stabilizzata sia di* 150 *V, indica che si deve scegliere un tubo ODC/VR* 150 *le cui specifiche sono*: $E_0 = 150$ *V*; $E_B = 160$ *V, corrente compresa fra* 5 *e* 40 *mA. In questo intervallo la tensione è stabilizzata entro* 4 *V. Dall'eq.* (13-93) *si può calcolare*

$$R_1 = \frac{280 - 150}{0{,}040} = 3250\ \Omega$$

La resistenza di carico sarà 150/0,030 = 5 K Ω.

13-30. Stabilizzatori di tensione serie e parallelo.

È possibile migliorare il funzionamento di uno stabilizzatore parallelo (così viene classificato un tubo VR), aumentando la sensibilità alle variazioni di tensione mediante amplificazione delle variazioni stesse. In fig. 13-58

è riportato un semplice tipo di stabilizzatore con un doppio diodo Zener ed un transistore T che sostituisce il tubo VR.

Per il doppio diodo Zener è necessaria qualche spiegazione; come è indicato in figura esso è costituito da due giunzioni disposte in opposizione; in questo modo non vi è una specifica polarità e vi sarà sempre una giunzione polarizzata direttamente mentre l'altra risulta polarizzata in senso inverso nella regione di rottura a valanga. La corrente che circola nel diodo alimenta la base del transistore e la sua variazione con la tensione moltiplicata per il guadagno h_{FE} del transistore si riflette in una variazione della I_c. Il transistore è attraversato da tutta la corrente di regolazione mentre il diodo di riferimento deve condurre solo la corrente necessaria al comando della base del transistore. Quindi per piccole variazioni:

$$\Delta I_B = \frac{\Delta E_0}{R_d + h_{IE}} \tag{13-94}$$

$$\Delta I_C = \Delta I_B h_{FE} \tag{13-95}$$

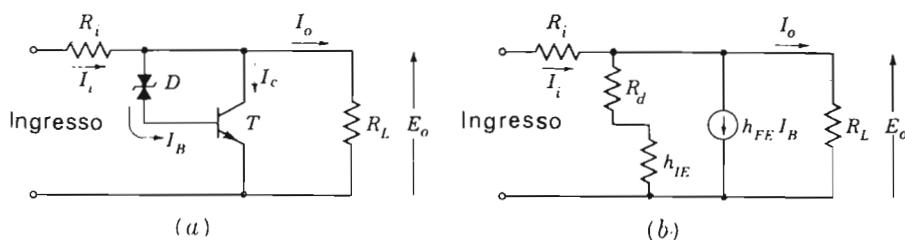



FIG. 13-58. — Stabilizzatore di tensione parallelo.

Per una variazione della corrente di carico occorre che sia:

$$-\Delta I_0 = \Delta I_B + \Delta I_C$$

ovvero la variazione della corrente di carico deve risultare opposta alla variazione della corrente derivata dal transistore, in modo che I_i e quindi la caduta su R_i rimangano costanti. Sostituendo:

$$-\Delta I_0 = \Delta E_0 \frac{1 + h_{FE}}{R_d + h_{IE}}$$

da cui si ricava che la resistenza di uscita, vista dal carico, vale:

$$R_0 = -\frac{\Delta E_0}{\Delta I_0} = \frac{R_d + h_{IE}}{1 + h_{FE}} \tag{13-96}$$

Per $R_0 = 0$, la tensione di uscita non subirebbe alcuna variazione al variare della corrente di carico, e si otterrebbe uno stabilizzatore perfetto.

In pratica si può calcolare la stabilizzazione di tensione, considerando il partitore formato da R_i ed R_o, per cui:

$$\text{Stabilizzazione} = \frac{R_o}{R_i + R_o} \cong \frac{R_d + h_{IE}}{(1 + h_{FE}) R_i} \tag{13-97}$$

Un incremento sia del guadagno di corrente h_{FE} che di R_i migliorerà la stabilizzazione; in pratica non è possibile assumere per R_i valori troppo elevati per ragioni di dissipazione di potenza.

Per piccoli carichi, nel transistore circola quasi la totalità della corrente fornita dalla sorgente per cui il rendimento risulterà basso. Tuttavia il circuito stabilizzatore parallelo presenta l'importante pregio di essere protetto contro i corto-circuiti. Infatti un corto circuito sul carico provoca niente altro che l'annullamento della tensione sul transistore senza causare alcun danno. D'altra parte eventuali difetti del regolatore possono permettere che tensioni dannose vengano applicate al carico. In definitiva lo stabilizzatore parallelo, per il suo basso rendimento di potenza, viene impiegato solo per piccole correnti di carico.

Il *circuito stabilizzatore serie* di fig. 13-59 presenta indubbi vantaggi rispetto al circuito parallelo, nel caso di correnti di carico più elevate. Esso prevede un elemento dissipatore in serie e un elemento sensibile alla tensione o di riferimento, entrambi inseriti in un *ciclo chiuso di stabilizzazione*. L'elemento sensibile è un componente a tensione costante cioè un diodo Zener indicato con D in figura. Le variazioni della tensione E_o di uscita provocano variazioni di corrente nel diodo e quindi di tensione su R_B, che amplificate da T_1 e trasferite a T_2, tendono a far variare la corrente nel senso di mantenere costante la tensione E_o.

Nell'analisi del circuito si trascureranno gli h_{oe} di ciascun transistore, dato il loro piccolo valore, e si utilizzerà il circuito equivalente di fig. 13-59 *c* valido per piccoli segnali. Quindi per una variazione elementare Δ, si avrà:

$$\Delta I_{B1} = \frac{\Delta E_o}{R_d + h_{ie}} \tag{13-98}$$

$$\Delta I_1 = \frac{\Delta E_i - R_i \Delta I_o}{R_a} - h_{fe1} \Delta I_{B1} \tag{13-99}$$

$$\Delta I_o = h_{fe2}\, \Delta I_1 + \Delta I_1 = (1 + h_{fe2})\, \Delta I_1 \tag{13-100}$$

La *sensibilità di stabilizzazione*, intesa come variazione della tensione di uscita per un volt di variazione della tensione di ingresso, risulta:

$$\frac{\Delta E_o}{\Delta E_i} = \frac{1 + h_{fe2}}{R_a \left[\frac{1}{R_L} + (1 + h_{fe2}) \left(\frac{R_i}{R_a R_L} + \frac{h_{fe1}}{R_d + h_{ie}}\right)\right]} \tag{13-101}$$

Da questa relazione risulta che valori elevati di h_{fe2} o R_a abbassano la sensibilità alle variazioni della tensione di ingresso, ed ancora valori piccoli di R_d ed h_{ie} e grandi di h_{fe1} contribuiscono ulteriormente alla diminuzione della sensibilità.

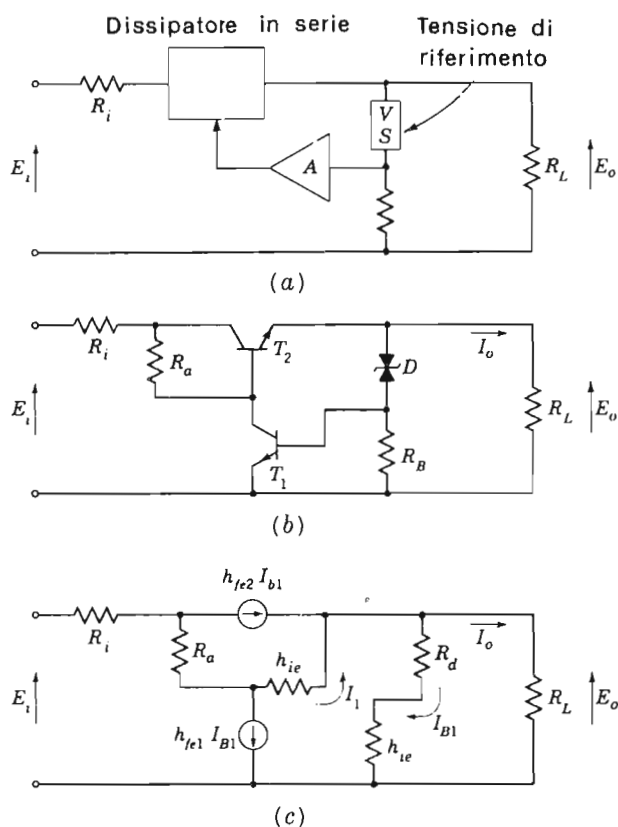



FIG. 13-59. — Stabilizzatore di tensione serie.

La resistenza di uscita, che determina la sensibilità della tensione di uscita alle variazioni della corrente di carico, in base alle equazioni (13-98) e (13-100), vale:

$$R_o = \frac{\Delta E_o}{\Delta I_o} = \frac{R_d + h_{ie}\Delta I_{B1}}{1 + h_{fe2}\Delta I_1}$$

Per valutare l'impedenza di uscita bisogna evidentemente porre $\Delta E_i = 0$, allora dall'Eq. (13-99) si ricava:

$$\frac{\Delta I_{B1}}{\Delta I_1} \cong h_{fe1}$$

e sostituendo:

$$R_o = \frac{\Delta E_o}{\Delta I_o} \cong \frac{R_d + h_{ie}}{h_{fe1}(1 + h_{fe2})} \qquad (13\text{-}102)$$

Se entrambi i transistori presentano guadagni di corrente elevati, la resistenza di uscita sarà piccola e la tensione di uscita risulterà praticamente insensibile alle variazioni della corrente di carico. Se avviene un corto circuito sul carico, risulterebbe applicata a T_2 una tensione eccessiva, mentre un corto circuito su T_2 provocherebbe a sua volta una tensione troppo elevata sul carico.

Per ottenere correnti più elevate, al posto di T_2 si possono disporre più transistori in parallelo. Il resistore R_1 rappresenta generalmente la resistenza interna del trasformatore e dei diodi raddrizzatori. È possibile avere stabilizzazioni migliori utilizzando i guadagni più elevati presentati dagli amplificatori in continua o dagli amplificatori a chopper come in fig. 13-60. In tal caso la sensibilità può essere portata a valori inferiori a 0,00005, o a 50 μV di variazione per un volt di variazione in ingresso.

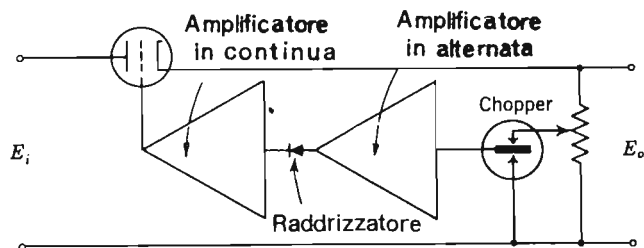



FIG. 13-60. — Stabilizzatore di tensione di precisione.

In fig. 13-61 è rappresentato uno stabilizzatore serie realizzato con tubi a vuoto. La resistenza presentata dal tubo dissipatore T_2 disposto in serie, viene controllata dall'amplificatore in continua T_1, che paragona una parte della tensione di carico con la tensione di riferimento fornita da un tubo VR. Un aumento di E_o rende la griglia di T_1 più positiva, mentre il corrispondente aumento della corrente anodica di T_1 rende più negativa la griglia di T_2; l'incremento susseguente della resistenza serie di T_2 riporta la tensione di uscita al suo valore primitivo.

La tensione di ingresso dell'amplificatore in continua T_1 vale:

$$E_g = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_o = KE_o$$

e, valutata rispetto al catodo, oscilla, per i normali pentodi, tra —3 e —5 volt. Se tutte le variazioni sono piccole, si potrà utilizzare il circuito equivalente ed in tal caso il guadagno di T_1 risulta:

$$A_1 = -g_{m1}R_3$$

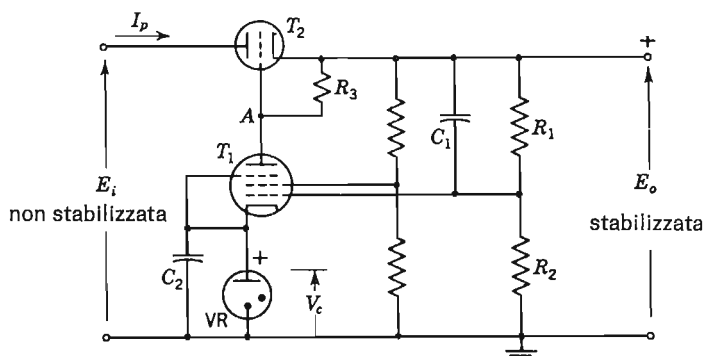



FIG. 13-61 — Circuito fondamentale per la stabilizzazione elettronica.

Imponendo ora una variazione di tensione ΔE_i che provochi una piccola variazione in uscita ΔE_o, si può scrivere:

$$\Delta E_{g1} = K\, \Delta E_o \tag{13-103}$$

$$\Delta E_{g2} = -A_1 K\, \Delta E_o \tag{13-104}$$

Ma $\mu_2 = -\Delta E_b/\Delta E_{g2}$, per cui la variazione di tensione su T_2 è:

$$\Delta E_b = \mu_2 A_1 K \Delta E_o = \Delta E_i - \Delta E_o$$

essendo la tensione applicata su T_2 la differenza tra la tensione di ingresso e quella di uscita.

In definitiva:

$$\frac{\Delta E_o}{\Delta E_i} = \frac{1}{1 + \mu_2 A_1 K} \cong \frac{1}{\mu_2 A_1 K} \tag{13-106}$$

espressione che rappresenta la variazione di tensione in uscita per una variazione unitaria della tensione in ingresso. Il comportamento dello stabilizzatore migliora se si utilizzano amplificatori in continua con guadagno A_1 più elevato. Generalmente non è invece possibile incrementare il μ_2 di T_2, in quanto si adoperano triodi con bassa resistenza e piccoli μ per evitare una eccessiva dissipazione di potenza.

Il condensatore C_1 contribuisce a ridurre l'ondulazione poichè rende $K = 1$ per l'ondulazione ed i picchi di tensione. Con la presenza di questo condensatore, lo stabilizzatore aiuta il filtro a ridurre l'ondulazione. Il condensatore C_2 previene possibili oscillazioni dovute alla presenza del tubo VR.

13-31. Stabilizzatori di tensione alternata.

Gli stabilizzatori di tensione alternata si dividono in tre classi, come risulta dalla fig. 13-62, e differiscono tra di loro per la velocità di risposta, per la distorsione della forma d'onda, e per l'effetto provocato dalle variazioni di frequenza. Questi dispositivi normalmente stabilizzano la tensione al ± 1 per cento o anche a valori inferiori quando lavorano con una tensione di ingresso compresa tra 95 e 130 volt.

In fig. 13-62 *a* è rappresentato uno stabilizzatore del tipo risonante. Il trasformatore T_1 lavora in condizioni prossime a quelle di saturazione ed è in risonanza con il condensatore C alla frequenza di alimentazione. Se la tensione applicata varia, si altera il grado di saturazione, con conseguente rapido cambiamento del valore dell'induttanza e quindi della tensione in grandezza e fase ai capi del circuito risonante trasformatore-condensatore. Di conseguenza la tensione del primario P di T_2 subisce una variazione in grandezza e fase tale che la somma vettoriale delle tensioni applicate a T_1 ed al secondario S di T_2 tende a rimanere costante. Tuttavia, a causa della saturazione di T_1, in uscita si ha una notevole distorsione della forma d'onda.

Questo tipo di stabilizzatore evidentemente è sensibile sia alla variazione del fattore di potenza del carico che allo slittamento di frequenza; infatti entrambi i fenomeni provocano un cambiamento del livello della tensione di uscita. Il tempo di risposta per variazioni sia della tensione che del carico corrisponde a circa due cicli, ma la caratteristica migliore del dispositivo è l'assenza di parti elettroniche o in movimento, infatti tutti gli elementi di questo stabilizzatore sono di tipo puramente passivo.

Lo stabilizzatore rappresentato in fig. 13-62 *b*, è invece di tipo elettromeccanico. Il motore M, spostando il cursore del trasformatore T_1, regola la tensione del secondario S di T_2 in modo che essa, sommandosi o sottraendosi alla tensione di ingresso E_i, mantenga costante E_0. Il motore è controllato da un circuito elettronico che sarà descritto nel Cap 15. Il segnale di comando è ottenuto da un circuito a ponte sensibile alla tensione, munito di due resistenze non lineari in due rami opposti. Questi particolari componenti possono essere realizzati con due lampadine a filamento di tungsteno sottoalimentate.

La condizione di equilibrio del ponte, valida per una sola tensione di uscita, è realizzata agendo sulla coppia di resistenze variabili. Un abbassa-

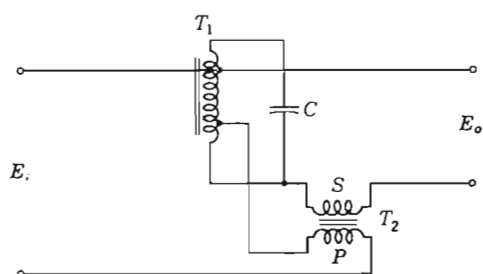
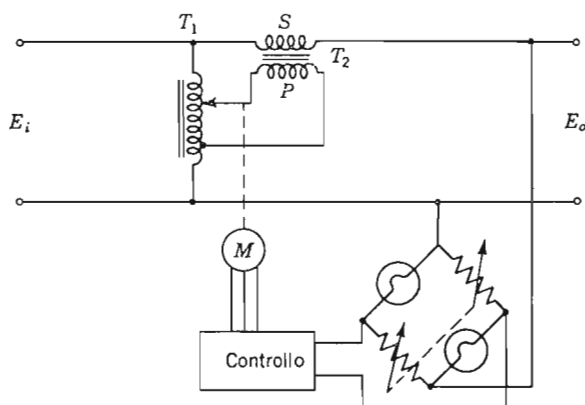
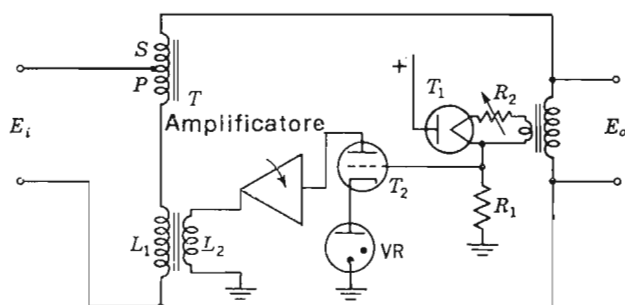



FIG. 13-62. — Vari tipi di stabilizzatori di tensione alternata.

mento della tensione applicata provoca la diminuzione della resistenza delle lampadine ed il ponte fornisce una tensione alternata di determinata polarità;

un aumento di tensione provoca invece un maggiore riscaldamento del filamento delle lampadine, dando luogo ad un'uscita di polarità opposta.

Il circuito di controllo del motore sente le variazioni di polarità mediante un rivelatore di fase, e pilota il motore M e quindi la presa centrale di T_1 verso la posizione corrispondente al livello voluto di tensione, per il quale si ristabilisce l'equilibrio del ponte. La rapidità di risposta del motore dipenderà dalla aliquota di tensione non bilanciata.

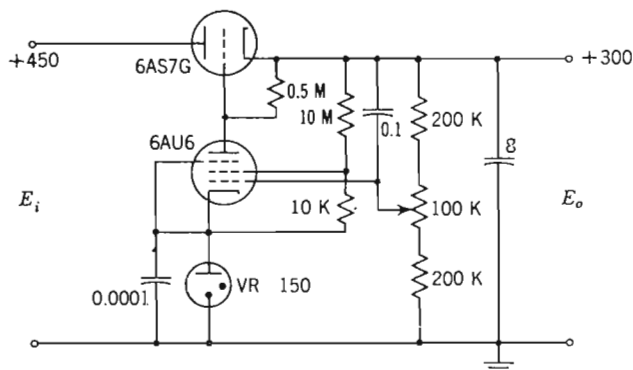



Fig. 13-63. — Tipico stabilizzatore elettronico.

La forma d'onda in uscita rimane inalterata ed inoltre il dispositivo è insensibile alle variazioni di frequenza. La rapidità della risposta è legata alla velocità del motore; l'intera zona di regolazione può essere percorsa in pochi secondi.

Nel terzo tipo di stabilizzatore (fig. 13-62 *c*) il primario di T è posto in serie con il reattore saturabile L_1, di cui è possibile variare il valore della induttanza mediante una piccola corrente continua circolante nell'avvolgimento L_2. Appena il valore dell'induttanza di L_1 cambia, varia anche la tensione applicata all'avvolgimento primario P di T e di conseguenza la tensione indotta nell'avvolgimento secondario in serie S; la variazione avviene in modo da mantenere E_o al valore costante voluto.

L'elemento sensibile alla tensione è costituito dal diodo T_1 che funziona in condizioni di saturazione; la temperatura del filamento e quindi l'emissione sono funzioni di E_o. Le variazioni di corrente in T_1, causate dalle variazioni di E_o, sono notevoli data la legge di tipo esponenziale che lega la corrente emessa alla temperatura. La caduta di tensione su R_1, dovuta alla corrente di placca, viene paragonata con la tensione di riferimento ottenuta con un tubo VR; ogni eventuale differenza di tensione opportunamente amplificata è applicata all'avvolgimento L_2 del reattore saturabile.

Il dispositivo non introduce apprezzabili distorsioni di forma d'onda, nè risulta sensibile alle variazioni di frequenza. Infine il tempo di risposta del sistema risulta di pochi periodi.

ESERCIZI

13-1. Un diodo con una caratteristica tensione corrente espressa da:

$$i = 0{,}670\ V^{1,57}\ \text{mA}$$

è connesso in serie con un carico di 2000 ohm. (*a*) Tracciare la caratteristica dinamica del dispositivo. (*b*) Utilizzando la caratteristica ricavata in (*a*), disegnare la forma d'onda della corrente che si ottiene se si applica la tensione $e = \text{sen}\ \omega t$ alla serie dei due componenti.

13-2. Un raddrizzatore ad una semionda ha un carico di 1200 ohm ed in ingresso una tensione alternata di 220 volt in valore efficace. Determinare le correnti I_{dc} ed I_{rms} che circolano nel carico, la dissipazione di potenza nel diodo, e la potenza totale in ingresso.

13-3. Determinare il valore del carico R per la massima potenza continua in uscita da un raddrizzatore ad onda intera che utilizzi diodi con tensione inversa di picco massima pari a 1550 volt, con I_m per diodo pari a 675 mA e con I_{dc} per diodo pari a 112 mA.

13-4. Un raddrizzatore ad onda intera utilizza diodi identici ed ideali. Trascurando la reattanza di dispersione del trasformatore ed essendo il carico di 2500 ohm a 300 volt, determinare (*a*) E_{rms} per il trasformatore, (*b*) la corrente di picco attraverso i diodi, (*c*) la potenza del trasformatore.

13-5. Determinare l'eq. (13-21).

13-6. Partendo dall'eq. (13-35), determinare l'eq. (13-37).

13-7. Un raddrizzatore ad onda intera utilizza un filtro capacitivo con $C = 12\mu F$, $R = 6000$ ohm, $f = 60$ Hz e con 300 volt in valore efficace applicati a ciascun ramo del trasformatore a presa centrale. Determinare il fattore di ondulazione, gli angoli di conduzione e di interdizione e la tensione continua in uscita.

13-8. Analizzare il comportamento di un trasformatore a presa centrale, relativamente alla potenza d.c. in uscita, impiegato alternativamente in un circuito monofase a presa centrale ed in un circuito a ponte. Il riscaldamento del rame deve essere lo stesso in entrambi i casi.

13-9. Si utilizzi per il raddrizzatore dell'es. 13-4, un filtro con due sezioni ad L in cascata e con un'alimentazione a 60 Hz. I condensatori C_1 e C_2 siano eguali. Si progetti il filtro, utilizzando il valore critico dell'induttanza, in modo che il fattore di ondulazione sia pari a 0,0001.

13-10. Un raddrizzatore ad onda intera atto a fornire 250 mA a 500 volt in continua, deve presentare una tensione di ondulazione E_R minore di 10 volt. Specificare quali siano gli elementi di minor costo per un filtro LC atto a realizzare quanto chiesto, se la frequenza di alimentazione è di 60 Hz. Il costo degli induttori atti a portare la necessaria corrente è di 1000 lire per henry e il costo dei condensatori è di 500 lire per microfarad.

13-11. Un circuito raddrizzatore ad onda intera, con una I_{dc} per diodo di 225 mA, alimenta da una rete a 60 Hz un carico mediante un filtro LC con $L = 10H$ e $C = 8\mu F$. La tensione per ciascun ramo dal trasformatore a presa centrale e di 360 volt in valore efficace. Se la bobina presenta una resistenza di 200 ohm, determinare (*a*) la tensione E_{dc} di pieno carico, (*b*) il valore della resistenza zavorra atta a prevenire l'aumento di E_{dc} ai bassi carichi, (*c*) l'ondulazione di tensione a pieno carico.

13-12. Un circuito raddrizzatore esafase è alimentato da un trasformatore con un primario a 230 volt connesso a triangolo ed un secondario connesso a stella e capace di fornire 500 ampère a 600 volt in continua. Trascurando la reattanza di dispersione del trasformatore determinare (*a*) i valori di corrente e di tensione per tutti gli avvolgimenti, (*b*) la potenza complessiva di ingresso del trasformatore nel caso che il rendimento sia del 96,5 per cento.

13-13. Un circuito raddrizzatore trifase ad una semionda utilizza dei diodi le cui prestazioni sono: 1800 ampère di picco, 200 ampère in continua, 900 volt di tensione inversa di picco. (*a*) Trascurando la reattanza di dispersione del trasformatore determinare la massima corrente e tensione continua ottenibile da un tale raddrizzatore. (*b*) Determinare la potenza in volt-ampère per il primario e per il secondario del trasformatore.

13-14. Calcolare la tensione inversa di picco per i diodi del circuito di fig. 13-41*b* in funzione di E_m, tensione di picco di un avvolgimento.

13-15. Calcolare il rapporto tra la tensione inversa di picco e la E_{dc} per il circuito a stella esafase di fig. 13-33*a*.

13-16. Determinare il valore massimo dell'espressione (13-68) ed il valore di m per il quale il fattore di utilizzazione è massimo.

13-17. Sfruttando il criterio con cui è realizzato il circuito di fig. 13-14*b*, disegnare un circuito dodecafase e calcolare la tensione inversa di picco.

13-18. Progettare un raddrizzatore in continua di 200 Kw a 600 volt utilizzando lo schema trifase a zig-zag. Trascurando la reattanza di dispersione del trasformatore, specificare (*a*) i valori di tensione per tutti gli avvolgimenti, (*b*) il fattore di utilizzazione dell'avvolgimento secondario, (*c*) le potenze in KVA per gli avvolgimenti primario e secondario.

13-19. Un raddrizzatore esafase ad una semionda fornisce 600 Kw a 600 volt continui. La caduta di tensione $\omega L I_{dc}$, dovuta alla reattanza di dispersione in serie con ciascun anodo sia pari al 5 per cento di E_m. (*a*) Determinare il valore efficace

della tensione dell'avvolgimento secondario. (*b*) Calcolare il valore della potenza del trasformatore in volt-ampère.

13-20. Un diodo a gas con 15 ampère di corrente di picco e 5,0 ampère di corrente continua viene utilizzato in un circuito ad una semionda per caricare a 12 volt un accumulatore, che presenta una resistenza di 0,02 ohm. (*a*) Determinare la massima velocità di carica senza superare i limiti dei tubi. (*b*) Supponendo di inserire una opportuna resistenza per non eccedere il limite massimo di corrente, quanto tempo occorrerà per raggiungere una carica di 100 ampère-ora?

13-21. Un raddrizzatore ad onda intera alimenta un filtro a π, realizzato con due condensatori di 8 μF ed un'induttanza di 12 H. La tensione in uscita al filtro deve essere di 460 volt e l'impedenza di uscita 600 ohm. Utilizzando in uscita al filtro lo stabilizzatore di fig. 13-61, determinare la variazione della tensione di uscita, qualora il carico vari da 75 mA a 300 volt a 225 mA.

BIBLIOGRAFIA

1. Waidelich D. L.: Diode Rectifying Circuits with Capacitance Filters, *Trans. AIEE*, **60:** 1161 (1941).
2. Waidelich D. L.: Analysis of Full-wave Rectifier and Capacitive-input Filter, *Electronics*, **20:** 120 (September, 1947).
3. Schade O. H.: Analysis od Rectifier Operation, *Proc. IRE*, **31:** 341 (1943).
4. Langford-Smith F.: « The Radiotron Designers's Handbook », 4th ed., Radio Corporation of America, New York, 1952.
5. « Silicon Zener Diode and Rectifier Handbook », Motorola, Inc., Phoenix, Ariz., 1961.
6. Hull A. W.: Gas-filled Thermionic Tubes, *Trans. AIEE*, **47:** 753 (1928).
7. Cobine J. D.: « Gaseous Conductors », McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
8. Chin P. T.: Gaseous Rectifier Circuits, *Electronics*, **18:** 138 (April, 1945), 132 (May, 1945).

Capitolo XIV

CONTROLLO E CONVERSIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

Un diodo a semiconduttore (ad esempio il raddrizzatore studiato nel capitolo precedente) con l'aggiunta di una regione di base, costituirebbe un dispositivo ideale per la commutazione ed il controllo di elevate potenze elettriche. Occorrerebbe però una ampia regione di base per avere un dispositivo in grado di funzionare ad alte tensioni, e ciò non consentirebbe un elevato guadagno di corrente α. Si è trovato che dei dispositivi a semiconduttore a quattro strati N-P-N-P con regione di base ampia, e quindi un basso α, sono adatti a lavorare con alte tensioni, e possono venire innescati da piccole correnti di controllo. Una volta innescati, la corrente di controllo non ha più influenza, per cui non occorre che essa sia continuamente iniettata, come invece deve avvenire nel caso dei transistori.

Il componente che presenta questa caratteristica è il *raddrizzatore controllato al silicio* o SCR * che viene impiegato in numerose applicazioni riguardanti il controllo della potenza elettrica.

Prima dello sviluppo dei componenti allo stato solido, si usava il *tyratron*, triodo a gas a catodo caldo, il quale ha una caratteristica di controllo assai simile a quella del SCR. Accanto a questi si usa, ancora oggi, l'*Ignitron*, che è un raddrizzatore controllato a pozzetto di mercurio, in quei casi in cui occorra controllare correnti di migliaia di ampère.

14-1. Il raddrizzatore controllato al silicio (SCR).

Il *raddrizzatore controllato al silicio* è un componente costituito da quattro strati N-P-N-P (fig. 14-1); esso ordinariamente non consente il passaggio della corrente poichè presenta almeno una giunzione inversamente polarizzata in ciascuna direzione. Se si applica all'elettrodo di controllo un impulso di corrente, l'SCR cessa di essere non conduttore e consente il passaggio di corrente dall'anodo al catodo. La conduzione continua, indipenden-

---

* Dalla dizione inglese Silicon Controlled Rectifier (N.d.T.).

temente dalla corrente di controllo, finchè la corrente non scende al disotto di un valore molto piccolo, chiamato *corrente di mantenimento* I_h. Si ritorna allora alla condizione di interdizione, in cui la corrente è bloccata e l'elettrodo di controllo è di nuovo attivo.

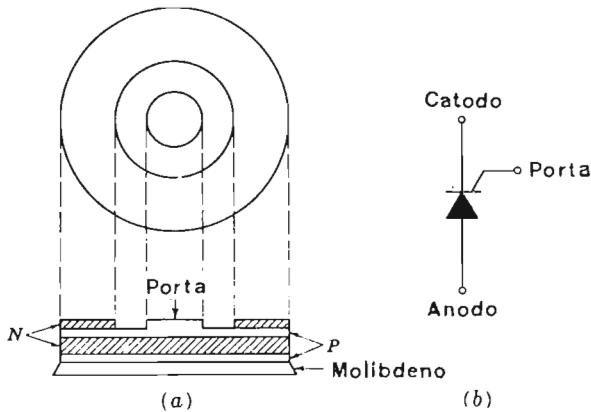



FIG. 14-1. — *a*) Realizzazione di un componente a quattro strati N-P-N-P. *b*) Simboli adottati per l'SCR.

Nell'SCR di fig. 14-2, la tensione applicata polarizza direttamente le giunzioni J_1 e J_3. La giunzione J_2, inversamente polarizzata, controlla la corrente che attraversa il componente. I primi tre strati a partire dall'anodo, cioè la parte P-N-P, presentano un α_1 che definisce la frazione di lacune, iniettata dall'emettitore e_1, che attraversa la giunzione J_2 e raggiunge il collettore c_1. A partire dal catodo, si trova una struttura N-P-N, costituita dai tre strati a sinistra, e si definisce un α_2 che indica la frazione di elettroni, provenienti dall'emettitore e_2, che attraversa la giunzione J_2 e raggiunge il collettore c_2.

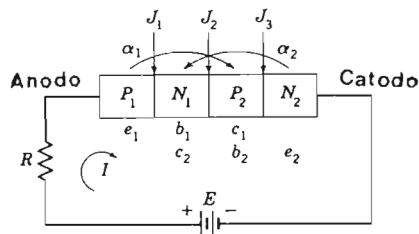



FIG. 14-2. — Raddrizzatore controllato al silicio, ovvero strutture N-P-N-P.

La corrente totale che attraversa la giunzione J_2 deve uguagliare la corrente esterna I. J_2 è data da tre componenti: $\alpha_1 I$ corrente di lacune prove-

niente dall'emettitore P, $\alpha_2 I$ corrente di elettroni proveniente dall'emettitore N, I_{co} corrente di dispersione. Quindi si ha:

$$I_{J2} = \alpha_1 I + \alpha_2 I + I_{CO} = I$$

da cui si ricava

$$I = \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \qquad (14\text{-}1)$$

Se $\alpha_1 + \alpha_2$ è notevolmente inferiore all'unità, la corrente totale sarà I_{co} moltiplicata per un piccolo fattore; poichè I_{co} per il silicio è molto piccola sarà piccola la corrente totale I che attraversa il componente. Questa è la condizione di interdizione in cui la corrente è bloccata.

Se invece $\alpha_1 + \alpha_2$ è prossimo all'unità, la corrente I può diventare molto elevata e sarà limitata solo dalla resistenza del circuito esterno. In questa condizione il componente è *innescato*.

La Fig. 14-3 mostra in che modo varia l'α di una giunzione al variare della tensione e della corrente. Se la tensione ai capi della giunzione aumenta, alcuni portatori acquistano un'energia sufficiente per liberarsi dal legame di valenza e formare delle coppie elettrone-lacuna; perciò α cresce leggermente con la tensione. Al crescere della tensione, ad un certo punto, si innesca il fenomeno « valanga », con un improvviso aumento di α e della corrente.

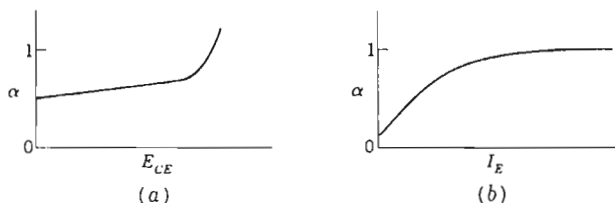



FIG. 14-3. — Andamento di α.

A basse densità di corrente di emettitore, il fenomeno di ricombinazione nella base sottrae molti portatori alla corrente di emettitore e l'α effettivo è piccolo. Via via che la densità di corrente aumenta, la corrente di ricombinazione diventa una frazione sempre più piccola della corrente totale ed α aumenta, come è indicato dalla curva tracciata in funzione di I_E.

Sia il fenomeno valanga, dovuto alla tensione, che l'aumento di α con la corrente di emettitore, possono portare $\alpha_1 + \alpha_2$ ad un valore prossimo ad 1 e quindi creare le condizioni di innesco dell'SCR; ordinariamente non si fa scattare l'SCR sfruttando il fenomeno valanga ad alta tensione, in quanto

è facile ottenere un aumento della corrente di emettitore a mezzo di un elettrodo di controllo separato, il che rende il dispositivo più versatile. La nuova corrente di emettitore, cioè la corrente di controllo, viene iniettata nella regione P fra J_2 e J_3; essa contribuisce alla corrente che attraversa J_2 e quindi fa aumentare α_1 ed α_2. Si ottiene allora la curva tensione-corrente di fig. 14-4.

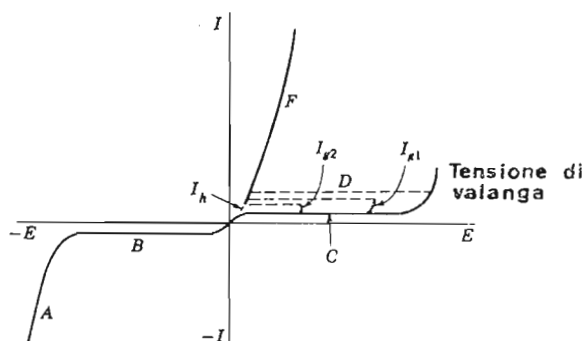



FIG. 14-4. — Caratteristica tensione-corrente di un SCR.

Nelle zone A e B, al componente è applicata una tensione inversa e le giunzioni J_1 e J_3 sono contropolarizzate; la caratteristica è simile a quella di un diodo polarizzato inversamente. Nella zona C, è la giunzione J_3 ad essere polarizzata inversamente.

Se la tensione applicata è abbastanza elevata, si verifica il fenomeno valanga e la caratteristica del componente, dopo la regione D a resistenza negativa, diventa quella di un normale diodo direttamente polarizzato in cui la corrente è elevata e la caduta di tensione bassa. Se la corrente diminuisce fino ad un valore inferiore ad I_h, l'SCR ritorna sulla caratteristica C, in cui la corrente diretta è bloccata, e l'elettrodo di controllo è nuovamente in condizione di agire.

Se si inietta una corrente in P_2, gli α aumentano di valore a causa dell'aumento della corrente e lo scatto avviene ad una tensione più bassa, come ad esempio per I_{g1}. Per una corrente di controllo più elevata, I_{g2}, l'innesco si verifica ad una tensione ancora più bassa.

Durante il funzionamento si applica all'SCR una tensione molto inferiore alla tensione di valanga in polarizzazione diretta, e lo scatto viene ottenuto mediante la corrente di controllo. Per l'innesco del componente, è necessaria solo una piccola potenza sotto forma di un breve impulso; ciò è mostrato dalla Fig. 14-5 e 14-6; ordinariamente con 50 mA si riesce a chiudere un circuito da 50 Ampère. Una volta portato l'SCR in conduzione la corrente

di innesco non ha più effetto sulla corrente diretta; per spegnere il componente occorre diminuire il valore della corrente principale ad un livello inferiore a I_h.

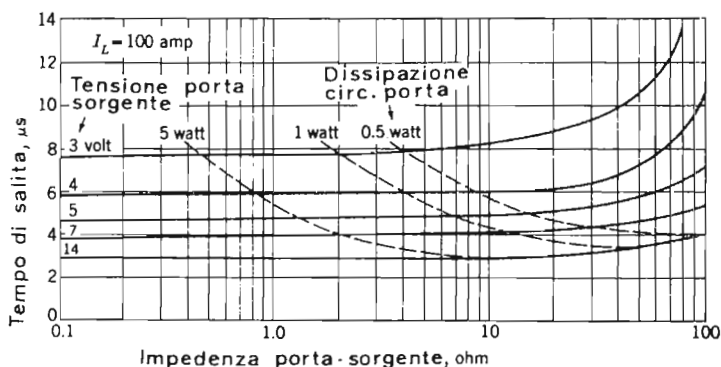



FIG. 14-5. — Caratteristica della porta di comando. Tempo di salita dell'impulso di comando < 0,25 μs.

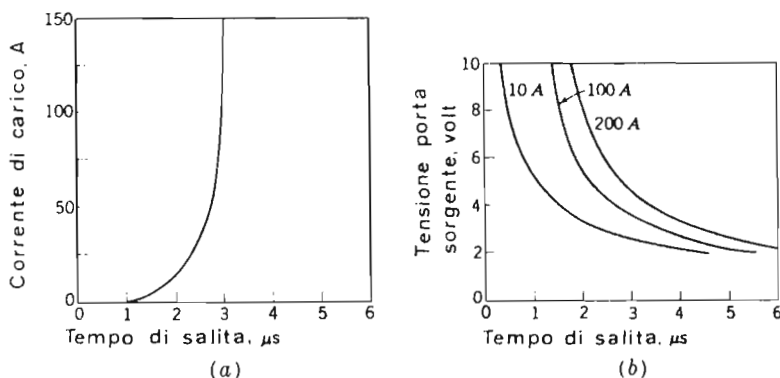



FIG. 14-6. — *a*) Caratteristica del tempo di accensione in funzione della corrente di carico. Tempo di salita dell'impulso di comando = 0,1 μs. *b*) Caratteristica del tempo di accensione in funzione della tensione di porta.

La corrente necessaria per lo scatto è funzione di I_{co} e diminuisce all'aumentare della temperatura. Ad una certa temperatura, superiore a quella massima prevista per il funzionamento, il dispositivo non sarà più in grado di bloccare le tensioni dirette dato che la corrente di dispersione ha un effetto simile a quella di controllo per quanto riguarda l'aumento di α. Per ridurre al minimo l'effetto termico, si fa in modo che la corrente di controllo sia notevolmente più alta di quella di dispersione.

Per l'accensione occorre un tempo finito, compreso di solito fra 1 e 4

μ sec; questo tempo dipende dall'impedenza del generatore, dalla corrente di carico e dal tempo di salita dell'impulso di controllo. Lo spegnimento dipende dalla ricombinazione delle cariche in prossimità di J_2, e può richiedere dai 10 ai 25 μsec, secondo il circuito ed il tipo di carico. Per le frequenze industriali, questi tempi di accensione e spegnimento non costituiscono alcun problema.

Se si desidera che l'istante di accensione sia ben determinato, è preferibile usare un impulso di comando a fronte ripido in modo da eliminare le incertezze dovute al carico ed alla temperatura. Occorre sempre rispettare i valore di picco di tensione e di corrente di controllo dati dal costruttore, per evitare di danneggiare il componente.

Se α_1 ed α_2 sono sufficienti ad innescare l'SCR, la giunzione di collettore J_2 viene portata in saturazione e tutte e tre le giunzioni risultano direttamente polarizzate. La tensione di saturazione è la somma delle cadute di tensione ai capi delle tre giunzioni, $V_{J1} + V_{J2} + V_{J3}$. D'altra parte V_{J2} è opposta sia a V_{J1} che a V_{J3}, per cui la tensione di saturazione in definitiva sarà quella di una singola giunzione direttamente polarizzata, cioè circa 1 volt. Si sono realizzati anche alcuni componenti, che possono essere spenti con un segnale di ingresso, e c'è da attendersi che tali dispositivi avranno ulteriori sviluppi.

14-2. Il thyratron.

Poiché l'SCR ed il *thyratron* svolgono funzioni analoghe, è opportuno descrivere ora quest'ultimo componente, benché esso sia ormai sorpassato per le applicazioni a basse tensioni. Il thyratron è costituito da un catodo termoionico, da una struttura a griglia e da un anodo metallico o di grafite; il gas impiegato è ordinariamente vapore di mercurio. Se la tensione di griglia è molto negativa, nessun elettrone riesce a raggiungere l'energia di ionizzazione, ma se la tensione è un po' meno negativa il campo dell'anodo può essere in grado di portare alcuni elettroni alla velocità di ionizzazione.

Gli ioni positivi così ottenuti neutralizzano il campo negativo presente in prossimità della griglia, in modo che altri elettroni riescono ad attraversarne le maglie, questi elettroni vengono a loro volta accelerati per cui il fenomeno si esalta. In definitiva si verifica un arco fra catodo ed anodo per innescare il quale occorre una determinata tensione di griglia.

Una volta iniziato il fenomeno della ionizzazione, gli ioni positivi vengono attratti dalla griglia e la circondano come una guaina. Le linee di forza del campo elettrico che partono dalla griglia negativa, raggiungono solamente gli ioni circostanti per cui la griglia si trova isolata dalla scarica dalla guaina di ioni positivi. Una variazione del potenziale di griglia altera il

numero di ioni, ma queste variazioni non influenzano la corrente anodica. Quindi una volta iniziata la scarica, *la griglia non controlla più l'intensità della corrente, nè è in grado di spegnere l'arco.* La corrente anodica che circola dopo che si è prodotto l'arco, è esclusivamente funzione della resistenza del circuito anodico e l'arco può essere spento solo annullando la tensione anodica positiva.

Se la griglia è negativa, prima che si formi l'arco, ci sarà una piccola corrente di elettroni nel circuito di griglia, dovuta al bombardamento di elettroni ad alta energia. Una volta che il gas si è ionizzato, la corrente di griglia si inverte essendo ora dovuta agli ioni positivi che vanno sulla griglia negativa. Questa corrente di ioni positivi può essere di notevole entità ed è limitata solo dalla resistenza del circuito di griglia.

Se i fori praticati nella griglia sono molto piccoli, il catodo risulta schermato dall'anodo ed è necessaria una piccola tensione positiva di griglia per *innescare* l'arco; un tubo di questo tipo è detto *a griglia positiva.* Se invece nella griglia si sono praticati dei fori grandi, occorrerà una tensione di griglia negativa per *impedire* che si verifichi la scarica; questo tubo è detto *a griglia negativa.* La fig. 14-7 mostra una tipica realizzazione.

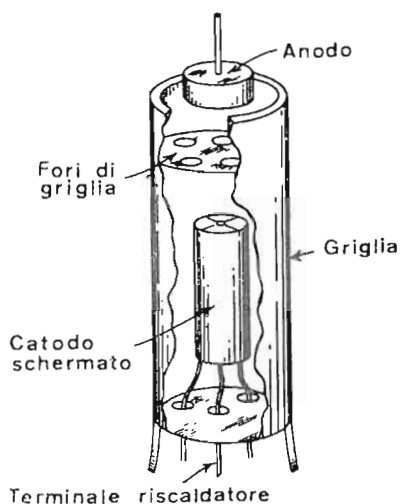



Fig. 14-7. — Vista in sezione di un thyratron.

Si chiama *caratteristica di controllo* la curva che definisce, per ogni potenziale anodico, il minimo potenziale di griglia che riesce ad *impedire* la scarica. In fig. 14-8 *a* e *b* sono riportate le curve relative ad un tubo a griglia negativa e ad uno a griglia positiva. Nei tubi a vapore di mer-

curio la caratteristica di controllo è funzione della temperatura del mercurio condensato, per cui il circuito deve essere progettato in modo che si possa tollerare un'eventuale deriva delle caratteristiche.

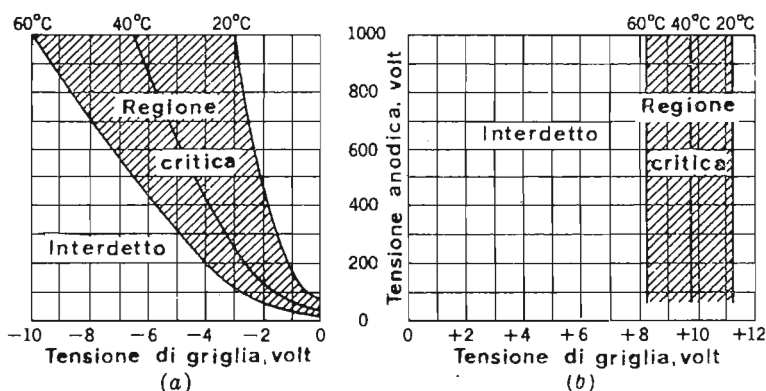



FIG. 14-8. — Caratteristiche di controllo: *a)* a griglia negativa; *b)* a griglia positiva.

Ordinariamente si fa l'ipotesi che la tensione critica di griglia sia zero qualunque sia la tensione anodica, cioè che il thyratron si accenda ogni volta che la griglia diventa positiva rispetto al catodo; questa ipotesi semplifica lo studio del dispositivo ed è giustificata dal fatto che ordinariamente la tensione di innesco del thyratron è piccola rispetto alla tensione anodica alternata.

Il tempo di accensione dipende dalla velocità con cui avviene il processo di ionizzazione; esso è ordinariamente compreso fra 0,1 e 10 μs e dipende dal tipo di gas impiegato, dalla sua temperatura e pressione.

Il *tempo di deionizzazione*, cioè il tempo occorrente perché tutti gli ioni si ricombinino, è un parametro importante poiché si richiede che la griglia riprenda il controllo dell'istante di inizio dell'arco durante ciascun semiperiodo negativo. Il tempo di ricombinazione è compreso fra 10 e 1000 μs nei tubi a mercurio, mentre è dell'ordine dei 5 μsec per tubi riempiti con idrogeno. Ovviamente il tempo di deionizzazione deve essere inferiore al semiperiodo della tensione applicata se si vuole mantenere il controllo quando la tensione anodica è alternata; questo fatto limita la frequenza a cui può funzionare un thyratron.

14-3. Controllo della corrente nei raddrizzatori.

Se si applica una tensione alternativa all'anodo di un SCR o di un thyratron, si può iniziare la conduzione a partire da un qualunque istante del

semiperiodo positivo della tensione anodica: la corrente si annullerà all'inizio del semiperiodo negativo. Nessuno dei due dispositivi è in grado di controllare il valore istantaneo della corrente anodica, ma entrambi controllano il valore medio degli impulsi di corrente anodica, variando l'istante di innesco ad ogni ciclo.

Alcuni semplici circuiti di controllo adatti per SCR con alimentazione anodica alternativa sono mostrati in fig. 14-9. Con il circuito di fig. 14-9*a*, l'SCR si accende ogni volta che l'anodo è positivo ed S_1 è chiuso; R_L fa da carico. Appena l'SCR conduce, la tensione anodica si abbassa ad un valore molto basso; lo stesso avviene per la corrente di controllo. Il resistore R_T limita il valore massimo della corrente di controllo in modo che non superi quello massimo ammissibile e il diodo D blocca la tensione inversa nel circuito di controllo durante i semiperiodi negativi. Nel circuito di fig. 14-9 *b* si ha conduzione quando si apre S_2 cioè applicando la tensione necessaria per innescare l'SCR fra l'elettrodo di controllo ed il catodo.

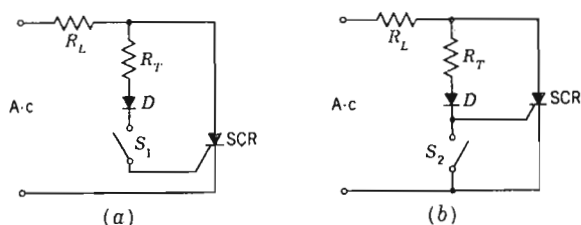



FIG. 14-9. — Innesco di un SCR mediante alimentazione anodica alternativa.

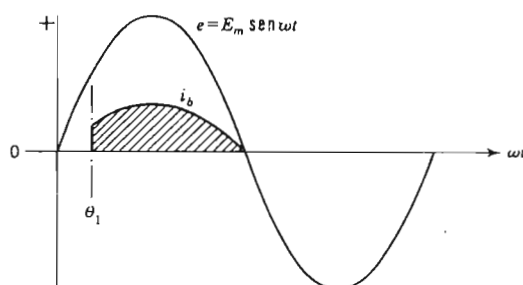



FIG. 14-10. — Forma d'onda della corrente per innesco ritardato.

I thyratron a griglia positiva possono venire accesi mediante un impulso o una tensione (continua) positiva; quelli a griglia negativa, annullando la tensione negativa applicata.

Se si trascurano le cadute interne nell'SCR e nel thyratron, la corrente anodica, nel caso di alimentazione in alternata, può essere scritta, nel periodo di conduzione:

$$i_b = \frac{E_m \operatorname{sen} \omega t}{R} \tag{14-2}$$

L'istante di innesco, o angolo di innesco, verrà fissato ad un certo valore θ_1, fig. 14-10 e 14-11, mediante un circuito di controllo. Una volta innescato, il componente diventa simile ad un diodo direttamente polarizzato in cui si avrà conduzione fino al termine del semiperiodo, se il carico è resistivo. (Nel thyratron la conduzione in effetti cessa quando la tensione applicata diventa inferiore alla caduta interna del tubo o alla tensione di ionizzazione). In seguito si esaminerà anche il caso in cui il carico sia induttivo.

Se l'istante di innesco è θ_1, si può calcolare il valore della corrente continua, di un impulso come quello di fig. 14-10, mediante la formula

$$I_{dc} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{E_m \operatorname{sen} \omega t}{R} d(\omega t) = \frac{E_m}{2\pi R} (1 + \cos \theta_1) \tag{14-3}$$

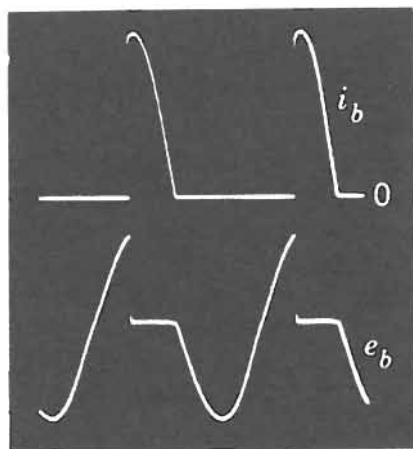



FIG. 14-11. — Forma d'onda della corrente e della tensione per un innesco ritardato di 70 gradi.

In Fig. 14-12 è riportato questo valore medio della corrente anodica in funzione dell'angolo di innesco θ_1. Esistono numerosi tipi di circuiti di controllo mediante i quali si può variare l'istante di innesco. Essi in sostanza azionano gli interruttori S_1 ed S_2 che compaiono nei circuiti di principio.

Le prestazioni dei circuiti ad SCR si calcolano con gli stessi metodi indi-

cati nel capitolo 13 a proposito dei diodi raddrizzatori, tenendo presente però θ_1. L'SCR ed il thyratron funzionano in circuiti fondamentalmente simili; per l'SCR occorrono però dei circuiti di controllo ad impedenza più bassa.

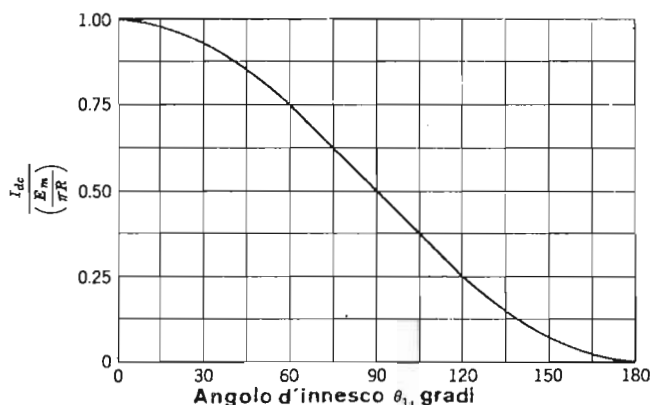



FIG. 14-12. — Andamento della corrente media in funzione dell'angolo di innesco nel caso di carico ohmico.

14-4. Raddrizzatori controllati con carico induttivo.

Se si impiega un raddrizzatore con controllo dell'angolo di innesco in un circuito con carico induttivo, si ha un comportamento simile a quello del raddrizzatore con filtro induttivo. Lo studio è però complicato dal fatto che l'angolo di interdizione della corrente è variabile. Lo studio teorico del circuito può essere impostato in modo simile a quanto si è fatto per il circuito con filtro, assumendo $\omega L/R$ come parametro.

Quando nel circuito è presente un'induttanza, si avrà ancora conduzione al di là del punto in cui la tensione si annulla, ma se l'istante di innesco dell'altro diodo è sufficientemente ritardato, mediante il circuito di controllo, allora vi sarà ancora un intervallo in cui la corrente è nulla; questo è mostrato in fig. 14-13*b* per un circuito a doppia semionda ed in fig. 14-14 per uno a semplice semionda. Se l'istante di innesco viene anticipato, la corrente può diventare continua, cioè l'angolo di accensione θ_1 diventa uguale a quello di spegnimento θ_2 dell'altro diodo.

Dal circuito di Fig. 14-13*a* si ricava

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E_m}{L} \text{ sen } \omega t \tag{14-4}$$

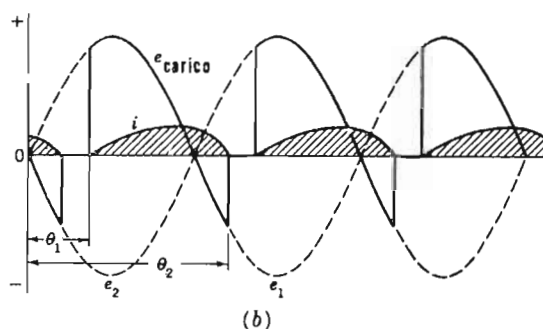
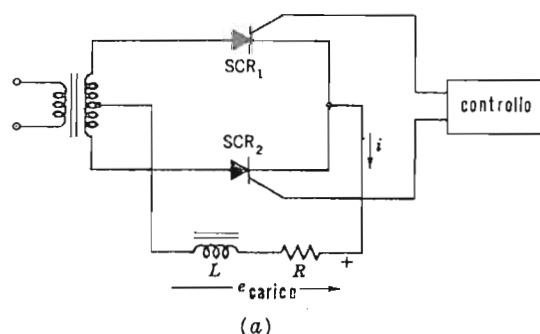



FIG. 14-13. — *a*) Raddrizzatore controllato con carico RL. *b*) Forme d'onda della corrente e della tensione nel carico per conduzione discontinua.

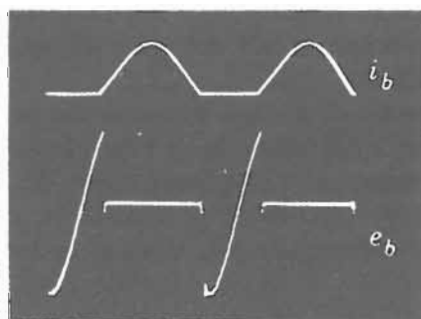



FIG. 14-14. — Forma d'onda della tensione sul raddrizzatore controllato, e della corrente, per innesco ritardato.

La cui soluzione completa è

$$i_b = A\epsilon^{-R\omega t/\omega L} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ sen } (\omega t - \Phi) \qquad (14\text{-}5)$$

in cui

$$\Phi = \text{arctg} \frac{\omega L}{R} \tag{14-6}$$

In caso di corrente discontinua, questa equazione è verificata solo nell'intervallo $\theta_1 < \omega t < \theta_2$, come è mostrato in fig. 14-13 *b*. In questo caso sarà $i_b = 0$ per $\omega t = \theta_1$ per cui

$$A = \frac{-E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \epsilon^{-R\theta_1/\omega L} \text{ sen } (\theta_1 - \Phi)$$

e quindi la corrente è data da

$$i_b = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\text{sen } (\omega t - \Phi) - \epsilon^{(R/\omega L)\,(\omega t - \theta_1)} \text{ sen } (\theta_1 - \Phi)] \tag{14-7}$$

La corrente si annulla di nuovo per $\omega t = \theta_2$; uguagliando a zero l'Eq. (14-7) si ottiene:

$$\epsilon^{R\theta_2/\omega L} \text{ sen } (\theta_2 - \Phi) = \epsilon^{R\theta_1/\omega L} \text{ sen } (\theta_1 - \Phi) \tag{14-8}$$

equazione che può essere risolta graficamente in termini del parametro Φ e della variabile indipendente θ_1. Ciò è stato fatto in fig. 14-15; si vede che quanto più ritarda l'angolo di accensione θ_1, tanto più anticipa, nel ciclo, l'angolo di spegnimento θ_2. Dal diagramma si nota inoltre che in un circuito raddrizzatore con carico fortemente induttivo l'innesco non può essere ritardato di un angolo superiore ai 90^0 del ciclo di tensione anodica, quando la corrente è discontinua.

Se i valori dell'angolo di innesco sono tali da dare una conduzione discontinua, cioè all'interno del triangolo di Fig. 14-15, si può calcolare il valore della corrente continua di uscita integrando l'Eq. (14-7) fra i limiti θ_2, θ_1. Applicando opportune relazioni trigonometriche, ricavate dall'Eq. (14-6) si ottiene, nel caso di conduzione discontinua, la equazione

$$I_{dc} = \frac{E_m}{\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \tag{14-9}$$

La conduzione sarà continua quando $\theta_2 = \pi + \theta_1$; in tal caso sarà:

$$I_{dc} = \frac{2E_m}{\pi R} \cos \theta_1 \tag{14-10}$$

$$E_{dc} = \frac{2E_m}{\pi} \cos \theta_1 \tag{14-11}$$

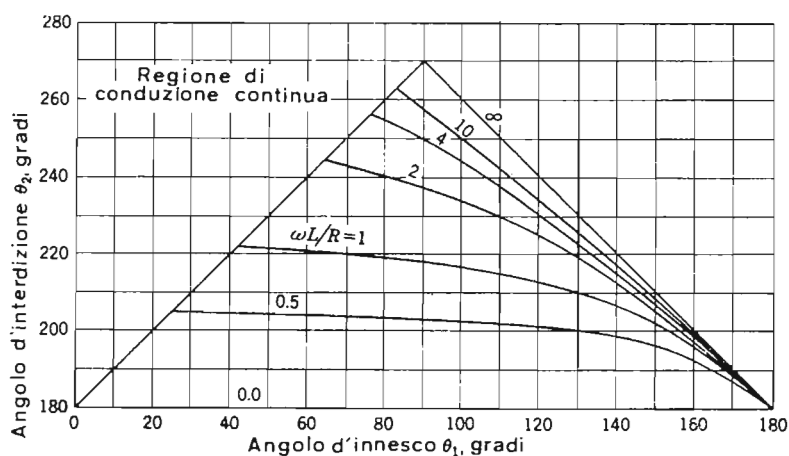



FIG. 14-15. — Andamento dell'angolo di spegnimento θ_2 in funzione di θ_1 per vari rapporti $\omega L/R$.

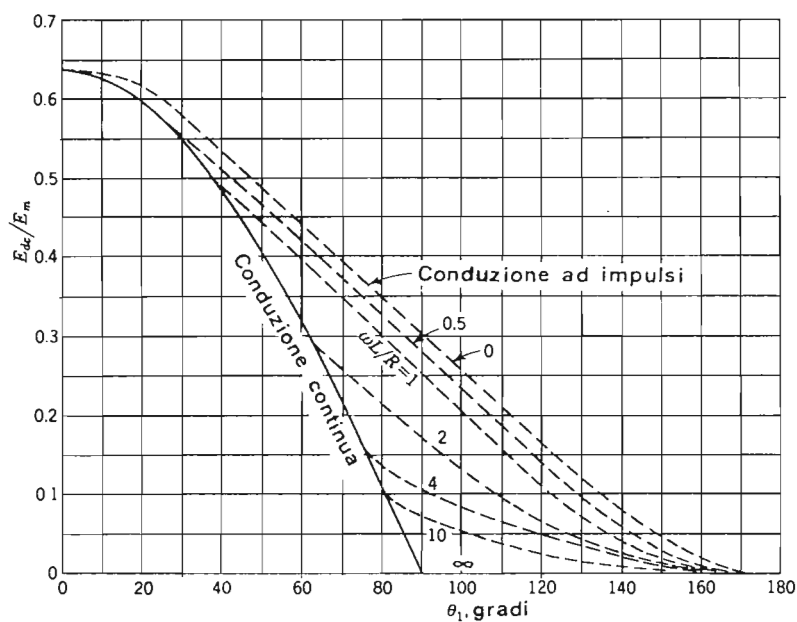



FIG. 14-16. — Andamento della tensione d'uscita in funzione di θ_1 per vari valori del rapporto $\omega L/R$, in un raddrizzatore ad onda intera.

In Fig. 14-16 sono tracciate le curve relative alle Eq. (14-9) e (14-10). Questi risultati sono importanti nel caso di raddrizzatori controllati che alimentano motori a corrente continua o circuiti analoghi.

Un altro circuito adatto per carichi induttivi è quello di fig. 14-17 *a*. Se l'SCR si accende all'istante θ_1, esso ordinariamente conduce oltre i 180°. Ma quando la corrente che circola in L comincia a diminuire, la tensione ai capi del carico si inverte, a causa della tensione Ldi/dt; allora l'anodo di D diventa positivo rispetto al catodo e D conduce. L'energia immagazzinata nell'induttanza viene dissipata nel carico, nel quale circola corrente durante buona parte del semiperiodo negativo. Quanto più piccolo è l'angolo di innesco dell'SCR, tanto maggiore è l'energia immagazzinata nell'induttanza e quindi tanto maggiore è la corrente che circola nell'intervallo in cui l'SCR è spento.

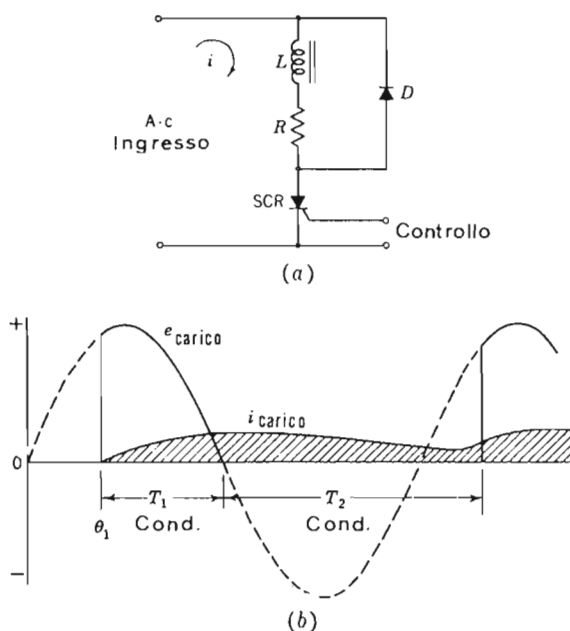



FIG. 14-17. — Circuito impiegante un SCR con carico induttivo.

In questo circuito, con un solo SCR si riesce ad ottenere una corrente continua paragonabile a quella che fornisce un circuito a doppia semionda. Questo circuito è spesso impiegato per alimentare carichi fortemente induttivi quali reattanze saturabili o avvolgimenti di eccitazione di motori a corrente continua.

14-5. Controllo a sfasamento dell'istante di accensione.

Quando la tensione anodica è positiva, un SCR si innesca applicando all'elettrodo di controllo una tensione positiva; un thyratron invece si innesca quando la sua tensione di griglia, che è negativa, è inferiore ad un valore critico. Entrambi i componenti possono quindi venire innescati mediante una tensione alternata la cui fase sia variabile rispetto alla tensione anodica. Detta e_g questa tensione, dalla fig. 14-18 si vede che è possibile variare l'angolo di innesco, variando la fase di e_g. L'eq. (14-3) fornisce poi la variazione di I_{dc} in funzione di θ_1. Lo sfasamento evidentemente deve essere sempre in ritardo.

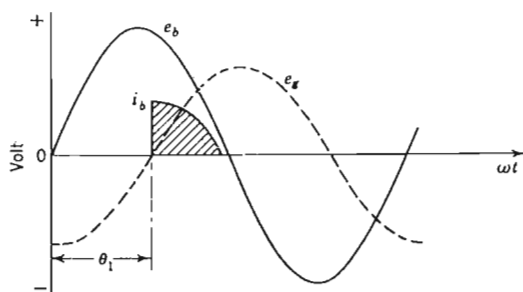



FIG. 14-18. — Controllo a sfasamento realizzato con una tensione alternativa sfasata in ritardo di 100°

Se la sinusoide ha una notevole ampiezza, presenterà una forte pendenza in corrispondenza degli zeri, per cui le variazioni dell'istante di accensione dell'SCR sono molto piccole; anche nel thyratron risulta trascurabile l'effetto della variazione della tensione critica di griglia dovuta a variazioni di temperatura del mercurio. Mediante un circuito a controllo di fase, si realizza una notevole precisione dell'angolo di innesco, nonchè un controllo continuo della corrente in tutto il suo campo di variazione.

Un semplice circuito con cui si può variare la fase di una tensione alternata è il *ponte a sfasamento* di fig. 14-19 *a*. Il trasformatore è avvolto nel modo indicato dai punti e la tensione in A è in fase con la tensione anodica. Disegnato il vettore che rappresenta la tensione CA, e ponendo $Z_1 = R$ e $Z_2 = -j/\omega C$, è noto che IR ed IX_c devono essere sfasati di 90° e che la loro somma deve essere uguale alla tensione CA. Ne segue che il luogo descritto dal punto D è una circonferenza il cui diametro è CA, che il vettore BD rappresenta la tensione di controllo di ampiezza costante, e che l'angolo θ indica il ritardo della tensione di controllo rispetto alla tensione anodica.

Una variazione o di R o di X_c modifica la fase della tensione di controllo; $\theta = 0^0$ per $R = 0$, $\theta = 180^0$ per $R = \infty$.

Esaminando il diagramma vettoriale, si vede subito che il triangolo BCD è isoscele, per cui

$$\theta + (180^0 - 2\alpha) = 180^0$$

cioè

$$\theta = 2\alpha = 2 \text{ arctg } \frac{Z_1}{Z_2} = 2 \text{ arctg } \omega CR \qquad (14\text{-}12)$$

nel caso di circuito che impieghi elementi R e C.

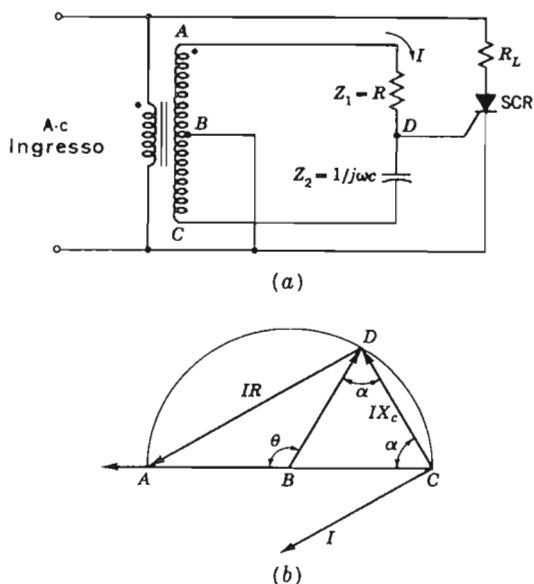



FIG. 14-19. — Circuito sfasatore a ponte impiegante una reattanza capacitiva.

Se invece si usa un'induttanza come elemento variabile, bisogna scambiare fra loro reattanza e resistenza, cioè porre $Z_1 = j\omega L$ e $Z_2 = R$ come è mostrato in fig. 14-20. Si trova allora

$$\theta = 2 \text{ arctg } \frac{Z_1}{Z_2} = 2 \text{ arctg } \frac{\omega L}{R} \qquad (14\text{-}13)$$

Questo tipo di circuito viene spesso usato perché le induttanze variabili adatte alle frequenze industriali sono di dimensioni convenienti. La varia-

zione di induttanza viene realizzata spostando un nucleo di materiale ferromagnetico in un solenoide o saturando un reattore. In fig. 14-21 è riportato il circuito completo di un raddrizzatore monofase, a tensione di uscita variabile, realizzato mediante SCR.

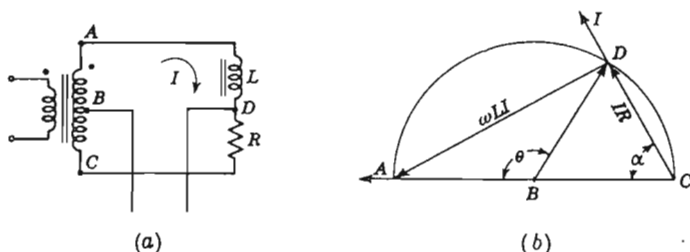



FIG. 14-20. — Circuito sfasatore a ponte impiegante una reattanza induttiva.

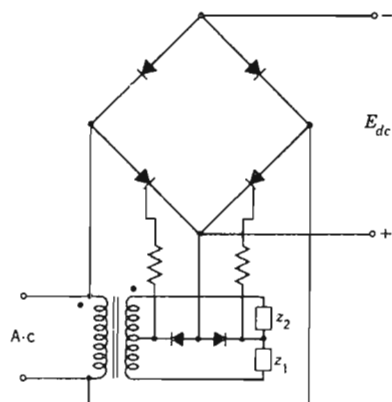



FIG. 14-21. — Controllo di un raddrizzatore monofase a ponte.

14-6. Controllo con reattori saturabili.

Un *reattore saturabile* è un'induttanza il cui valore può essere controllato a mezzo di una corrente continua. Facendo riferimento alla Fig. 14-22, si vede che la corrente continua circola nell'avvolgimento N_3 disposto sulla colonna centrale di un nucleo a tre colonne. La corrente alternata circola negli avvolgimenti N_1 ed N_2 disposti sulle colonne esterne e connessi in modo che i loro flussi si sommino lungo il perimetro esterno del nucleo.

Gli avvolgimenti N_1 ed N_2 possono anche venir connessi in parallelo;

in questo caso il funzionamento è leggermente diverso a causa della circolzione di armoniche di corrente nel collegamento in parallelo. I flussi dovuti alla corrente alternata attraversano la colonna centrale in senso opposto per cui, se i due avvolgimenti delle alternate, ed i relativi nuclei, sono identici, non si induce alcuna f.e.m. alternata nell'avvolgimento in continua N_3 In assenza di corrente continua e quindi del relativo flusso, la condizione di funzionamento è la 1 in Fig. 14-22*b*. La corrente I_{ac} produce una forza ma-

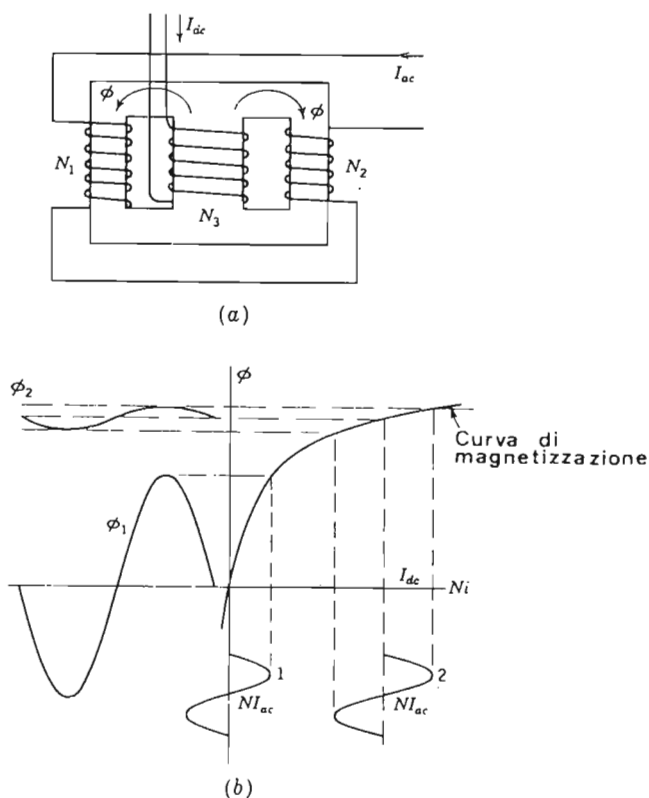



FIG. 14-22. — Reattore saturabile.

gnetomotrice data da $(N_1 + N_2)I_{ac} = NI_{ac}$ la quale produce un flusso Φ_1, che si può ricavare dalla curva di magnetizzazione; questo flusso è riportato a sinistra dell'asse delle ordinate. Una variazione così ampia del flusso produce una notevole contro forza elettromotrice e quindi una notevole reattanza induttiva.

Se in N_3 circola la corrente I_{dc}, il flusso continuo che ne risulta sposta

lo zero della forza magnetomotrice NI_{ac} in una certa posizione, per esempio quella indicata con 2 in figura

In questa zona, in cui il nucleo è saturo, la curva di magnetizzazione risulta appiattita per cui si ha solo una piccola variazione di flusso ed il reattore si comporta come una piccola reattanza.

La reattanza è data da $2\pi fNd\Phi/di$; la derivata è proporzionale alla pendenza della curva di magnetizzazione; la diversa pendenza, nelle due condizioni prima esaminate, conferma il risultato ottenuto in precedenza.

La reattanza degli avvolgimenti in alternata può essere variata con continuità in un notevole campo di valori: la variazione può essere dell'ordine di 20 ad 1. Se necessario, si può costruire N_3 con molte spire di filo sottile in modo da rendere necessaria una corrente molto ridotta per ottenere lo sfasamento voluto.

Quando si lavora in prossimità del ginocchio della curva di magnetizzazione, il flusso alternato sarà notevolmente distorto. Una compensazione parziale si ha però fra le armoniche prodotte nelle due colonne. Un reattore saturabile può costituire l'induttanza variabile mediante la quale si sfasa la tensione di controllo degli SCR e quindi si regola l'ampiezza della corrente continua in uscita (Fig. 14-20).

14-7. Sistema di controllo misto.

Spesso si desidera controllare l'innesco di un SCR o di un thyratron a mezzo di una tensione continua. Si può allora impiegare un circuito di controllo misto, a corrente continua ed a sfasamento, aggiungendo una tensione continua variabile ad una tensione alternata sfasata di una quantità fissa.

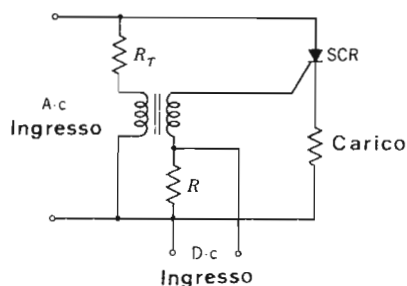



FIG. 14-23. — Controllo realizzato con la combinazione di una tensione continua e di uno sfasamento.

Nel circuito di Fig. 14-23, la componente alternata viene sfasata di un angolo fisso, pari a circa 90°, mettendo un resistore R_T in serie con il primario

del trasformatore T il quale assorbe una corrente in ritardo. Dalla Fig. 14-24 si vede che se la tensione continua E_{dc} aumenta o diminuisce, in corrispondenza lo zero della componente alternata e_g si sposta verso l'alto o verso il basso, per cui l'intersezione fra e_g e l'asse zero, cioè l'angolo di innesco, si sposta in anticipo o in ritardo rispetto al valore di 180°.

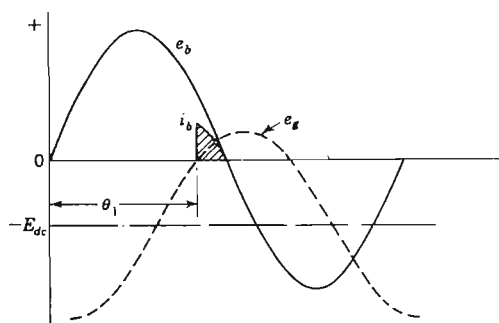



FIG. 14-24. — Forme d'onda per il controllo di fig. 14-23.

14-8. Controllo ad impulsi dell'SCR.

Si può impiegare un reattore saturabile od un trasformatore saturabile per il controllo della accensione ad impulsi di un SCR come in fig. 14-25. Se T non è stato saturato, cioè presenta una forte reattanza, la carica del condensatore C avverrà attraverso il diodo D all'inizio del semiperiodo positivo. La tensione continua che così si ottiene ai capi di C, forzerà una

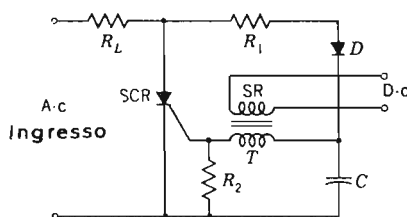



FIG. 14-25. — Circuito di innesco in corrente alternata.

corrente continua in T provocandone la saturazione; si verifica allora il passaggio di un impulso di corrente, derivante dalla rapida scarica di C, attraverso l'elettrodo di controllo e quindi l'innesco dell'SCR. La corrente

che circola nel trasformatore aumenta rapidamente quando il nucleo si satura, per cui la corrente di controllo assume la forma di un impulso, come si voleva.

Se invece T è saturato per effetto di una corrente continua esterna, la corrente verrà deviata dal ramo contenente C, il che impedirà a C di caricarsi ad una tensione sufficiente ad innescare l'SCR. Il resistore R_2 serve ad evitare che la tensione applicata all'elettrodo di controllo, dovuta alla corrente che circola in R_1, raggiunga il valore minimo necessario per l'innesco; R_2 perciò deve essere piccolo rispetto ad R_1.

Mediante questo circuito, l'SCR funziona da interruttore per correnti alternate, comandato da un segnale continuo indipendente. Questo metodo consente una notevole flessibilità di impiego nel caso di operazioni di controllo complesse.

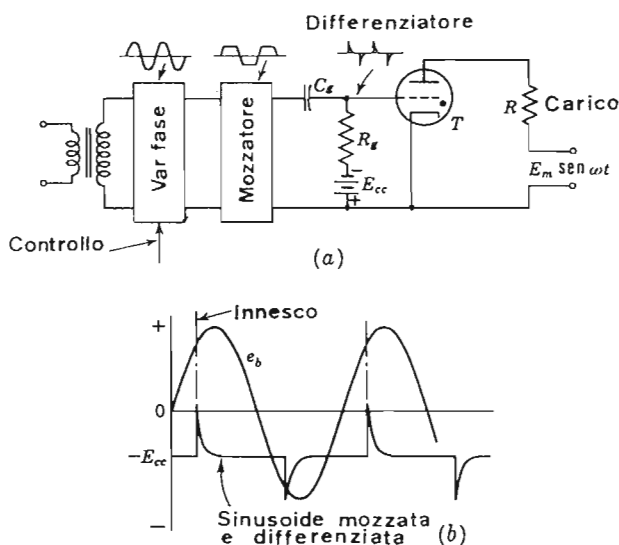



FIG. 14-26. — Innesco di un thyratron ad impulsi.

Un altro metodo con cui si ottengono impulsi molto stretti, adatti ad innescare con precisione un thyratron o un SCR, è quello mostrato in Fig. 14-26. La tensione alternata di alimentazione sfasata mediante un variatore di fase comandato dal segnale di controllo, e resa poi rettangolare mediante un circuito cimatore, viene infine applicata ad un circuito differenziatore RC. Si ottengono così degli impulsi, dei quali quelli positivi possono servire per comandare l'innesco.

14-9. Il transistore unigiunzione.

Il *transistore unigiunzione* (UJT)* detto anche diodo a doppia base, ha la struttura mostrata in fig. 14-27 *a*. Esso viene impiegato per pilotare i circuiti di innesco degli SCR; infatti l'UJT ha il vantaggio di avere tensione di innesco stabile, bassa corrente di innesco e corrente di uscita sufficiente ad accendere il raddrizzatore.

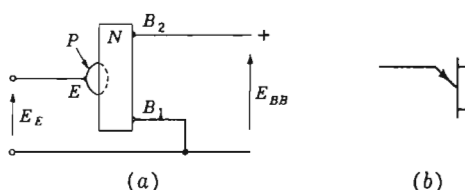



FIG. 14-27. — *a*) Transistore unigiunzione. *b*) Simbologia adottata in circuiti.

Il transistore unigiunzione viene realizzato a partire da una sottile piastrina di silicio tipo N, con due contatti di base B_1 e B_2, sulla quale, mediante lega, si crea una zona P di emettitore col relativo contatto. La base B_2 viene polarizzata positivamente rispetto alla B_1 mediante la tensione E_{BB}; una frazione η di questa tensione cade fra l'emettitore E e B_1, dato che la sbarretta di semiconduttore si comporta come un partitore di tensione. Se la tensione E_E applicata all'emettitore è inferiore ad ηE_{BB}, P è negativo rispetto ad N, il diodo risulta inversamente polarizzato e circola solo la corrente di saturazione inversa; la zona di funzionamento è la A di Fig. 14-28.

Se E_E diventa maggiore di ηE_{BB}, il diodo risulta direttamente polarizzato, la corrente di emettitore è notevole e fra E e B_1 c'è solo la piccola caduta di tensione diretta. Le lacune iniettate nella base da P, rendono la regione B_1 positiva rispetto ad E; gli elettroni vengono perciò attirati verso questa regione. A causa del notevole aumento del numero di portatori, la resistenza diminuisce, la corrente che va verso B_1 aumenta e la tensione diminuisce, cosicché si ottiene la zona B, di Fig. 14-28, a resistenza negativa.

L'innesco avviene quando E_E è uguale ad E_P che è la *tensione di picco*, data approssimativamente dalla formula

$$E_P = \eta E_{BB} + 0{,}7 \text{ volt} \qquad (14\text{-}14)$$

in cui 0,7 volt è approssimativamente la caduta di tensione che si verifica normalmente in un diodo. Il parametro η si chiama *rapporto di interdi-*

* N.d.T. dalla dizione inglese unijunction transistor.

zione intrinseco; il suo valore è compreso fra 0,47 e 0,75 e dipende dalle caratteristiche del componente. Nel caso della figura, η è circa uguale a 0,65.

La zona a resistenza negativa si estende fino al punto C in cui la tensione raggiunge il valore della ordinaria caratteristica del diodo. Se si riduce I_E, il transistore si interdice e la corrente si annulla percorrendo la normale curva tensione-corrente.

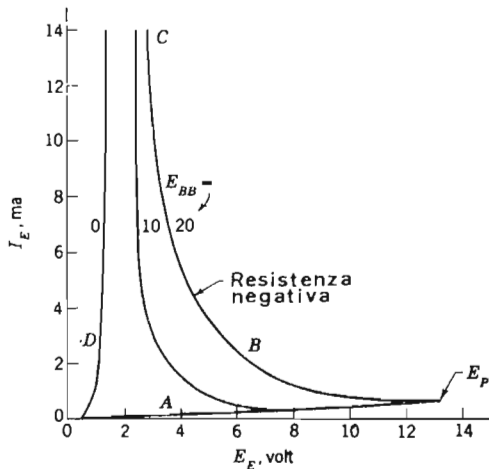



FIG. 14-28. — Caratteristiche di un transistore unigiunzione.

Prima dell'innesco, il transistore unigiunzione si comporta come un semplice partitore di tensione ed

$$\eta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La resistenza misurata fra le due basi, nel caso del silicio, sarà di alcune migliaia di ohm, con le resistenze R_1 ed R_2 misurate fra ciascuna base e l'emettitore.

Il transistore unigiunzione, grazie alla sua caratteristica a resistenza negativa, funziona da interruttore veloce adatto a controllare un SCR. Per questa applicazione si impiega il circuito di Fig. 14-29*a*. In questo circuito, il condensatore C_1 si carica attraverso R_1 finché E_E non raggiunge il valore E_P; a questo punto l'UJT scatta e scarica C_1 attraverso R_{B1}. Quando E_E raggiunge un basso valore, dell'ordine dei 2 volt, il condensatore non riesce più a sostenere la corrente emettitore-base e l'UJT si interdisce. Il periodo di oscillazione è dato da

$$T = R_1C_1 \ln \frac{1}{1 - \eta} \tag{14-15}$$

Come è mostrato in fig. 14-29*b*, ai capi del resistore di base R_{B1} si ottiene un impulso di tensione durante il rapido passaggio attraverso la regione a resistenza negativa. Questo impulso viene portato all'elettrodo di controllo dell'SCR e permette di farlo scattare con precisione.

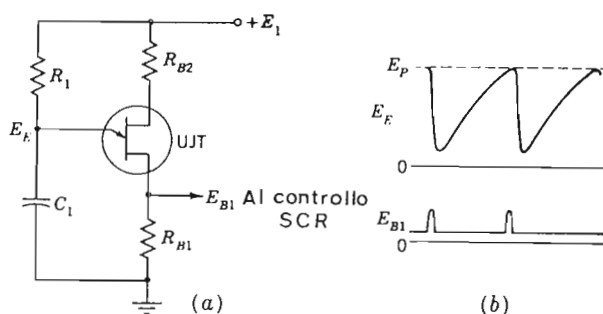



FIG. 14-29. — *a*) Schema fondamentale di oscillatore a rilassamento che impiega un transistore unigiunzione. *b*) Forme d'onda delle tensioni E_{B1} ed E_E.

Il resistore R_{B1} deve essere abbastanza piccolo perché la tensione continua, dovuta alla corrente che circola fra le basi, resti inferiore al valore minimo necessario per innescare l'SCR; R_{B1} sarà ordinariamente inferiore ai 100Ω. Il valore massimo per il resistore R_1 è fissato dalla condizione che la corrente di emettitore, in corrispondenza del punto di picco, sia superiore ad I_P in modo da far scattare il transistore unigiunzione. Il limite inferiore per R_1 è quello per cui la retta di carico passa nella zona di massima curvatura delle caratteristiche; con $E_1 = 20$ sarebbe adatto un valore di 3.000 Ω.

Agendo su R_1 è possibile controllare la frequenza di oscillazione. Un aumento di temperatura dell'UJT porta ad una riduzione di ampiezza dell'impulso di uscita; d'altra parte un aumento di temperatura dell'SCR rende necessario un impulso di minore ampiezza per l'innesco; i due effetti termici quindi si compensano.

Invece di lasciare che la frequenza propria di oscillazione sia determinata da R_1C_1, generalmente si preferisce fissare questa costante di tempo in modo da ottenere una frequenza prossima a quella di rete o alla frequenza del segnale, e quindi sincronizzare l'oscillazione con la frequenza di alimentazione o con quella del segnale stesso. Il segnale di sincronizzazione può essere accoppiato al circuito di emettitore nel modo indicato in Fig. 14-30*a*. Si inserisce un transistore NPN in parallelo a C_1, il quale rimane scarico finché c'è una tensione positiva sulla base di T_1; in questo modo si ritarda l'istante di innesco di U_1. Quando arriva un segnale che annulla la corrente di base e quindi interdice T_1, il condensatore C_1 inizia a caricarsi ed U_1 si innescherà con un ritardo determinato da R_1 e C_1.

La Fig. 14-30*b* mostra un sistema di sincronizzazione mediante la tensione alternata di rete o una tensione alternata controllata in fase; esso può essere utile in circuiti di controllo di raddrizzatori come quello di Fig. 14-13. La tensione alternata, raddrizzata a doppia semionda, viene applicata in E_1 e costituisce sia il segnale utile che quello di sincronizzazione. Il diodo Zener D cima la tensione di ingresso e fornisce la forma d'onda indicata

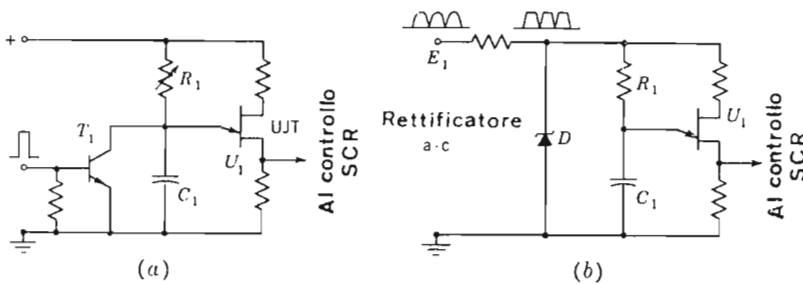



FIG. 14-30. — Sincronizzazione dei circuiti mediante UJT.

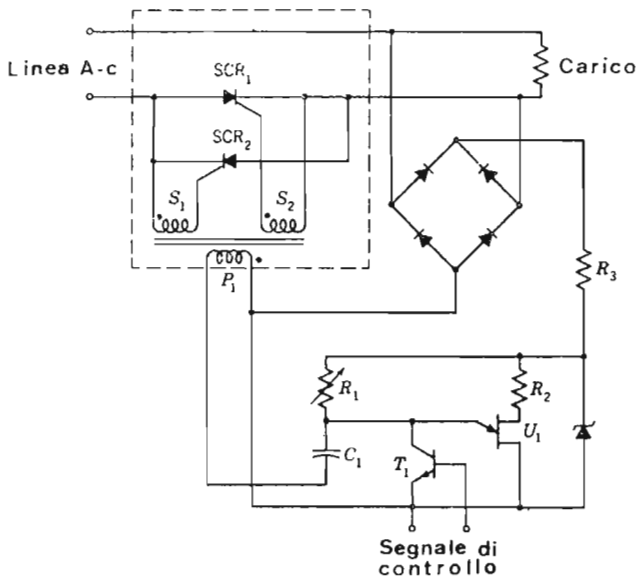



FIG. 14-31. — Regolatore di tensione alternata controllato in fase.

in figura. Al termine di ciascun semiperiodo, la tensione sulla B_2 di U_1 si annulla e C_1 si scarica attraverso U_1. Si stabiliscono così le condizioni per la ricarica del condensatore e successivo innesco dell'UJT, con un ritardo

determinato da R_1C_1. Così si sincronizza la tensione di innesco con la fase della tensione alternata che alimenta il raddrizzatore.

In fig. 14-31 è riportato lo schema di principio di un interruttore controllato per correnti alternate, in cui sono applicati i circuiti prima esaminati. I raddrizzatori controllati sono connessi in *parallelo inverso* in modo che possono bloccare o lasciar passare entrambi i semiperiodi della tensione alternata. Dato che è possibile controllare l'istante di innesco, si riesce anche a regolare la tensione alternata sul carico con il metodo del controllo di fase.

La potenza che può essere controllata è limitata solo dalle prestazioni degli SCR; un piccolo transistore T_1 riesce a comandare il controllo di parecchi Kilowatt. Questo interruttore può evidentemente avere un raddrizzatore come carico, e quindi funzionare anche con carichi che richiedono una corrente continua variabile.

14-10. Interdizione degli SCR.

Il tempo occorrente perchè un SCR si interdica, e quindi perchè sia controllabile di nuovo, è determinato da due fenomeni interni: (1) il tempo necessario per eliminare la carica immagazzinata, (2) il tempo, più lungo del precedente, necessario per la ricombinazione dell'eccesso di portatori presente nella zona della giunzione di controllo.

Si definisce tempo di interdizione il minimo intervallo di tempo che passa fra l'istante t_1 in cui la corrente diretta si annulla e l'istante t_4 a partire dal quale l'SCR riesce a bloccare una tensione diretta che gli venga applicata, senza innescarsi. Ciò è mostrato in fig. 14-32*a*.

La *corrente di recupero inverso*, cioè la parte tratteggiata fra t_1 e t_3 deriva dalla eliminazione della carica immagazzinata nella prima e nell'ultima giunzione. Durante questo intervallo di tempo, l'SCR non è in grado di bloccare la tensione inversa. Nei circuiti a doppia semionda la corrente di recupero inversa è limitata solo dalla reattanza di dispersione del circuito che commuta, e circola come corrente diretta nell'altro SCR. Pertanto in questi circuiti possono aversi dei forti picchi di corrente durante la commutazione. Nella restante parte del tempo di interdizione, cioè quella fra t_3 e t_4, avviene la ricombinazione dei portatori nella giunzione di controllo, dopo di che questa giunzione è di nuovo capace di bloccare una tensione diretta, applicata all'istante t_4. Il tempo di interdizione aumenta all'aumentare della temperatura della giunzione ed all'aumentare della corrente diretta, nel modo indicato in fig. 14-32 *b*.

Poiché l'elettrodo di controllo non agisce più una volta che ha cominciato a circolare la corrente anodo-catodo, occorre ricorrere a mezzi esterni per annullare questa corrente. Quando l'anodo è alimentato a tensione al-

ternata, la corrente si annulla durante il semiperiodo negativo, se esso ha durata maggiore del tempo di interdizione. Quando invece l'alimentazione è in continua, un metodo semplice per spegnere l'SCR è quello di porre un interruttore nel circuito anodico, mediante il quale aprire o cortocircuitare il circuito dell'SCR.

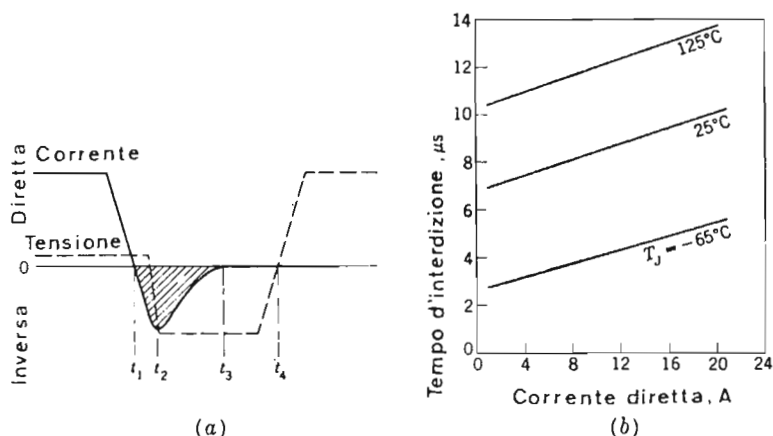



FIG. 14-32. — Tempo di innesco di un SCR.

Per il caso della corrente continua, sono stati studiati diversi circuiti di commutazione forzata. In essi si impiegano induttanze o condensatori per immagazzinare un'energia sufficiente a compiere l'operazione di commutazione. Alcuni circuiti di spegnimento sono riportati in fig. 14-33.

In Fig. 14-33*a*, quando l'SCR_1 è innescato, la corrente di carico passa attraverso R_L, e C si carica attraverso R_1 polarizzandosi nel modo indicato. Il raddrizzatore SCR_2 serve per l'interdizione; infatti quando esso viene innescato, l'armatura sinistra di C viene connessa a massa, per cui l'anodo dell'SCR_1 va E volt negativi rispetto a massa. Se si sceglie la costante di tempo R_LC in modo che sia maggiore del tempo di interdizione, si riesce a mantenere l'SCR_1 contropolarizzato, a mezzo della tensione di C, finché non recupera la capacità di bloccare le tensioni dirette. Il resistore R_1 può avere un valore dieci volte maggiore della resistenza di carico, dato che la sua funzione principale è quella di caricare C durante il periodo in cui l'SCR_1 conduce.

Nel circuito di Fig. 14-33*b* l'interruttore è costituito da un transistore. Quando SCR_1 conduce, in R_L circola la corrente di carico. Per interdire SCR_1 si porta in conduzione T_1 agendo sulla sua base; in tal modo si connette ai capi di SCR_1 la batteria ausiliaria che lo polarizza inversamente e quindi lo interdice. Così l'SCR può venire innescato o interdetto mediante impulsi di corrente iniettati nella base T_1.

Nel circuito di Fig. 14-33*c*, SCR_2 deve venire innescato in modo da caricare C nel verso indicato; SCR_2 si interdice quando cessa la corrente di carica. Quando si innesca SCR_1, in R_L circola corrente ed il condensatore C si scarica attraverso SCR_1, L, e D. Ma L e C formano un circuito risonante in cui la prima oscillazione carica C con polarità invertita; la carica viene mantenuta dal diodo D opportunamente montato. In qualunque momento è possibile innescare SCR_2 collegando ai capi di SCR_1 il condensatore C, carico con polarità invertita, il quale ne provoca l'interdizione; quindi C si ricarica attraverso SCR_2 ed R_L ed è pronto ad un nuovo ciclo di funzionamento.

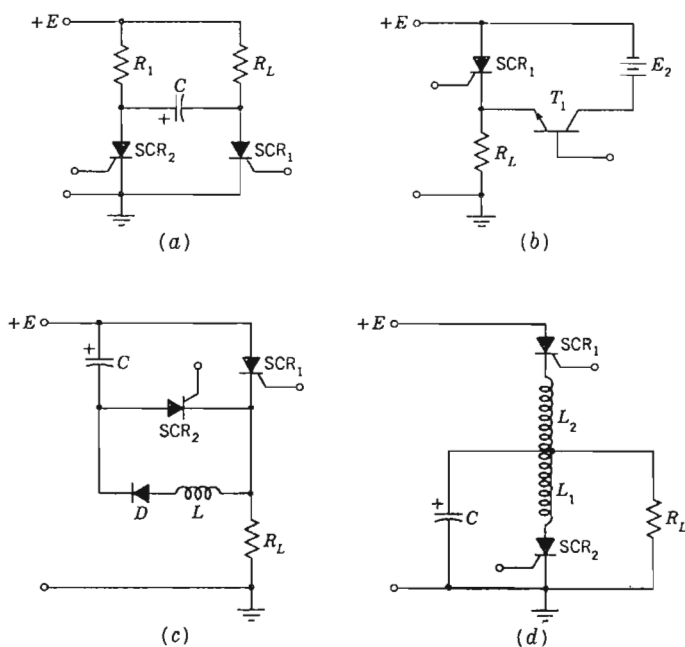



FIG. 14-33. — Circuiti di innesco di tipo capacitivo per SCR.

In Fig. 14-33*d*, il circuito costituito da R_L, L_2 e C è subcritico; quando SCR_1 è innescato la corrente circola nel carico R_L ed il condensatore si carica alla tensione presente sul carico. Quando SCR_2 viene innescato, si induce in L_1 una tensione pari ad E a causa dell'effetto di autotrasformatore, e questa tensione, sommata alla tensione E presente su C, porta il catodo di SCR_1 ad un valore superiore a quello di rete per cui si ha l'interdizione.

Quelli ora esaminati sono solo alcuni esempi dei numerosi circuiti adatti ad interdire un SCR alimentato in continua sfruttando fenomeni transitori o impulsi esterni. Questi circuiti si possono classificare nel modo seguente:

A : ad auto commutazione effettuata mediante un carico risonante.
B : ad auto commutazione effettuata con un circuito LC.
C : commutazione effettuata mediante un altro SCR in cui circola la corrente di carico.
D : commutazione mediante un SCR ausiliario.
E : commutazione mediante generatore di impulsi indipendente.
F : commutazione dovuta alla tensione di rete.

Secondo queste definizioni, il circuito di Fig. 14-33*a* appartiene alla categoria C se in SCR_2 circola tutta la corrente di carico, ma diventa del tipo D se R_1 è molto maggiore di R_L. Il circuito (b) è del tipo E in quanto ha un generatore indipendente; i circuiti (c) e (d) sono del tipo D.

14-11. L'Ignitron.

L'*ignitron*, studiato per la prima volta da Slepian, è un tubo con catodo a pozzetto di mercurio dotato di un veloce sistema di innesco elettrico. Esso è costituito da un anodo di grafite, un catodo a mercurio ed un elettrodo di innesco, il tutto racchiuso in un involucro di acciaio in cui si è praticato il vuoto. La Fig. 14-34 mostra in sezione un tipo di ignitron. L'elettrodo di innesco

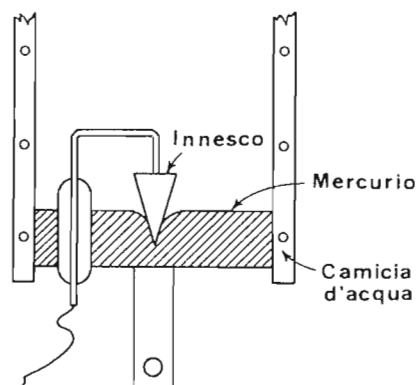



FIG. 14-34. — Vista in sezione di un ignitron.

è di carburo di silicio o carburo di boro; entrambi non vengono bagnati dal mercurio, nel quale sono immersi. L'accensione del tubo viene ottenuta facendo passare una corrente fra l'elettrodo di innesco ed il mercurio. Il primo arco si ha quando nello strato di gas che circonda la punta, che non viene bagnata, si stabilisce un gradiente di potenziale superiore a quello di ionizzazione

del gas stesso. In qualche microsecondo, questo primo arco cresce fino a formare una macchia luminosa sul catodo.

Mediante l'elettrodo di innesco, si riesce a formare l'arco in un qualunque istante del semiperiodo a tensione anodica positiva; è così possibile variare il valore medio della corrente come con l'SCR. Poiché il catodo dell'Ignitron è a pozzetto di mercurio, non c'è un limite assoluto al valore della emissione e quindi sono possibili sovracorrenti molto forti. Per la presenza del catodo a pozzetto di mercurio, la caduta di tensione interna del tubo è compresa fra 15 e 25 volt.

Per innescare l'Ignitron, occorre una corrente compresa fra 10 e 30 A con 50-400 volt. L'impedenza è cioè molto bassa ma la potenza media messa in gioco è ugualmente bassa dato che occorrono solo 50-150 μs per innescare il tubo.

Spesso si uniscono insieme parecchi ignitron e si fanno funzionare nei circuiti mostrati nel cap. 13; controllando i tubi per mezzo dell'accenditore si regola la tensione di uscita. Talora gli Ignitron si usano in coppia come interruttori sincroni per circuiti funzionanti in alternata, ad esempio saldatrici a resistenza. In queste applicazioni è molto utile la loro capacità di rimanere innescati o disinnescati per un numero intero di periodi.

14-12. Circuiti di innesco per Ignitron.

In fig. 14-35 sono riportati i valori massimi e minimi di tensione e di corrente per il circuito di accensione di un Ignitron. Per garantire l'innesco

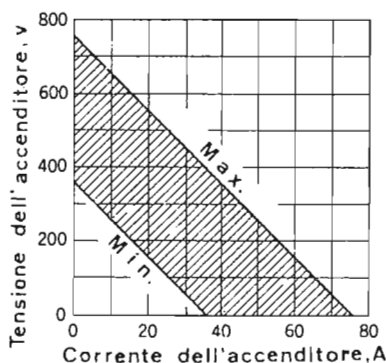



Fig. 14-35. — Andamento della corrente e tensione in un elettrodo di innesco.

dell'Ignitron deve essere applicato, per qualche centinaio di microsecondi, un impulso di valore istantaneo compreso nella fascia tratteggiata. Occorre

evitare di polarizzare negativamente l'elettrodo di innesco poichè potrebbe formarsi su di esso la macchia luminosa, dovuta alla circolazione di corrente in senso inverso; si avrebbe allora un surriscaldamento con conseguente distruzione dell'elettrodo stesso.

Esistono due tipi di circuito di innesco per Ignitron: quelli *auto-eccitati*, alimentati dalla tensione anodica, e quelli ad *eccitazione indipendente* alimentati mediante una tensione separata, ordinariamente un impulso rettangolare periodico. Alcuni esempi sono riportati in fig. 14-36, in cui l'Ignitron è indicato con T_1. In Fig. 14-36*a*, il diodo D_1 impedisce la circolazione di corrente inversa nel circuito di innesco, mentre l'induttanza L limita il valore di picco dell'impulso applicato. Quando S è chiuso, fra l'elettrodo di innesco ed il catodo risulta applicata tutta la tensione E_{ac}. Il tubo viene innescato e la

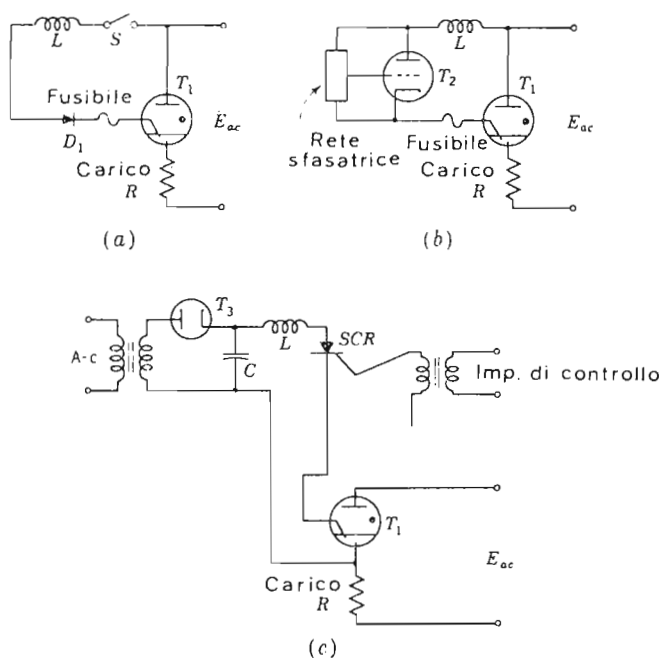



FIG. 14-36. — *a*) Circuito di innesco autoeccitato. *b*) Circuito di innesco eccitato separatamente. *c*) Circuito di innesco con un SCR.

tensione fra l'elettrodo di controllo ed il catodo diventa pari alla caduta nel tubo, la quale non è sufficiente a sostenere la corrente nel circuito di innesco. L'impulso di innesco dura solo finchè il tubo non si accende, subito dopo è lo stesso tubo ad annullare la corrente nel circuito di controllo.

Nel circuito di Fig. 14-36*b*, il segnale di controllo agisce sul thyratron

T_2 (o su un SCR) il quale consente il passaggio della corrente di innesco, il cui valore è limitato dall'induttanza L.

Nella fig. 14-36 *c* è riportato un circuito alimentato separatamente, in cui il diodo T_3 carica il condensatore C, che si scarica attraverso l'accenditore di T_1 quando l'SCR si innesca. Si ottiene così un breve impulso con forte corrente. Il condensatore C si ricarica durante il semiperiodo negativo e può immagazzinare una notevole energia; con questo sistema si riesce ad ottenere sia una forte corrente di comando sia una notevole precisione dell'istante di innesco.

14-13. Circuiti polifase con raddrizzatori controllati.

I raddrizzatori controllati al silicio o gli Ignitron possono essere adoperati negli ordinari circuiti raddrizzatori, con il vantaggio di poter con-

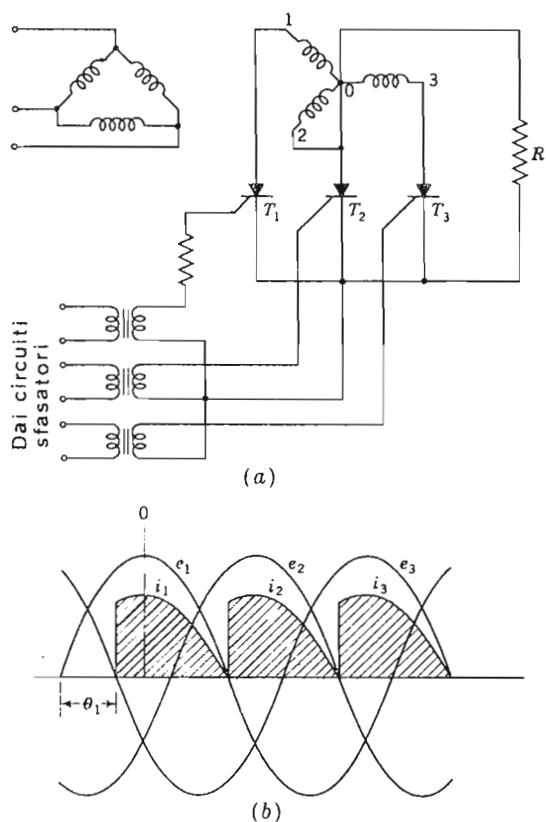



Fig. 14-37. — *a*) Raddrizzatore controllato trifase. *b*) Forma degli impulsi di corrente nel carico del circuito *a*).

trollare la tensione continua di uscita. Il loro comportamento, con carico resistivo, sarà simile a quello dei diodi salvo il fatto che una parte della forma d'onda di corrente può essere alterata.

Nel circuito trifase a semplice semionda di fig. 14-37, è possibile ritardare l'angolo di innesco θ_1, il quale tuttavia non può mai essere inferiore a $\pi/6 = 30°$ dato che, per valori più bassi, l'anodo del diodo in questione non è positivo rispetto al catodo. Se trascuriamo la reattanza del trasformatore e supponiamo $\pi/6 < \theta_1 < \pi/3$, la conduzione sarà continua e la corrente in T_1 continuerà a circolare oltre l'angolo $\pi/6 = 30°$ finchè non viene innescato T_2. Con $\theta_1 > 60°$, si avrà una conduzione discontinua, nel caso di carico resistivo, ed in T_1 circolerà corrente fino a $\pi/3$, come è mostrato in Fig. 14-37*b*. Poiché vi sono queste variazioni negli angoli, è preferibile calcolare il funzionamento nelle varie condizioni impiegando direttamente i metodi esaminati nel cap. 13 e considerando ogni volta il particolare valore dell'angolo di conduzione.

I risultati di un simile calcolo, applicato ad un raddrizzatore trifase a semplice semionda con carico resistivo, sono indicati mediante la curva di Fig. 14-38.

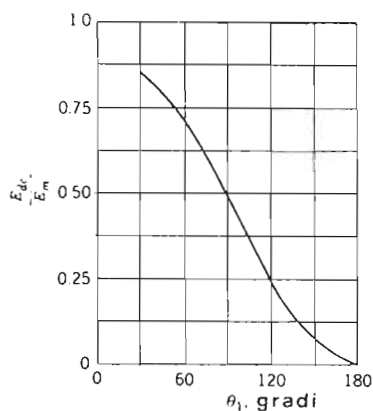



FIG. 14-38. — Andamento di E_{dc} in funzione di θ_1, in un circuito ad una semionda trifase ($\theta_1 > 30°$).

Il circuito polifase a ponte di fig. 14-39, richiede solo tre raddrizzatori controllati e tre diodi di basso prezzo, poichè un diodo ed un SCR lavorano sempre in serie.

Si possono progettare circuiti di controllo che sfruttino gli stessi principii fondamentali esaminati precedentemente, per ottenere l'innesco in un

qualunque istante fra 0⁰ e 180⁰ e controllare con continuità la tensione di uscita.

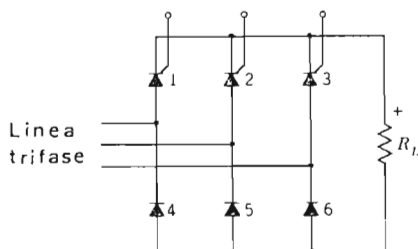



FIG. 14-39. — Circuito raddrizzatore controllato, a ponte trifase.

14-14. Controllo della corrente alternata mediante Ignitron.

La fig. 14-40 mostra una coppia di ignitron collegati in parallelo inverso, cioè in opposizione, in modo da funzionare da interruttori sincroni per il controllo di una saldatrice a resistenza. Appena l'anodo di T_2 diventa positivo, circola attraverso i diodi D_2 e D_4 la corrente *i* che alimenta l'accenditore di T_2. Appena si è formato l'arco principale, la tensione applicata all'accenditore si abbassa e nel circuito di controllo non circola più corrente. Il diodo D_3 impedisce che si abbia un corto circuito ai capi di T_2.

Nel semiperiodo successivo, i diodi D_3 e D_1 chiudono il circuito di controllo di T_1 il quale si innesca, mentre D_2 fa da blocco. Quindi la conduzione inizia quando si chiude S e termina alla fine del primo semiperiodo seguente all'apertura di S. Se S viene azionato da un circuito contatore, la saldatrice funziona per un tempo corrispondente ad un numero intero di periodi, il che permette di ottenere un controllo accurato del tempo di saldatura.

Nel circuito di fig. 14-40 *b* è realizzata una specie di adattamento di impedenza; con esso è possibile controllare correnti superiori a quelle massime consentite dagli Ignitron.

Il trasformatore serie ha il primario dimensionato per la tensione di rete ed un rapporto di tensioni maggiore dell'unità, e di valore tale che, con le ordinarie corrente di rete, al secondario circolino le correnti massime consentite dagli Ignitron. Quando i tubi non conducono, il trasformatore serie si comporta come una forte impedenza in serie al carico; quando invece sono innescati, essi in pratica cortocircuitano il trasformatore, per cui tutta la tensione di rete risulta applicata al carico. Il rapporto fra la corrente che

circola nel carico e quella che circola nel secondario è uguale al rapporto di trasformazione N_2/N_1.

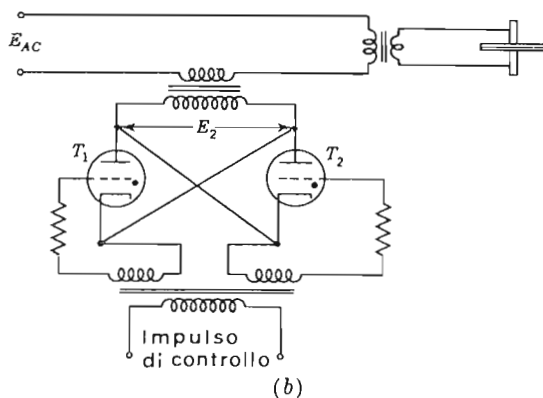
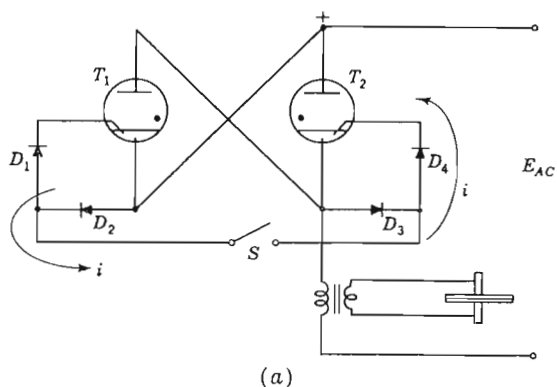



FIG. 14-40. *a*) Funzionamento parallelo-inverso. *b*) Controllo di corrente alternata con trasformatore in serie.

Esempio — *Una coppia di thyratron ciascuno adatto a portare una corrente media di* 15 *A, tensione inversa di picco (PIV) di* 15.000 *volt, deve controllare una saldatrice da* 450 *v,* 150 *KVA. Calcolare le caratteristiche del trasformatore serie ed il carico cui sono soggetti i tubi. La corrente assorbita dalla saldatrice è*

$$I_{rms} = \frac{150{,}000}{450} = 334 \text{ A}$$

In base alla relazione fra la corrente continua che circola in ciascun tubo I_{dc} *e la corrente di picco* I_m *si ha:*

$$I_{dc} = \frac{I_m}{\pi}$$

Se si vuole far funzionare i tubi al limite delle loro possibilità, con $I_{dc} = 15\,A$, *la corrente di picco in ciascun tubo sarà* $I_m = 15\pi = 47{,}2\,A$ *nell'ipotesi che ciascun tubo conduca per un intero semiperiodo. Il valore efficace della corrente secondaria è*

$$I_2 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{47{,}2}{\sqrt{2}} = 33{,}4 \text{ A}$$

Il rapporto di trasformazione è perciò

$$\frac{1}{a} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{334}{33{,}4} = 10$$

La tensione alternata al secondario è $450 \times 10 = 4.500$ *v. La tensione inversa di picco, quando non c'è innesco, è* $\sqrt{2} \times 4.500 = 6.200$ *volt di picco, cioè molto inferiore al valore massimo. Quindi il trasformatore deve avere le seguenti caratteristiche*: 450/4.500 *v*, 150 *KVA. Ciascun tubo porterà una corrente media di* 15 *A.*

14-15. Limiti di funzionamento degli Ignitron.

Gli ignitron vengono frequentemente impiegati sia come raddrizzatori controllati sia come interruttori, per esempio nelle saldatrici; in tal caso sono collegati in parallelo inverso ed il loro funzionamento è discontinuo. Nell'impiego come raddrizzatori, i limiti di funzionamento degli Ignitron sono dati da: *massimo valore istantaneo di tensione sull'accenditore*, sia positivo che negativo; *massimo valore istantaneo* e *massimo valore medio di corrente* di accenditore.

Nella saldatura a resistenza, gli elettrodi fanno passare delle forti correnti attraverso le lamiere metalliche che si vuole saldare insieme; queste correnti riscaldando la giunzione effettuano la saldatura. La saldatrice viene accesa e spenta ripetutamente in modo da formare una serie di saldature puntiformi nelle lamiere, il che crea, con i normali interruttori, problemi di carattere meccanico. Gli ignitron, che non hanno parti in movimento e che sono in grado di rimanere accesi o spenti per un numero intero di periodi, sono molto adatti a funzionare da interruttori in questa applicazione.

Quando, come in questo caso, il funzionamento è intermittente, occorre modificare i valori limiti di impiego in modo da sfruttare bene il tubo. Bi-

sogna infatti tener conto del raffreddamento che si verifica nei periodi in cui il tubo è spento e quindi prevedere correnti più forti nei brevi periodi in cui il tubo è acceso.

Facendo l'ipotesi che la conduzione avvenga per un intero semiperiodo e quindi che l'uscita, nel caso di connessione in parallelo inverso, sia una normale corrente alternata, *il valore efficace della corrente assorbita* è proprio il valore efficace della corrente che circola nella coppia di tubi.

Il prodotto della tensione di alimentazione per il valore efficace della corrente assorbita è la *potenza apparente assorbita.* Questo valore massimo è fissato dal carico o dalla saldatrice che si vuole controllare.

Si chiama *massima corrente media,* $I_{dc,max}$, la massima corrente continua che può circolare in ciascun tubo, in funzionamento continuo. La corrente unidirezionale che può effettivamente circolare nel caso di funzionamento intermittente può essere superiore ad $I_{dc,max}$, se è previsto un adeguato tempo di raffreddamento.

Se si calcola il valor medio delle perdite in un intervallo che si chiama il *massimo tempo medio,* si trova che la corrente durante la conduzione può essere molto superiore al valore $I_{dc,max}$ che è il massimo consentito in conduzione continua. Se un tubo ha un tempo medio di 6 sec (360 cicli *) e una $I_{dc,max} = 50$ A, nel tubo può circolare una corrente costante di 50 A, oppure una corrente di 100 A per 180 cicli, e così via.

Nelle specifiche si tiene conto che un tubo possiede una certa capacità di immagazzinare calore. A rigore il calore che può essere immagazzinato dovrebbe essere espresso in watt · secondo; in pratica, poiché si suppone che la caduta di tensione nel tubo sia costante, il calore risulta proporzionale alla corrente media, per cui si usa esprimere la capacità termica di un tubo in ampere · secondo. Per un dato tubo, la capacità termica può essere espressa da $I_{dc,max} \cdot T_a$, in cui T_a è il massimo tempo medio espresso in secondi.

L'*utilizzazione percentuale* è il rapporto fra il tempo di conduzione ed il massimo tempo medio nella applicazione in esame. Questa quantità può essere calcolata in base alla potenza media assorbita:

$$I_{rms} = \frac{\text{assorbimento in volt} \cdot \text{ampere}}{E_{ac}} \tag{14-16}$$

Se ciascun tubo conduce per una semionda, come nel collegamento in parallelo inverso:

$$I_m = \sqrt{2}\, I_{rms} \tag{14-17}$$

* Ci si riferisce alla frequenza industriale di 60Hz (N.d.T.).

Se I_{dc} è la corrente media che circola in ciascun tubo durante un dato intervallo di tempo T_c, allora:

$$I_{dc} = \frac{I_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\, I_{rms}}{\pi} \tag{14-18}$$

Se T_c è il tempo di conduzione durante l'intervallo di tempo in cui si fa la media, il valore delle perdite, in Ampere·secondo, deve essere inferiore o al più uguale alla capacità termica massima, espressa in Ampere·secondo; cioè

$$I_{dc,max} T_a = I_{dc} T_c = \frac{\sqrt{2}\, I_{rms} T_c}{\pi}$$

ossia:

$$T_c = \frac{\pi I_{dc,max} T_a}{\sqrt{2}\, I_{rms}} \tag{14-19}$$

da cui si ricava la massima utilizzazione percentuale possibile dei tubi:

$$\text{utilizzazione percentuale} = \frac{T_c}{T_a} \times 100\% = \frac{\pi I_{dc,max}}{\sqrt{2}\, I_{rms}} \times 100\% \tag{14-20}$$

L'equazione (14-20) rappresenta un'iperbole, in un diagramma nel quale si riporti I_{rms} in funzione dell'utilizzazione percentuale, ponendo costanti $I_{dc,max}$ ed $I_{rms,max}$.

Questa relazione può essere riportata in un diagramma come quello di fig. 14-41 *a*, ma è più conveniente tracciarla in scala doppiamente logaritmica, in cui la relazione è rappresentata da una retta come in fig. 14-41 *b*.

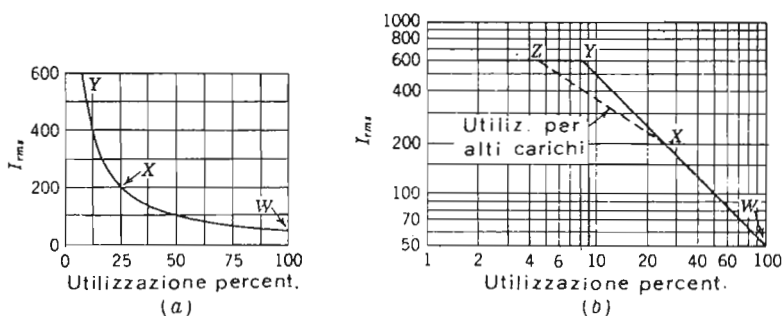



FIG. 14-41. — Campo di lavoro percentuale per l'ignitron di tipo A.

Si è visto che, ad alti valori efficaci di corrente, occorre ridurre l'utilizzazione percentuale in modo da lasciare più tempo per il raffreddamento.

La riduzione si ha a partire dal 33% della massima corrente efficace, punto X (fig. 14-41*b*); da questo punto si ha una nuova pendenza fino a Z, dove l'utilizzazione percentuale si riduce del 54% rispetto al valore corrispondente ad Y.

In fig. 14-42, è riportata la famiglia di curve corrispondenti ai quattro tipi standard di ignitron, per 500 volt. Moltiplicando l'utilizzazione percentuale, determinata da queste curve, per il tempo medio espresso in cicli, si ottiene il massimo numero di cicli di conduzione possibili con una data corrente.

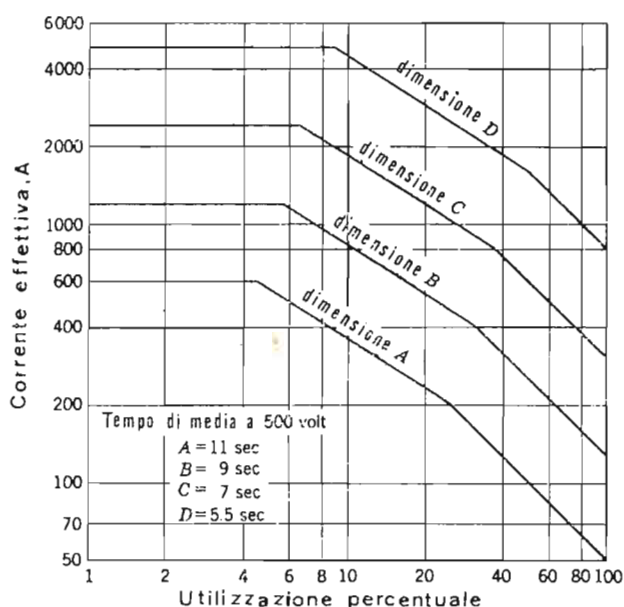



FIG. 14-42. — Campi di lavoro percentuale per ignitron funzionanti a 500 Volt.

Esempio — *Un dato lavoro di saldatura per punti richiede sei punti, ciascuno della durata di 6 cicli, ripetuti ad intervalli di 30 cicli. La corrente assorbita è di 950 A efficaci a 500 v. Trovare l'ignitron occorrente, sapendo che occorrono 7 secondi per posizionare il successivo pezzo da saldare.*

Il tempo effettivo di saldatura è $6 \times 6 = 36$ *cicli; l'intervallo in cui l'ignitron è spento è di* $5 \times 30 = 150$ *cicli; quindi il tempo totale necessario per una saldatura è 186 cicli. A questo bisogna aggiungere il tempo di* $7 \times 60 = 420$ *cicli, per cui il tempo totale di funzionamento è di 606 cicli = 10,1 sec.*

Se si usano tubi tipo B, con un tempo di media di 9 sec, l'utilizzazione percentuale è

$$\text{Utilizzazione percentuale} = 36/540 \times 100\% = 6,7\%$$

dalla fig. 14-42, *si vede che i tubi di tipo B possono portare* 1060 *A con una utilizzazione del* 6,7% *e sono quindi adatti a questo impiego.*

14-16. Gli invertitori.

Si chiama *invertitore* un circuito che converte la corrente continua in alternata. La fig. 14-43 mostra un circuito di questo tipo in cui si impiega un SCR, che è un componente molto adatto per questa applicazione. Un'induttanza a presa centrale, L, fornisce la tensione di interdizione; quando SCR_1 è innescato, la corrente i_1 induce una tensione negativa in B attraverso l'altra metà dell'induttanza, per cui SCR_2 si trova inversamente polarizzato. Quando SCR_2 si innesca, in corrispondenza del successivo impulso proveniente dal transistore unigiunzione, circola la corrente i_2, la quale induce una tensione tale da rendere A positiva rispetto ad E, per cui SCR_1 viene polarizzato inversamente e si interdice per un certo tempo. L'induttanza a presa centrale realizza la commutazione fra i due raddrizzatori poiché solo quello che ha l'anodo positivo può essere innescato dall'impulso proveniente dal transistore unigiunzione.

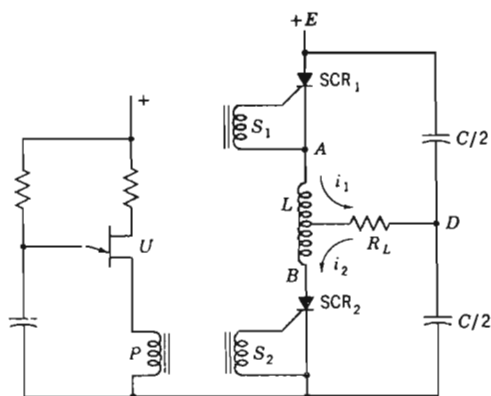



FIG. 14-43. — Invertitore sinusoidale.

La frequenza di funzionamento sarà

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{4L^2}} \qquad (14\text{-}21)$$

Ed il carico deve essere abbastanza piccolo perché si abbia uno smorzamento subcritico cioè

$$R_L < \sqrt{\frac{4L}{C}} \qquad (14\text{-}22)$$

Dopo un transitorio iniziale, la tensione nel punto C oscillerà fra un massimo ed un minimo dati da

$$e_{max} = \frac{E}{1 - \epsilon^{-\pi R_L/2\omega L}} \qquad e_{min} = -E\left(\frac{1}{1 - \epsilon^{-\pi R_L/2\omega L}} - 1\right)$$

e poiché c'è risonanza fra L e C, la forma d'onda sarà approssimativamente sinusoidale. La massima potenza in uscita si ha scegliendo C in modo che $X_c = 2R_L$. Il resistore R_L è accoppiato mediante il trasformatore di uscita.

Il circuito invertitore parallelo, di fig. 14-44, fornisce in uscita un'onda approssimativamente quadra se in ingresso è applicata una tensione continua.

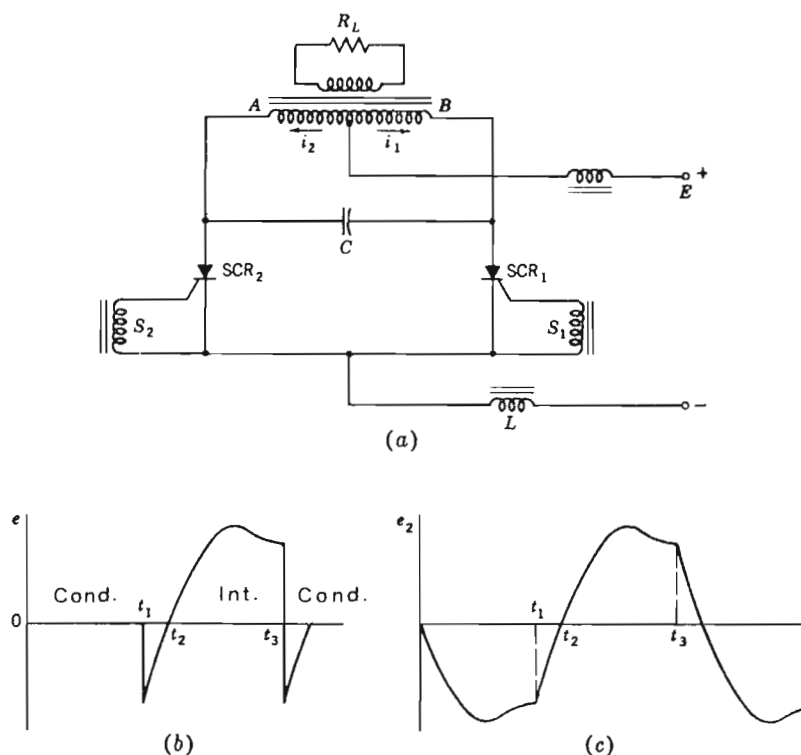



FIG. 14-44. — *a*) Invertitore con due SCR in parallelo. *b*) Tensione su SCR_2. *c*) Forma d'onda della tensione secondaria.

Raddrizzando l'onda quadra si ottiene facilmente una corrente continua ben livellata ad una tensione diversa da quella di partenza; si realizza così un trasformatore per corrente continua.

Si supponga che un ripido impulso di comando inneschi SCR_1, mentre

SCR_2 è bloccato. La corrente i_1 proveniente da E circola nel mezzo avvolgimento di destra del trasformatore di uscita. Per effetto del trasformatore, il punto A e l'anodo di SCR_2 assumono per un istante una tensione pari a circa —2E la quale polarizza inversamente SCR_2 e carica C. Quando il successivo impulso di comando innesca SCR_2, appare istantaneamente una tensione di —2E in B e sull'anodo di SCR_1, il quale viene polarizzato inversamente e si interdice. Il condensatore e l'induttanza del trasformatore mantengono questa polarizzazione inversa per un tempo sufficiente perché SCR_1 ritorni nella condizione di interdizione. Il successivo impulso innesca SCR_1 per cui il circuito torna nella sua condizione primitiva. La corrente circola alternativamente nei due rami del primario del trasformatore, per cui al secondario si ha una tensione alternata.

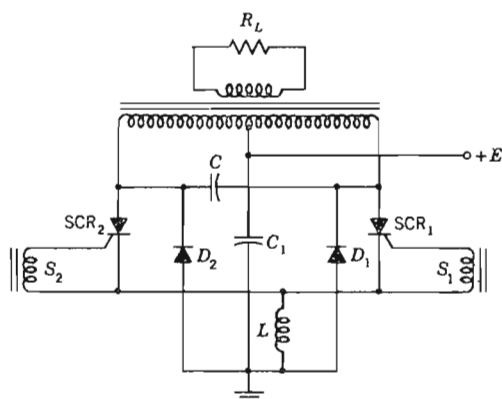



FIG. 14-45. — Invertitore.

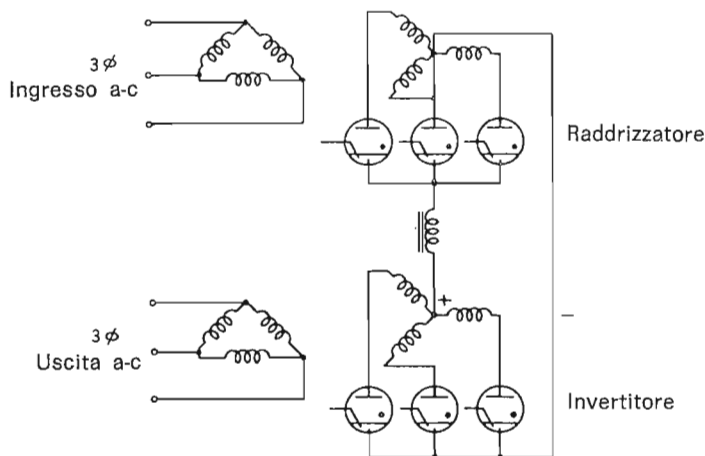



FIG. 14-46. — Circuito raddrizzatore ed invertitore trifase.

Occorre scegliere il valore di C in base al carico in modo da avere un intervallo per lo spegnimento, t_2-t_1, abbastanza lungo. Esistono diversi circuiti che eliminano questa limitazione; uno di essi è quello di fig. 14-45. I diodi D_1 e D_2 impediscono che la tensione ai capi di ciascuna metà del primario superi E; in questo modo si ottiene una migliore forma d'onda in uscita. L'induttanza L ed il condensatore C formano un circuito risonante e migliorano il transitorio, che si verifica all'atto della commutazione, utilizzato per interdire l'SCR che conduce.

Combinando insieme un raddrizzatore e un invertitore, si può ottenere una variazione elettronica della frequenza. Questi circuiti si impiegano quando occorre una frequenza di 25 Hz; un circuito semplificato è riportato in fig. 14-46.

14-17. Miglioramento della forma d'onda degli invertitori.

Se gli invertitori devono alimentare sistemi in alternata di grande potenza, a partire da linee di trasmissione in continua, occorrono in uscita delle forme d'onda opportune; cosa che non è possibile realizzare mediante i soli circuiti descritti in precedenza. Sono stati allora studiati dei circuiti capaci di fornire un'onda che possa facilmente essere ridotta ad una sinusoide mediante filtraggio.

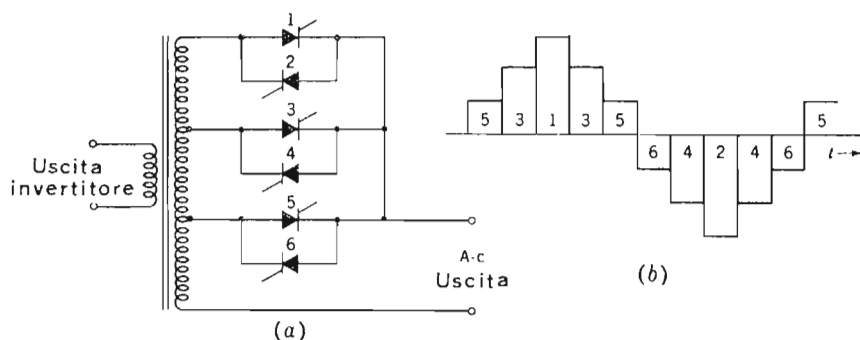



FIG. 14-47. — *a*) Invertitore con interruttori ad SCR. *b*) Forma dell'onda in uscita.

Il circuito di Fig. 14-47 viene alimentato da un normale invertitore e forma l'onda di uscita mediante interruttori ad SCR, collegati ad una serie di prese intermedie del trasformatore di uscita. Un circuito di controllo innesca gli SCR nel giusto ordine in modo da creare in uscita una forma d'onda del tipo di quella di fig. 14-47 *b*. L'interruttore funziona ad una frequenza cinque volte superiore a quella di uscita.

Si può ottenere il segnale desiderato regolando in maniera opportuna la durata degli impulsi ottenuti da un invertitore nella connessione tipica dei raddrizzatori a ponte. Una coppia di SCR viene comandata in modo che fornisca impulsi positivi, mentre la seconda coppia fornisce i semiperiodi negativi dell'onda, come si vede in fig. 14-48.

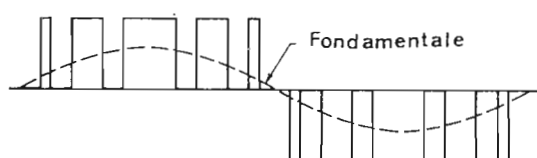



FIG. 14-48. — Forma dell'onda in uscita composta da più impulsi di diversa larghezza.

14-18. Invertitori a transistori.

Spesso è necessario convertire una corrente continua a bassa tensione, ad esempio quella fornita dall'accumulatore di un'automobile, in una corrente continua ad alta tensione adatta per le apparecchiature elettroniche. Per questo impiego è adatto un invertitore, o un oscillatore reazionato del tipo di fig. 14-49 che faccia uso di transistori di potenza. Gli avvolgimenti

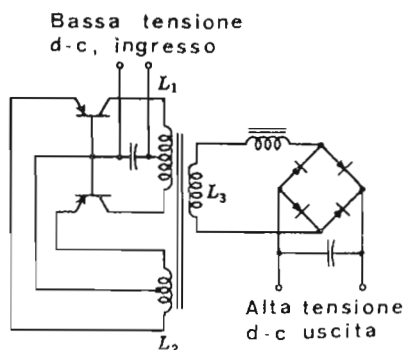



FIG. 14-49. — Circuito invertitore a transistori.

L_1 ed L_2 ed i transistori sono connessi in modo da formare un oscillatore reazionato in controfase, a base comune. La reazione si ottiene attraverso l'avvolgimento L_2. La tensione alternata così generata viene prelevata mediante L_3, portata al valore voluto, e quindi raddrizzata mediante il ponte

a diodi. La frequenza di funzionamento è determinata dall'induttanza e dal trasformatore; ordinariamente è compresa fra 60 e 100 Hz. I transistori funzionano con un coefficiente di utilizzazione del 50% in quanto sono interdetti per metà del tempo, e con un efficace raffreddamento possono funzionare con un rendimento complessivo dell'80%. Questi circuiti, fatti funzionare a qualche kHz, si usano anche per ottenere dalle batterie le alte tensioni necessarie per le lampade dei lampeggiatori elettronici.

14-19. La saldatura a resistenza.

La saldatura a resistenza è un metodo ordinariamente impiegato per unire i metalli, che si presentino sotto forma di lamiere o di piastre. Il calore necessario viene ottenuto facendo passare la corrente elettrica attraverso i pezzi, nel punto in cui si vuole effettuare la saldatura. La saldatura per punti consiste nell'unire due lamiere mediante una successione di punti di saldatura intervallati, mentre nella saldatura continua si realizza, mediante elettrodi raffreddati ad acqua, una successione di punti sovrapposti.

Nella saldatura ad impulsi si esegue ciascun punto mediante una successione di impulsi di corrente; ciò si fa soprattutto per evitare il surriscaldamento degli elettrodi quando si saldano piastre molto spesse.

Il controllo elettronico della durata e dell'intensità della corrente nelle saldatrici, ha reso possibili delle saldature molto precise; metalli come l'alluminio e l'acciaio inossidabile si riescono a saldare industrialmente in modo soddisfacente solo grazie al controllo elettronico che consente tempi di saldatura della durata di pochi cicli.

Un controllo completo esegue un certo numero di operazioni automatiche di durata controllata. Esso in primo luogo spinge gli elettrodi contro il pezzo alla pressione voluta; questa operazione è detta *tempo di schiacciamento*. Quindi il controllo aziona gli interruttori ad ignitron (Fig. 14-50*a*) che si accendono per il *tempo di saldatura* che va da qualche ciclo ad alcuni secondi. Il trasformatore della saldatrice eleva la corrente di rete ad un valore che dipende dal materiale da saldare e che è generalmente dell'ordine di parecchie migliaia di ampere. Il passaggio di questa corrente produce calore nel punto in cui esistono le massime perdite ohmiche cioè in corrispondenza della giunzione fra i due pezzi; una parte del calore viene asportato per conduzione, ma il tempo di saldatura è ordinariamente così breve che solo nel punto di contatto fra i due pezzi viene raggiunta la temperatura di saldatura, sicché le superfici in lavorazione non si ammorbidiscono in maniera apprezzabile. Sono quindi necessari dei tempi di saldatura brevi in modo da lasciare al calore poco tempo per propagarsi. La pressione sui pezzi saldati viene mante-

nuta anche dopo la saldatura, in modo da lasciare che il metallo solidifichi.

Il tempo di saldatura e la corrente impiegata, sono funzioni dello spessore del pezzo, della sua resistività elettrica e della sua conduttività termica. Metalli ferrosi ad alta resistività si saldano facilmente, mentre l'alluminio ed il rame richiedono un trattamento più accurato. I materiali a bassa conduttività termica si saldano abbastanza facilmente perché il calore si propaga

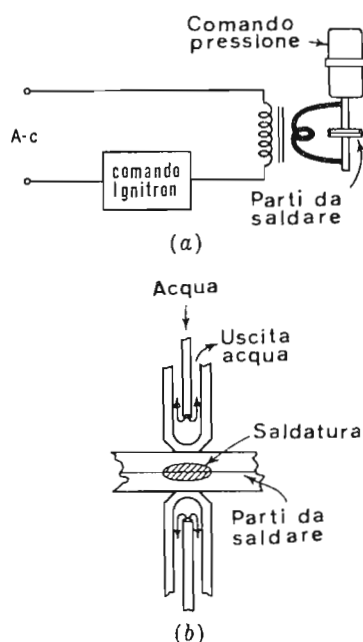



FIG. 14-50. — *a*) Circuito per saldatura a resistenza. *b*) Raffreddamento ad acqua degli elettrodi.

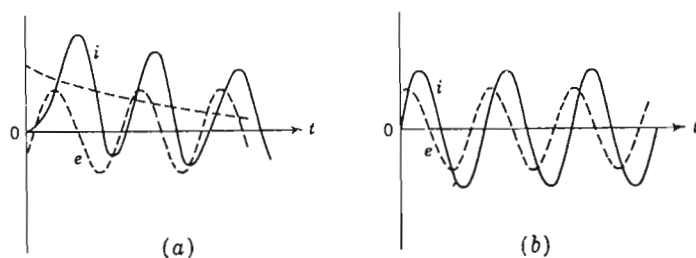



FIG. 14-51. — Transitori in circuiti a corrente alternata. *a*) Valore continuo dovuto ad una chiusura dei contatti in un istante errato. *b*) Chiusura in corrispondenza dell'istante in cui la corrente è nulla.

lentamente all'esterno della zona di saldatura. Per un controllo preciso del calore necessario per la saldatura, occorre che l'istante in cui inizia a circolare la corrente sia effettivamente quello in cui la corrente passa per lo zero, cioè che la conduzione inizi all'angolo corrispondente al fattore di potenza proprio del circuito; il controllo allora è *sincrono* e si evitano i transitori di corrente, come è mostrato in fig. 14-51. Nella saldatura *non sincrona*, la presenza di questi transitori fa variare l'entità del calore generato nei primi periodi il che porta ad una cattiva qualità della saldatura nel caso che questa avvenga in tempi molto brevi. Il funzionamento non sincrono è soddisfacente nel caso che il tempo di saldatura sia di parecchi cicli.

14-20. Controllo sincrono della saldatura.

L'innesco degli ignitron all'istante in cui la corrente passa spontaneamente per lo zero evita i transitori iniziali di corrente e quindi saldature di qualità non costante. Il controllo sincrono, di cui la fig. 14-52 mostra un esempio, permette di realizzare un innesco di questo tipo.

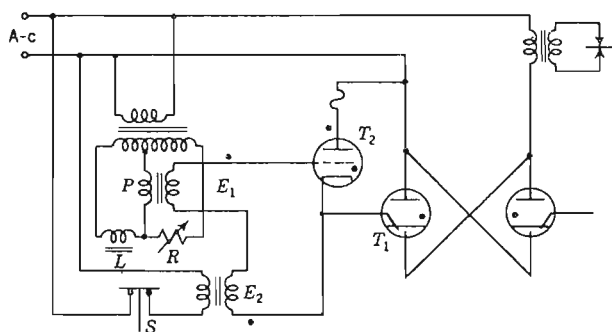



FIG. 14-52. — Circuito di controllo sincrono.

In sostanza il circuito è quello di un controllo a sfasamento, con un trasformatore di impulsi P che fornisce un picco di tensione di griglia E_1 al thyratron T_2. La tensione E_2 rende negativa la griglia nel semiperiodo in cui la tensione anodica è positiva su T_2, ed ha valore sufficiente a tenere T_2 interdetto. E_2 può essere annullata aprendo l'interruttore S e lasciando che il picco di E_1 agisca da solo nel circuito ed inneschi il thyratron in corrispondenza di un angolo determinato dal valore di R nel ponte a sfasamento. Il resistore R può essere regolato in modo da innescare l'ignitron nell'istante adatto perchè non vi siano transitori iniziali di corrente.

14-21. Circuito ad inseguimento.

I transitori dovuti ad un angolo di innesco inadatto, possono venire eliminati con il controllo sincrono descritto in precedenza. Una altra causa di riscaldamento irregolare, è dovuta all'ultimo semiperiodo della corrente di saldatura e può essere eliminata facendo circolare la corrente per multipli interi di un ciclo e con il primo semiperiodo sempre dello stesso segno.

Nel circuito di fig. 14-53, l'ignitron T_1 viene innescato per l'azione combinata di S e di un controllo sincrono di griglia, in modo che il primo semiperiodo di conduzione si verifica sempre quando L_2 è positivo. Durante questo semiperiodo, la tensione al secondario di TR_1 è applicata alla griglia di T_4 e la rende negativa. Nel semiperiodo successivo, questa tensione di griglia diventa positiva e superiore alla piccola tensione fissa E_{cc}. Tuttavia T_4 non si innesca immediatamente perchè T_1 conduce ancora dato che la saldatrice assorbe una corrente in ritardo, e la caduta nell'arco fra i punti A e B è troppo bassa perchè T_4 si ionizzi.

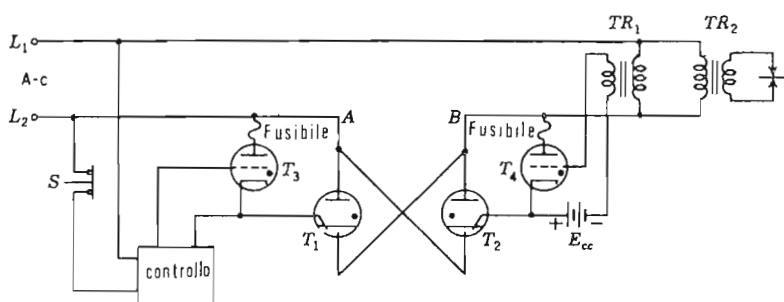



FIG. 14-53. — Circuito inseguitore.

All'istante in cui la corrente assorbita dalla saldatrice passa per lo zero, il thyratron T_4 si accende, e porta in conduzione l'ignitron T_2.

In ciascun ciclo la conduzione inizia nel tubo T_1 e quindi il tubo T_2 viene trascinato da questo e completa l'operazione di saldatura durante il semiperiodo di polarità opposta. Questo circuito rende più semplice il circuito di controllo in quanto occorre controllare solo il thyratron T_3 perchè T_4 segue sempre T_3 durante il funzionamento.

14-22. Regolazione del tempo di saldatura.

I circuiti finora esaminati consentono di accendere e spegnere la saldatrice ma non di regolare il tempo di saldatura. Questa funzione può essere facilmente realizzata controllando il tubo di comando T_3 mediante i tubi T_5 e T_6 come in fig. 14-54. Questo è un controllo di tipo industriale ed ha parecchie interessanti caratteristiche.

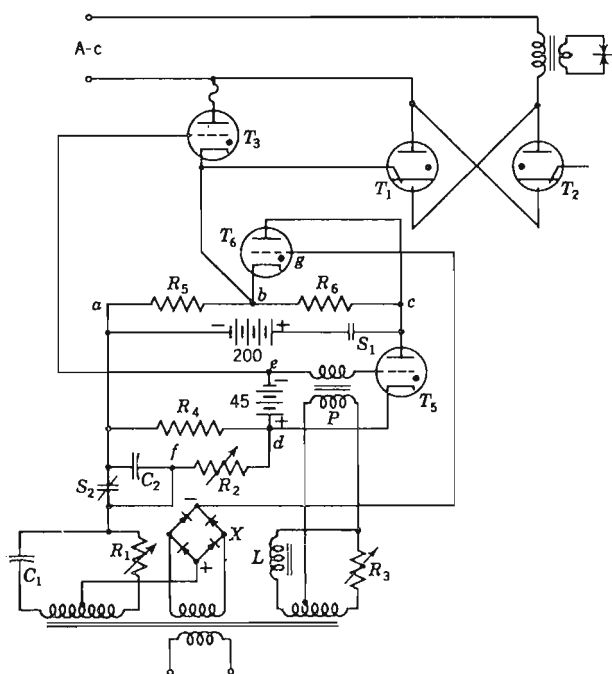



FIG. 14-54. — Temporizzatore sincrono.

Il tubo T_5 è detto *tubo di partenza,* il T_6 *tubo di arresto.* L'istante di innesco è controllato dal ponte a sfasamento costituito da L ed R_3 e l'intervallo di saldatura è determinato dall'aumento di tensione su C_2, che si carica attraverso R_2; quando questa tensione innesca il tubo T_6, il circuito smette di funzionare.

Il ciclo inizia quando vengono azionati i contatti S_1 ed S_2; S_1 alimenta gli anodi di T_5 e T_6 con tensione continua, mentre S_2 apre il circuito di scarica del condensatore C_2. Dopo la chiusura di S_1, il tubo T_5 si accende in corrispondenza del primo picco positivo prodotto dal trasformatore ad impulsi P, mentre l'angolo di innesco è regolato in modo da ottenere un funzionamento sincrono.

Prima che T_5 si inneschi, il potenziale del punto *b* e quindi del catodo di T_3 è a +100v rispetto al punto *a*, se R_5 ed R_6 sono uguali. Su R_4 non c'è caduta per cui i potenziali di *a* e di *d* sono uguali. Quando T_5 non è ancora innescato, la griglia di T_3 è a —45 volt rispetto ad *a* per cui la polarizzazione totale della griglia di T_3 è —145 volt. Quando T_5 si innesca, i punti *d* e *c* vengono collegati fra loro e la tensione fra *b* ed *e*, cioè fra catodo e griglia di T_3 è di $+ 100 - 45 = + 55$ volt, per cui anche T_3 si innesca. Ciò provoca l'innesco dell'ignitron T_1 e, se si fa uso del circuito ad inseguimento per T_2, entrambi i tubi condurranno finché T_3 conduce.

Quando T_5 è innescato ed il punto *d* è praticamente collegato a *c*, ai capi di R_2 e C_2 si trova tutta la tensione di alimentazione, ma, essendo C_2 inizialmente scarico, il punto *f* è al potenziale di *a* cioè —100 volt rispetto al catodo di T_3 (punto *b*). A causa della caduta di tensione esistente su R_4, il condensatore C_2 inizia a caricarsi attraverso R_2 ed il potenziale di *f* sale al disopra del valore di —100 volt. Si ha allora una componente continua, crescente nel tempo, sulla griglia del tubo di arresto T_6.

Oltre alla componente unidirezionale variabile, presente ai capi di C_2 ed R_2, vi è una componente alternata, sfasata, prelevata dal ponte formato da C_1 ed R_1, ed una tensione non filtrata proveniente dal raddrizzatore a doppia semionda X.

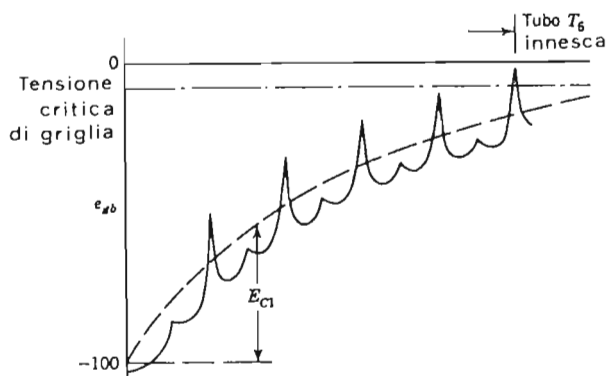



FIG. 14-55. — La durata della saldatura può essere regolata accuratamente mediante sovrapposizione di picchi di tensione.

La somma della componente alternata e di quella proveniente dal raddrizzatore è un'onda con dei picchi molto stretti in corrispondenza dei massimi positivi dell'onda alternata. Sommando quest'onda alla tensione presente ai capi di C_2, che cresce esponenzialmente, si ottiene una forma d'onda come quella di fig. 14-55, che costituisce la tensione griglia-catodo del tubo T_6, e_{gb}.

Trascorso il numero voluto di cicli di saldatura, un picco di tensione interseca la caratteristica di griglia del tubo di arresto T_6, il quale si innesca. Circola allora corrente attraverso R_5, il catodo di T_3 diventa più positivo per cui questo tubo non riesce più ad innescarsi e il ciclo di funzionamento termina. La caratteristica forma d'onda a picchi, di fig. 14-55 migliora notevolmente la precisione con cui viene regolato il tempo, in termini di cicli di conduzione.

14-23. Controllo del calore.

La bontà di una saldatura dipende non solo dal tempo ma anche dal valore della corrente.

Un ottimo sistema per controllare il valore della corrente e quindi per effettuare un *controllo del calore* è il controllo a sfasamento degli ignitron; in questo caso non è più possibile impiegare il circuito ad inseguimento perchè non c'è modo di ritardare l'istante di innesco del tubo che segue.

Impiegando il circuito con tubo di arresto in combinazione con un circuito a sfasamento e controllando entrambi gli ignitron, si riesce a conservare i vantaggi della conduzione per un numero intero di semiperiodi come nel circuito ad inseguimento.

Poichè gli stretti picchi positivi si presentano una sola volta in ogni ciclo, è possibile scegliere la polarità del trasformatore in modo tale da far apparire questi picchi nei semiperiodi in cui conduce il tubo T_2. Si innesca allora il tubo di arresto il quale impedisce al T_3 di innescare l'ignitron T_1 nel semiperiodo successivo. Si può progettare il circuito in modo che il funzionamento abbia inizio sempre con l'innesco di T_1 mentre il tubo di arresto interrompe la corrente sempre dopo un semiperiodo in cui abbia condotto T_2. Si ottiene così un tempo di conduzione dato da un numero intero di periodi, come del sistema ad inseguimento.

14-24. Sistemi di saldatura ad immagazzinamento di energia.

Le saldatrici monofasi che funzionano per brevi periodi di tempo, assorbono una potenza elevatissima della rete il che dà luogo ad eccessive cadute di tensione e quindi a fluttuazioni delle lampade.

Sono stati introdotti dei sistemi ad immagazzinamento di energia che assorbono una bassa energia media e che consentono di distribuire la potenza necessaria fra tutte e tre le fasi della rete.

In Fig. 14-56 è mostrato il principio di funzionamento di un sistema ad immagazzinamento dell'energia. Un raddrizzatore trifase ad ignitron fornisce la corrente continua i_1 al primario del trasformatore della saldatrice, una volta chiusi gli interruttori S_1, S_2, S_3. La corrente primaria

aumenta esponenzialmente a causa della forte induttanza del primario, e si induce al secondario una piccola corrente i_2 utilizzata per preriscaldare la saldatrice.

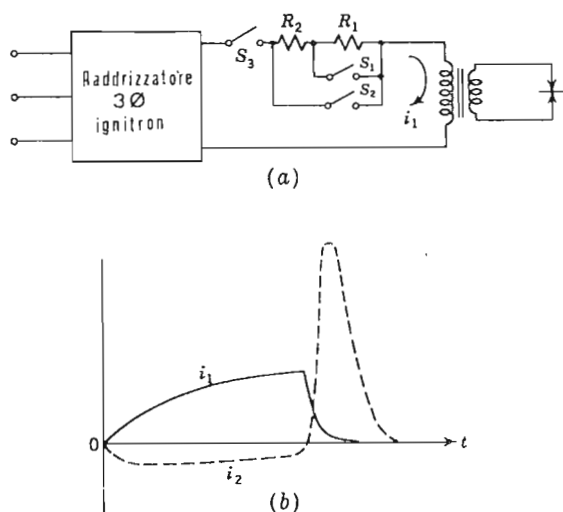



Fig. 14-56. — Saldatore ad immagazzinamento di energia.

Quando i_1 ha raggiunto un valore sufficientemente elevato, si aprono i contatti S_1, S_2, S_3, molto rapidamente, uno dopo l'altro. La rapida diminuzione di flusso magnetico induce una forte corrente secondaria attraverso gli elettrodi, come è mostrato in fig. 14-56 *b*, ed è questa sovracorrente a compiere l'operazione di saldatura.

L'energia ceduta alla saldatrice può essere controllata agendo sul valore della corrente i_1 in corrispondenza del quale si aprono i contatti. Un impulso molto breve è particolarmente adatto per saldare l'alluminio, che richiede una forte corrente per un tempo molto breve, a causa della sua bassa resistività unita ad un'alta conducibilità termica.

In Fig. 14-57 è mostrato un sistema analogo, in cui l'energia è immagazzinata in un condensatore. Il gruppo di condensatori C, di capacità variabile fra i 200 ed i 3.000 μF, viene caricato ad una tensione di qualche migliaio di volt attraverso un raddrizzatore controllato. Al momento della saldatura, l'energia immagazzinata nel gruppo di condensatori viene trasferita al primario del trasformatore della saldatrice, innescando l'ignitron T_1. L'impulso di corrente primaria produce una forte corrente secondaria di breve durata.

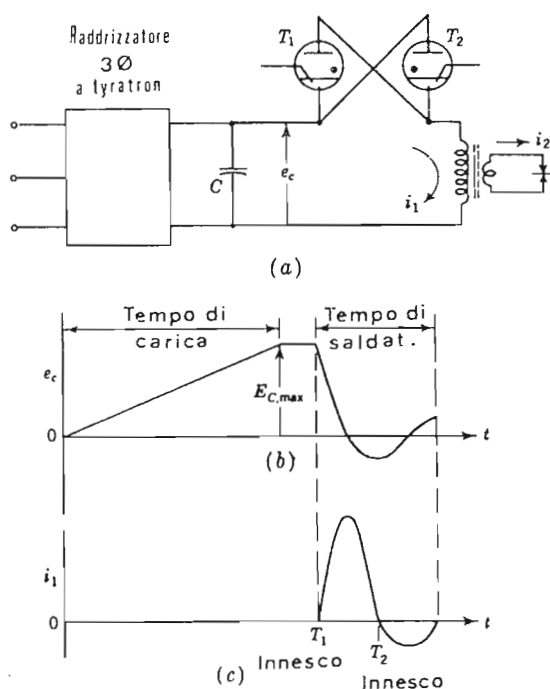



FIG. 14-57. — Saldatore ad immagazzinamento di energia elettrostatica.

Il circuito primario può essere un circuito risonante con una corrente primaria del tipo

$$i_1 = \frac{E_c}{\omega_0 L} \epsilon^{-R't/L} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

L'ignitron T_2 può essere innescato, col metodo del tubo inseguitore, dal semiperiodo di corrente inversa. Il circuito equivalente della saldatrice durante la scarica è quello di Fig. 14-58, in cui R' è la somma della resistenza primaria e del carico secondario riflesso al primario. La pulsazione naturale di questo circuito è data da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}}$$

Un controllo accurato di $E_{c,max}$ da parte del raddrizzatore controllato, permette di regolare l'energia fornita alla saldatrice in base all'espressione

$$W = \frac{CE^2}{2}$$

Occorrono anche altri controlli per invertire il primario del trasformatore, ed annullare il flusso residuo fra una saldatura e l'altra, in modo da evitare fenomeni transitori e saldature di qualità non costante.

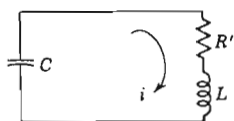



FIG. 14-58. — Circuito equivalente di un saldatore ad immagazzinamento di energia elettrostatica.

14-25. Sistemi di saldatura polifasi.

Un altro metodo per distribuire il carico su tutte e tre le fasi della rete di alimentazione, è il circuito polifase di Fig. 14-59. L'avvolgimento di ciascuna fase del trasformatore è controllato da una coppia di ignitron collegati in parallelo inverso, ma non controllati al solito modo.

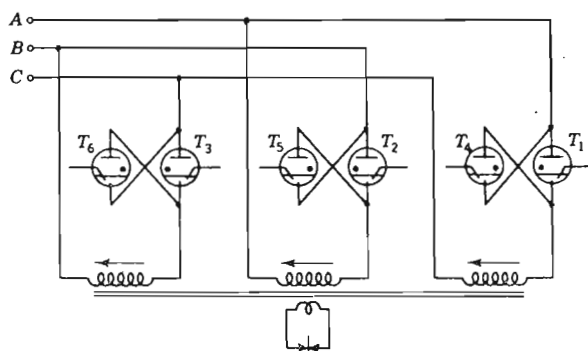



FIG. 14-59. — Saldatore trifase.

Se la successione delle fasi è A-B-C, tre dei tubi vengono innescati nell'ordine: T_1, T_2, T_3, T_1, T_2, T_3 durante un tempo corrispondente a due cicli, e forniscono due impulsi di corrente in ciascun avvolgimento nella direzione indicata dalle frecce. Durante gli altri due cicli, vengono innescati, uno dopo l'altro, T_4, T_5, T_6, T_4, T_5, T_6, e si ottengono due impulsi di corrente in ciascun avvolgimento, in direzione opposta a quella delle frecce.

Durante la prima sequenza si stabilisce una corrente secondaria in una certa direzione, mentre durante la seconda sequenza la corrente si inverte. Questo ciclo può ripetersi più volte a seconda del tempo occorrente per una saldatura completa.

La frequenza secondaria sarà pari ad 1/4 di quella della rete che alimenta il sistema e nella pratica può essere ridotta fino a circa 5 Hz modificando opportunamente la sequenza delle accensioni. Il circuito carica ugualmente le tre fasi mentre la bassa frequenza secondaria rende trascurabile la reattanza del secondario e del pezzo da saldare.

PROBLEMI

14-1. Un SCR in un circuito a semplice semionda, ha un valore limite di corrente di picco di 2,5 A ed un limite di 0,6 A per il valore medio. Con una tensione alternata di 240 v efficaci, trovare il minimo valore che può assumere la resistenza di carico perchè l'angolo di innesco possa variare da 0° a 90° senza che vengano superati i valori limite.

14-2. L'SCR del Problema 14-1 è controllato mediante un ponte a sfasamento ad RC a 60 Hz con $C = 5\ \mu F$. Calcolare in quale campo deve variare R. Se invece il circuito è del tipo RL, calcolare che valore deve avere L se la resistenza variabile R è quella prima calcolata.

14-3. Determinare il valor medio della corrente raddrizzata per l'SCR del circuito di fig. 14-19, con $R_L = 25\ \Omega$. La tensione di alimentazione sia 220 v efficaci, la R del circuito sfasatore sia 1600 Ω e $C = 0{,}5\ \mu F$.

14-4. Un SCR tipo 2N1909 porta una corrente media di 150 A ed un picco di 1000 A; quale ritardo dell'angolo di innesco si deve usare?

14-5. Il circuito di fig. 14-60 sfasa E_s di 90°. Il trasformatore è ideale e con rapporto $n_2/n_1 = 3$. Tracciare la curva di E_c in funzione dello sfasamento di E_s, con alimentazione a 60 Hz. Le resistenze del circuito vanno determinate facendo uso delle caratteristiche della 12 AT 7.

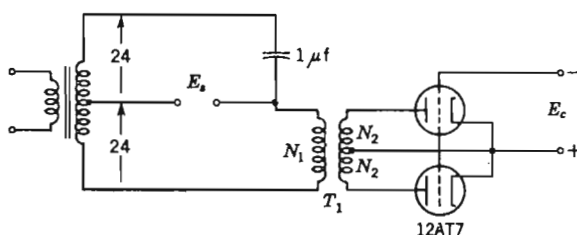



FIG. 14-60

14-6. Supponendo che la tensione critica di griglia di un tyratron sia nulla a tutte le tensioni e che in griglia sia applicata una tensione alternata di 24 v di picco sfasata di 90° in ritardo, e una polarizzazione in continua variabile fra —24 e +24 volt, calcolare il valore dell'angolo di innesco in funzione della polarizzazione in

continua e tracciare la curva della corrente anodica media, in percento del valore massimo, in funzione della polarizzazione di griglia.

14-7. Un Ignitron alimentato a 120 v efficaci, 60Hz, chiuso su di un carico di 100 Ω, viene innescato a 50° del periodo di tensione anodica. Si supponga che la caduta nel tubo sia di 20 v; calcolare (*a*) la corrente anodica media, (*b*) la potenza di ingresso, (*c*) la potenza dissipata nel tubo in watt, (*d*) il valore che si legge su di un amperometro in alternata posto in serie al carico.

14-8. Un circuito a semplice semionda con SCR, alimentato a 60Hz, alimenta un solenoide da 10 Ω, e 0,15H. Calcolare il valor medio e quello di picco della corrente per un angolo di innesco di 50°.

14-9. Partendo dall'Eq. (14-7), ricavare la (14-9) per la tensione continua di un circuito a doppia semionda.

14-10. Il trasformatore di una saldatrice, che assorbe 50 KVA, deve essere controllato da un circuito a 240 v, 60Hz mediante un trasformatore serie secondo lo schema di Fig. 14-40b. Se la tensione al primario del trasformatore serie è 220 v a secondario aperto, e se i tubi disponibili hanno un valore limite di 15.000 v di picco di tensione inversa, calcolare (*a*) corrente media per tubo, (*b*) tensione di isolamento e potenza apparente del trasformatore.

14-11. Un trasformatore per saldatrici ha una resistenza primaria di 0,15 Ω ed una costante di tempo di 40 sec. Calcolare a che valore di corrente si dovrebbero aprire i contatti in una saldatrice ad immagazzinamento elettromagnetico, alimentata a 500 v in continua, per eseguire una saldatura che richiede un'energia di 7500 watt · sec.

14-12. Per eseguire una certa saldatura occorrono 200 KVA per 0,05 sec; il fattore di potenza in ingresso è 0,75. Per la stessa saldatura si vuole ora impiegare una saldatrice con un condensatore di 2500 μF. A che tensione si deve caricare il condensatore?

14-13. Calcolare, per una saldatrice a condensatore, che valore di resistenza riflessa R', espressa in funzione di L e C, occorre se si vuole far circolare nella saldatrice una corrente unidirezionale.

14-14. L'ignitron GL-5553 è un tubo di tipo C. Calcolare l'utilizzazione percentuale quando alimenta una saldatrice da 750 KVA in un circuito in parallalo inverso; calcolare inoltre la corrente media che circola in ciascun tubo durante la saldatura, a 500 v.

14-15. Una saldatrice a punti ha i seguenti dati: 250 KVA, 500 v. Si devono con essa eseguire delle saldature comportanti 4 picchi di funzionamento della durata di 10 cicli, separate da intervalli di 20 cicli in cui la saldatrice è spenta, e quindi un intervallo di riposo di 140 cicli. Determinare il tipo di tubo da usare specificando il valore della corrente media calcolata nell'intervallo di funzionamento, il valore calcolato del tempo medio, il valore efficace della corrente assorbita.

14-16. Due ignitron montati in parallelo inverso, alimentano una saldatrice che assorbe 500 KVA a 500 v, 60 Hz. I tubi sono del tipo A. (*a*) calcolare il numero di cicli di conduzione che possono aversi in totale in ciascun tempo medio. (*b*) se la caduta nel tubo è 20 v ed il tubo è raffreddato con acqua a 15°C, quale sarà la temperatura di uscita dell'acqua se i tubi funzionano continuamente secondo il ciclo (*a*)? La portata d'acqua sia di 0,5 g/m.

BIBLIOGRAFIA

1. HULL A. W.: Hot Cathode Thyratrons, *Gen. Elec. Rev.*, **32:** 213, 390 (1929).
2. SLEPIAN J., and L. R. LUDWIG: A New Method of Initiating the Cathode of an Arc, *Trans. AIEE*, **52:** 693 (1933).
3. COBINE J. D.: "Gaseous Conductors," McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
4. MYERS H. C., and J. H. COX: Exercitation Circuits for Ignitron Rectifiers, *Trans. AIEE*, **60:** 943 (1941).
5. HOLUBOW H.: DC Saturable Reactors for Control Purposes, *Electron. Ind.*, March, 1945.
6. PALMER H. L.: Electronic Welding Control, *Electronics*, **10:** 20 (June, 1937).
7. BIVENS M. E.: Seam and Pulsation Welding Controls, *Electronics*, **15:** 55 (September, 1942).
8. CHUTE G. M.: "Electronic Control of Resistance Welding," Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1943.
9. BENDZ W. I.: "Electronics for Industry," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.
10. BICHSEL H. J., and E. T., HUGHES: An Improved Electronic Control for Capacitor-discharge Resistance Welding, *Trans. AIEE*, **63:** 1150 (1944).
11. ENGINEERS OF THE WESTINGHOUSE ELECTRIC CORP: "Industrial Electronics Reference Book," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
12. "SCR Manual," 3d ed., General Electric Company, Auburn, N.Y., 1964.
13. "Silicon Controlled Rectifier Designers' Handbook," Westinghouse Electric Corporation, Youngwood, Pa., 1964.
14. ALDRICH R. W., and N. HOLONYAK: Multiterminal PNPN Switches, *Proc. IRE*, **46:** 1236 (1958).
15. SYLVAN T. P.: Bistable Circuits Using Unijunction Transistors, *Electronics*, **31:** 89 (December, 1958).

Capitolo XV

CONTROLLO ELETTRONICO DEI MOTORI

Molte apparecchiature di controllo industriale hanno come scopo la realizzazione di uno spostamento, rotatorio o traslatorio. Ordinariamente, per ottenere questi spostamenti si fa uso di un motore elettrico.

Il motore a corrente alternata evita la complicazione di una alimentazione separata per la eccitazione, per cui viene spesso usato nel caso di piccoli motori. Per grandi motori, l'instabilità delle curve di velocità ed il basso rendimento del motore a corrente alternata, hanno indotto i progettisti a preferire il motore a corrente continua eccitato in derivazione. Il motore a corrente continua ad eccitazione indipendente ha un'ottima caratteristica di velocità ed è facilmente controllabile, con alto rendimento, a mezzo di circuiti elettronici.

Benché la combinazione tubi, o SCR, e motore sia costosa, essa consente di effettuare altri controlli oltre quello della velocità e della coppia e ciò giustifica il costo più elevato di questo sistema. Inoltre il controllo elettronico rende possibile l'alimentazione di motori a corrente continua direttamente dalla rete di alimentazione, evitando la necessità di generare la corrente continua separatamente.

In questo capitolo si esaminano alcuni dei principi fondamentali che vengono applicati per il controllo elettronico dei motori.

15-1. Equazioni del motore a corrente continua.

In base al circuito equivalente di fig. 15-1*a* si possono scrivere le seguenti espressioni per le tensioni esistenti in un motore a corrente continua ad eccitazione indipendente.

$$E_{dc} - I_{dc}R_a - E_a = 0 \qquad (15\text{-}1)$$

$$E_a = K_1 \Phi_f N \qquad (15\text{-}2)$$

In cui E_a = contro f.e.m. del motore,
Φ_f = flusso di eccitazione,
N = velocità,
R_a = resistenza di armatura,
K_1 = costante di proporzionalità

L'induttanza L dell'armatura non ha effetto in condizione di regime di corrente.

Dalle Eq. (15-1) e (15-2) si ottiene

$$N = \frac{E_{dc} - I_{dc}R_a}{K_1\Phi_f} \qquad (15\text{-}3)$$

Aumentando I_{dc}, ad ecitazione Φ_f costante, la velocità diminuisce all'aumentare del carico a causa dell'aumento della caduta $I_{dc}R_a$ nell'armatura, come è mostrato dalla curva (1) di fig. 15-1*b*. Se si annullasse in qualche modo l'effetto della caduta $I_{dc}R_a$ e se si rendesse trascurabile l'effetto della reazione di armatura dal flusso di eccitazione, si otterrebbe la curva ideale (2) della velocità in funzione della corrente.

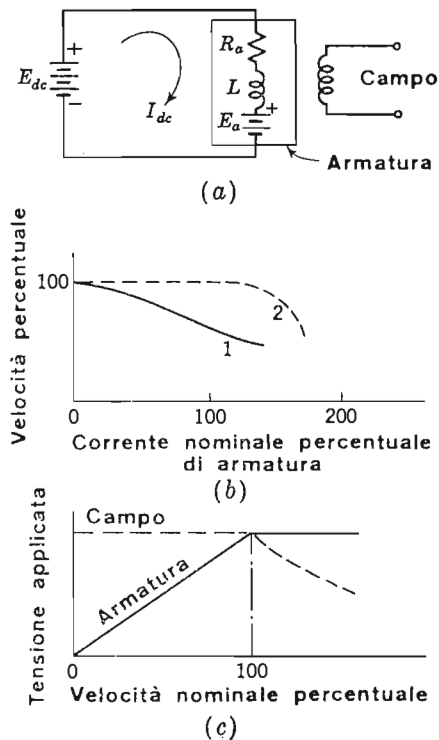



FIG. 15-1. — (*a*) Circuito equivalente di un motore ad eccitazione indipendente. (*b*) Caratteristiche velocità - corrente. (*c*) Caratteristica velocità - campo - tensione.

La velocità N alla quale il motore ruota, quando si applicano ad esso tensione e corrente di armatura nominali, con la massima corrente di ecci-

tazione, prende il nome di *velocità nominale* o *velocità base*. In queste condizioni, la coppia T e la potenza meccanica di uscita (hp), sono legate dall'equazione

$$hp = \frac{2\pi NT}{33.000} \qquad (15\text{-}4)$$

Poichè il flusso non può essere aumentato in maniera apprezzabile a causa della saturazione del nucleo magnetico della macchina, è chiaro che l'unico mezzo con cui si può ridurre la velocità del motore al disotto del valore nominale, è quello di ridurre la tensione applicata E_{dc}. L'Eq. (15-3) indica che esiste una relazione lineare fra E_{dc} e la velocità, come è mostrato in fig. 15-1*c*. Allora un circuito di controllo della velocità deve fornire un mezzo per variare E_{dc}.

Nel funzionamento dei motori, per evitare il riscaldamento dell'armatura, non deve essere superato il valore nominale della corrente di armatura. Aumentare la velocità al disopra del valore nominale, aumentando la tensione applicata E_{dc}, con eccitazione costante, richiederebbe correnti più elevate di quelle nominali; ciò ordinariamente non è consentito. Tuttavia l'Eq. (15-3) indica che lo stesso risultato può essere ottenuto riducendo il flusso di eccitazione, funzione questa che può venire assegnata ai circuiti di controllo elettronici.

Si osservi che

$$T = K_2 \Phi_f I_{dc} \qquad (15\text{-}5)$$

è una relazione fondamentale fra la coppia T, il flusso di eccitazione e la corrente di armatura. Se si riduce il flusso, occorre ridurre anche la coppia di carico, se la corrente di armatura non deve superare un dato valore.

Il funzionamento del motore può essere diviso in due zone, quella al disotto della velocità nominale e quella al disopra di essa. Nella regione al disotto della velocità nominale, con il normale flusso di eccitazione e con I_{dc} fissato al valore massimo, dall'Eq. (15-5) si vede che la coppia massima ha un valore costante. Al disopra della velocità nominale, quando si riduce Φ_f mentre I_{dc} rimane costante al valore nominale, l'Eq. (15-5) mostra che la coppia diminuisce all'aumentare della velocità, e quindi dall'Eq. (15-4) si ricava che questa è una regione in cui è costante la potenza meccanica ottenibile in uscita. Talora si usa designare queste due regioni come regione a *coppia costante* ed a *potenza meccanica costante*, e non perchè il funzionamento avviene a questi valori limite costanti, ma perchè sono queste grandezze a fissare i limiti di funzionamento.

15-2. Alimentazione di un motore a corrente continua mediante SCR.

La maggior parte dei motori alimentati con rettificatori sono di potenza compresa fra una frazione di cavallo ed alcuni cavalli, e sono alimentati con sorgenti monofase come è mostrato in fig. 15-2. SCR_1 ed SCR_2 forniscono all'armatura del motore una corrente continua controllata ed i diodi D_1 e D_2 alimentano il circuito di eccitazione indipendente.

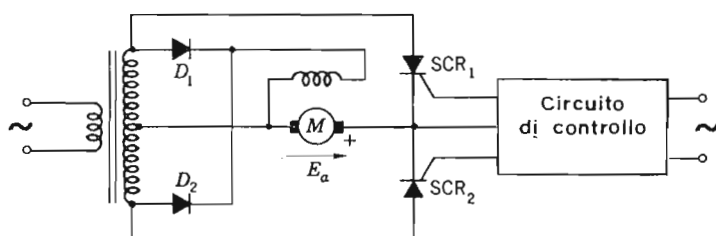



FIG. 15-2. — Raddrizzatore controllato per un motore a corrente continua.

La fig. 15-3 mostra le forme d'onda di tensione e corrente di armatura per un angolo di innesco θ_1, ritardato onde rendere discontinua la conduzione malgrado la presenza dell'induttanza di armatura. Immediatamente prima dell'istante di innesco θ_1, la corrente è nulla e la tensione di armatura è uguale alla contro f.e.m. E_a. L'SCR_1 si innesca all'istante θ_1 e la tensione di armatura sale al valore e_1. La corrente di armatura comincia allora a crescere lentamente a causa dell'induttanza di armatura e circola fino all'angolo θ_2, in corrispondenza del quale la conduzione cessa.

Dall'esame del circuito risulta evidente che la tensione complessivamente disponibile nel circuito è solo $e_1 - E_a$ cioè $E_m \operatorname{sen} \omega t - E_a$. Solo durante l'intervallo da θ_1 a θ_x, in cui $E_m \operatorname{sen} \omega t = E_a$, la tensione applicata può produrre una corrente positiva nel circuito. La rimanente parte del periodo di conduzione, da θ_x a θ_2, è dovuto alla tensione Ldi/dt che deriva dalla diminuzione di corrente nell'induttanza di armatura.

Se si anticipa θ_1, aumenterà la tensione media con conseguente incremento di velocità. Se aumenta la coppia resistente del motore, dovrà aumentare la corrente di armatura secondo l'Eq. (15-5) il che può accadere solo attraverso una diminuzione di E_a dato che l'angolo θ_1 è fisso. Poiché la corrente circola solo per un breve intervallo, la f.e.m. E_a deve diminuire più di quanto sarebbe necessario se il motore fosse alimentato con continuità da una sorgente a corrente continua. Poiché E_a è proporzionale alla velocità, un aumento della coppia resistente ha un effetto sfavorevole sulla regolazione di velocità in quanto la curva velocità-corrente [(1) di fig. 15-1*b*] ha

una pendenza maggiore di quella che avrebbe se il motore fosse alimentato a corrente continua. Ciò accentua l'esigenza di porre un controllo di velocità nel sistema motore — raddrizzatore di controllo.

Durante il funzionamento di un motore alimentato da un raddrizzatore, la corrente può passare da discontinua a continua, secondo la velocità, l'angolo di innesco, l'induttanza dell'armatura *. Questa situazione è analoga a quella esaminata al paragrafo 14-4 per i raddrizatori controllati con carichi induttivi. Poiché il caso in esame differisce solo perché si considera l'effetto di E_a, qui si tratteggerà solo brevemente lo studio della corrente di armatura, iniziando dal caso di conduzione discontinua.

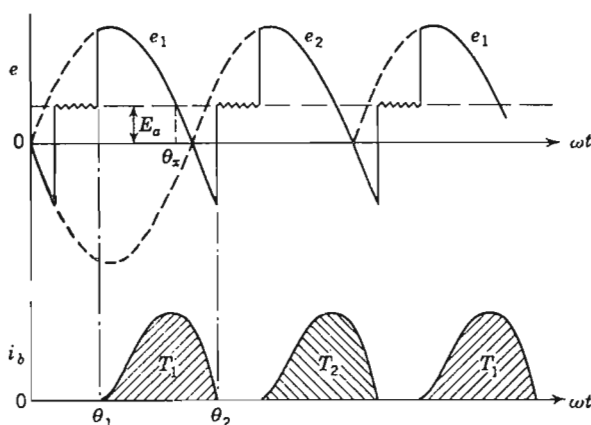



FIG. 15-3. — Forme d'onda in un motore alimentato da un raddrizzatore controllato.

Per il motore di fig. 15-1 *a* e per la forma d'onda di corrente di fig. 15-3, si ha la seguente equazione differenziale, durante la conduzione:

$$L \frac{di_b}{dt} + R_a i_b = E_m \text{ sen } \omega t - E_a \tag{15-6}$$

che ha una soluzione del tipo

$$i_b = A\epsilon^{-R_a t/L} + \frac{E_m}{\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L^2}} \text{ sen } (\omega t - \Phi) - \frac{E_a}{R_a} \tag{15-7}$$

in cui

$$\Phi = \text{arctg } \frac{\omega L}{R_a} \tag{15-8}$$

* Per esempio, per un motore a corrente continua da 230 v 1 hp, la resistenza di armatura è 6,6 Ω, l'induttanza è 0,05 H.

Si può definire un nuovo coefficiente $a = E_a/E_m$. Poiché $E_a = K_1\Phi_f N$, a sarà direttamente proporzionale alla velocità N per cui si può indicare come *coefficiente di velocità*. La costante A può essere calcolata osservando che, per $\omega t = 0$, $i_b = 0$, per cui l'espressione di i_b è

$$i_b = \frac{E_m}{R_a}\left\{\frac{R_a}{\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \Phi) - a + \left[a - \frac{R_a}{\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\theta_1 - \Phi)\right] \epsilon^{-(R_a/\omega L)(\omega t - \theta_1)}\right\} \tag{15-9}$$

Dall'Eq. (15-8) si ha:

$$\cos \Phi = \frac{R_a}{\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L^2}} \tag{15-10}$$

cosicché

$$i_b = \frac{E_m}{R_a}\{\cos \Phi \operatorname{sen}(\omega t - \Phi) - a + [a - \cos \Phi \operatorname{sen}(\theta_1 - \Phi)]\epsilon^{-(R_a/\omega L)(\omega t - \theta_1)}\} \tag{15-11}$$

che è verificata nell'intervallo di tempo $\theta_1 \leq \omega t \leq \theta_2$, nell'ipotesi che $\theta_1 >$ $>(\theta_2 - \pi)$ cioè che la conduzione sia discontinua; in tal caso si ha:

$$\epsilon^{R_a \theta_2/\omega L} \frac{\cos \Phi \operatorname{sen}(\theta_2 - \Phi) - a}{\cos \Phi \operatorname{sen}(\theta_1 - \Phi) - a} = \epsilon^{R_a \theta_1/\omega L} \tag{15-12}$$

Questa equazione può essere risolta graficamente in funzione dei parametri θ_1, a, $\omega L/R_a$ come è mostrato nella fig. 15-4 che è analoga alla fig. 14-15. La maggiore complessità è dovuta alle diverse famiglie di curve che si hanno al variare del parametro a.

Si osservi che un SCR non può essere innescato in corrispondenza di istanti successivi o precedenti a quelli per cui $E_m \operatorname{sen} \omega t = E_a$ perché ciò renderebbe la tensione anodica negativa rispetto al catodo. Perciò il più basso angolo di innesco è

$$\theta_{1min} = \operatorname{arcsen} a$$

Quest'angolo pone un limite a tutte le curve $\omega L/R_a$ di una famiglia corrispondente ad un dato a, come è indicato dal limite verticale tracciato sulle famiglie per $a = 0{,}8$ ed $a = 0{,}4$.

Il più alto angolo di innesco si ha quando

$$\theta_{1max} = \pi - \operatorname{arcsen} a$$

Questa relazione determina la linea tratteggiata che da $a = 1{,}0$ e $\theta_1 = 90°$ è diretta in alto a destra verso il punto $a = 0$ e $\theta_1 = 180°$.

Per un angolo di conduzione maggiore di 180°, cioè per $(\theta_2 - \theta_1) \geq \pi$, si avrebbe una conduzione continua e lo studio precedente, basato su impulsi di corrente distinti, non sarebbe valido. Una retta limite per $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ tratteggiata in figura a partire da $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 180°$ e diretta verso l'alto a destra, delimita quindi la zona di conduzione continua.

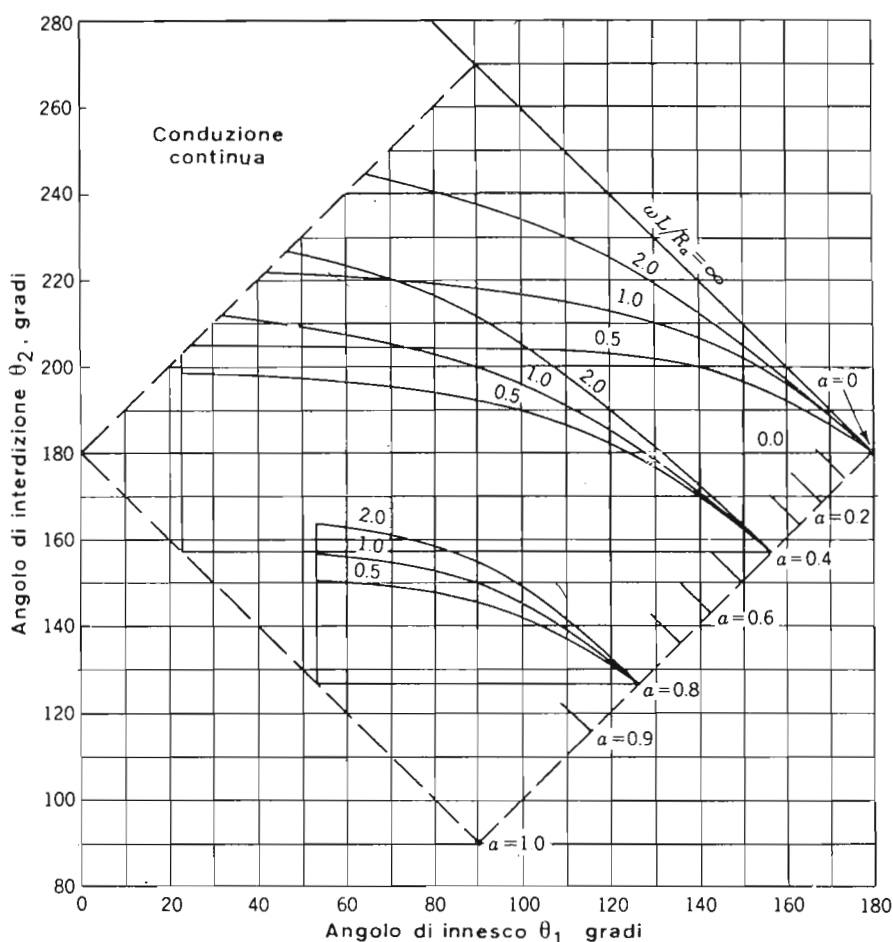



FIG. 15-4. — Angolo di interdizione θ_2 in funzione dell'angolo di innesco θ_1.

Si può anche studiare la corrente nel caso di conduzione continua, partendo dall'Eq. (15-6) e notando che le condizioni da imporre per calcolare A sono diverse. Nel caso di conduzione continua, come in fig. 15-5, $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

Scrivendo l'Eq. (15-7) per $\omega t = \theta_1$ e per $\omega t = \theta_2 = \theta_1 + \pi$ ed uguagliando

le due espressioni si ottiene

$$A = \frac{(2E_m/\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L^2})\ \text{sen}\ (\theta_1 - \Phi)}{(\epsilon^{-R_a \pi/\omega L} - 1)\epsilon^{R_a \theta_1/\omega L}} \tag{15-13}$$

Per cui alla fine si può scrivere i_b nel caso di conduzione continua

$$i_b = \frac{E_m}{R_a}\left[\cos\Phi\ \text{sen}\ (\omega t - \Phi) - a - \frac{2\cos\Phi\ \text{sen}\ (\theta_1 - \Phi)}{1 - \epsilon^{-R_a \pi/\omega L}}\ \epsilon^{-(R_a/\omega L)\ (\omega t - \theta_1)}\right] \tag{15-14}$$

Questa è l'espressione della forma d'onda di corrente di fig. 15-5. La conduzione continua si ha ogni volta che il valore teorico di θ_2 è maggiore di $\theta_1+\pi$. Il valore effettivo di θ_2 per conduzione continua può essere preso uguale a $\theta_1+\pi$.

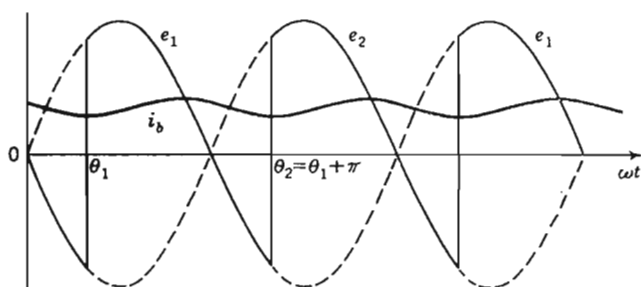



FIG. 15-5. — Corrente e tensione nel caso di conduzione continua.

Si osservi che le forme d'onda di corrente hanno un apprezzabile contenuto di armoniche, per cui $I_{rms} > I_{dc}$. Per una data coppia media, che sarà proporzionale ad I_{dc}, il motore, se alimentato da un raddrizzatore, funzionerà ad una temperatura interna più alta di quella che si avrebbe se fosse alimentato in continua. Ai motori che funzionano con raddrizzatori controllati si usa ridurre le prestazioni massime; per esempio, una macchina da 1 hp viene considerata da 3/4 hp.

15-3. Relazioni fra velocità e coppia.

L'Eq. (15-1) fornisce le relazioni relative al circuito di un motore ad eccitazione separata alimentato da una linea in continua. Essa può essere normalizzata rispetto alla tensione applicata E_{dc}:

$$1 - \frac{I_{dc} R_a}{E_{dc}} - \frac{E_a}{E_{dc}} = 0 \tag{15-15}$$

Il secondo termine può essere riscritto come segue:

$$\frac{I_{dc}}{E_{dc}/R_a}$$

Il cui denominatore è la corrente di armatura a rotore bloccato. Dall'Eq. (15-5) si vede che la coppia è proporzionale alla corrente, nell'ipotesi che non vi sia reazione di armatura e che l'eccitazione Φ_f sia costante. Conviene definire il *coefficiente di coppia*:

$$T_{dc} = \frac{T}{T_0} = \frac{I_{dc}}{E_{dc}/R_a} \tag{15-16}$$

che esprime il rapporto fra la coppia effettiva e la coppia a rotore bloccato del motore collegato ad una linea in continua.

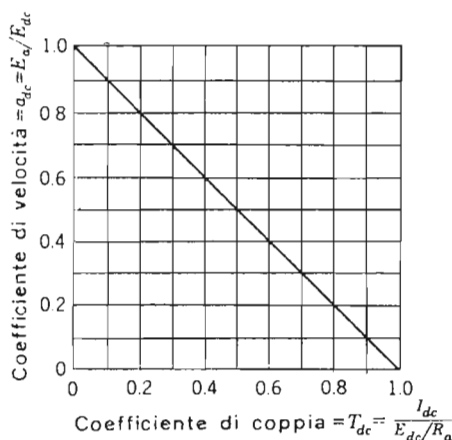



FIG. 15-6. — Caratteristica teorica velocità-coppia di un motore alimentato in continua (si è trascurata la reazione d'armatura).

La contro f.e.m. E_a è proporzionale alla velocità come indicato nella Eq. (15-2), ancora nell'ipotesi che non vi sia reazione di armatura. Nel caso di alimentazione in continua, si può definire un *coefficiente di velocità*:

$$a_{dc} = \frac{E_a}{E_{dc}} \tag{15-17}$$

cioè il rapporto fra la velocità effettiva e la massima velocità teorica alla quale la contro f.e.m. è E_{dc}. Questo termine è ovviamente legato a quello già impiegato nel caso di motore alimentato con rettificatori, $a=E_a/E_m$.

Dall'Eq. (15-15):

$$\frac{I_{dc}}{E_{dc}/R_a} + \frac{E_a}{E_{dc}} = 1 \tag{15-18}$$

$$T_{dc} + a_{dc} = 1 \tag{15-19}$$

In fig. 15-6 è tracciato un diagramma di a_{dc} in funzione di T_{dc}; esso rappresenta la curva teorica velocità-coppia di un motore alimentato da una linea in continua. Se si può ottenere una caratteristica simile per un motore alimentato da raddrizzatori si può effettuare il paragone con quello che funziona con una normale alimentazione in continua. Questa curva può essere ottenuta ricavando I_{dc}, anche se nel funzionamento discontinuo la coppia del motore sia impulsiva. In realtà, l'inerzia del motore e del carico appiattiscono queso andamento impulsivo per cui si ottiene una coppia media proporzionale ad I_{dc}. Con riferimento al circuito equivalente di fig. 15-1 *a*, la corrente continua non produrrà cadute ai capi dell'induttanza; allora si ha:

$$I_{dc} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{E_m \operatorname{sen} \omega t - E_a}{R_a} d(\omega t) \tag{15-20}$$

per il motore alimentato da raddrizzatori di fig. 15-2 e tenendo conto del raddrizzamento a doppia semionda. La forma d'onda effettiva della corrente è quella di fig. 15-3 con conduzione discontinua.

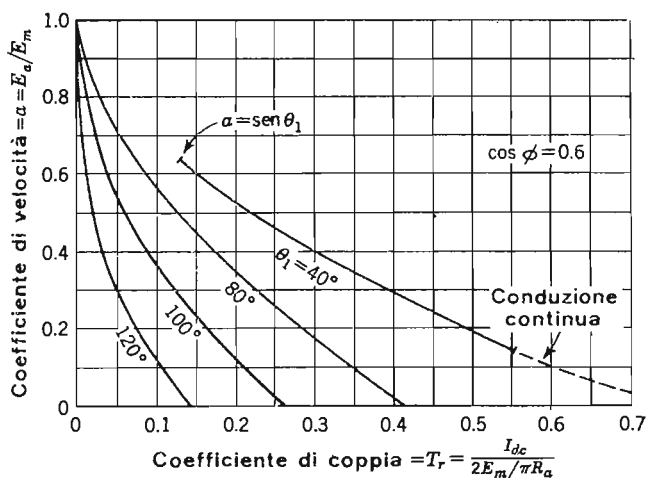



FIG. 15-7. — Curve teoriche velocità-coppia di un motore alimentato da un raddrizzatore controllato; cos $\varphi = 0{,}6$.

Sostituendo $a = E_a/E_m$ ed integrando,

$$I_{dc} = \frac{E_m}{\pi R_a} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2 - a(\theta_2 - \theta_1)] \tag{15-21}$$

che si può modificare come segue

$$\frac{I_{dc}}{2E_m/\pi R_a} = \frac{1}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2 - a(\theta_2 - \theta_1)] \tag{15-22}$$

Il rapporto $2E_m/\pi R_a$ è la corrente del raddrizzatore a doppia semionda che circola nella resistenza di armatura a rotore bloccato. Si può allora dire che l'Eq. (15-22) è il rapporto fra la coppia motrice T in condizioni di funzionamento e la coppia T_o a rotore bloccato. Si può ora definire di nuovo il coefficiente di coppia dell'Eq. (15-16) nel caso di alimentazione con raddrizzatore

$$T_r = \frac{T}{T_o} = \frac{I_{dc}}{2E_m/\pi R_a} \tag{15-23}$$

Quindi

$$T_r = \frac{I_{dc}}{2E_m/\pi R_a} = \frac{1}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2 - a(\theta_2 - \theta_1)] \tag{15-24}$$

E poiché *a* è il coefficiente di velocità del motore alimentato con raddrizzatore, l'espressione ora scritta è una relazione adimensionale fra coppia e velocità nel caso di conduzione discontinua dei raddrizzatori.

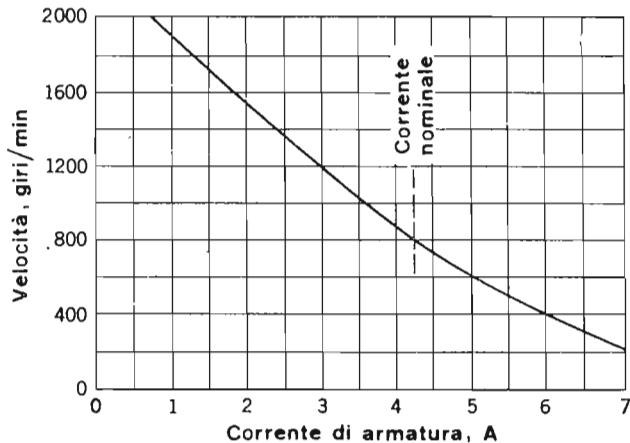



FIG. 15-8. — Curva effettiva velocità-coppia per un raddrizzatore con θ_1 costante; motore da 1 HP, 1750 giri/min. e alimentazione a 220 volt.

Nel caso di conduzione continua, la corrente media sarà data dall'Eq. (15-20) con $\theta_2 = \theta_1 + \pi$. Si ottiene allora

$$I_{dc} = \frac{E_m}{\pi R_a} (2 \cos \theta_1 - a\pi) \tag{15-25}$$

che è proprio l'Eq. (15-21) con $\theta_2 = \theta_1 + \pi$. Il coefficiente di coppia per conduzione continua è allora:

$$T_r = \frac{I_{dc}}{2E_m/\pi R_a} = \cos\theta_1 - \frac{a\pi}{2} \tag{15-26}$$

È possibile riportare in diagramma le curve della velocità in funzione della coppia per un motore controllato in base alle Eq. (15-24) e (15-26), utilizzando i dati della fig. 15-4.

Queste curve sono mostrate in fig. 15-7; in fig. 15-8 è riportata una curva ricavata sperimentalmente per confermare l'andamento delle curve teoriche.

I raddrizzatori non possono iniziare a condurre se non quando il termine $E_m \operatorname{sen} \omega t - E_a$ dell'Eq. (15-20) è positivo. Ciò si verifica solo per $a \leq \operatorname{sen}\theta_1$, il che fissa un limite sulle curve per $\theta_1 = 80^0$ e 40^0. Per quest'ultima curva, dato che sen $40^0 = 0{,}64$, il raddrizzatore non si innesca per valori di $a > 0{,}64$ e la curva per $\theta_1 = 40°$ termina in corrispondenza di questo valore.

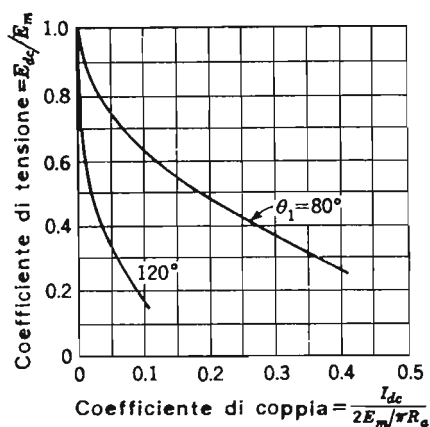



FIG. 15-9. — Caratteristiche teoriche tensione-coppia di un motore alimentato da un raddrizzatore controllato; $\cos\varphi = 0{,}6$.

La tensione media necessaria ai capi della armatura è

$$E_{dc} = E_a + I_{dc}R_a$$

e, dividendo per E_m

$$\frac{E_{dc}}{E_m} = \frac{E_a}{E_m} + \frac{I_{dc}R_a}{E_m} = a + \frac{2}{\pi} T_r \tag{15-27}$$

La tensione di armatura necessaria per azionare un motore controllato è allora espressa in termini di un coefficiente di tensione adimensionale.

$$v_a = \frac{E_{dc}}{E_m} = a + \frac{2}{\pi} T_r \qquad (15\text{-}28)$$

In fig. 15-9 è riportata una curva di v_a in funzione del coefficiente di coppia. T_r. Questa curva permette di valutare la tensione occorrente per avere una determinata coppia in uscita. La fig. 15-10 è una curva ricavata sperimentalmente per un raddrizzatore controllato che alimenta un motore; essa conferma la fig. 15-9.

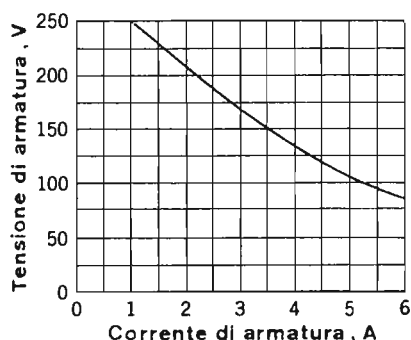



FIG. 15-10. — Caratteristica sperimentale tensione-coppia per θ_1 = cost., per un motore da 1 HP, 1750 giri/min. e alimentazione a 220 volt.

15-4. Regolazione della velocità mediante controllo della corrente di armatura.

In un motore serie, una variazione della coppia provoca una variazione della corrente di ingresso; è possibile misurare la corrente ed impiegare questa misura per variare l'angolo di innesco dell'SCR, in modo da migliorare la regolazione della velocità; il circuito di fig. 15-11 è adatto per piccoli motori in alternata.

Il motore è posto in serie nel circuito di alimentazione di un raddrizzatore a ponte; quest'ultimo fornisce al circuito di controllo una corrente unidirezionale raddrizzata. L'SCR, nel circuito di controllo, costituisce un carico variabile per l'uscita in continua del ponte. Al variare dell'angolo di innesco, varia il carico rappresentato dall'SCR e la corrente fornita al motore risulta controllata.

Il ponte appare come una piccola resistenza in serie al motore, al quale viene così applicata la tensione di rete meno la caduta ai capi dell'SCR e di R_1. Quando l'istante di innesco dell'SCR viene ritardato regolando manual-

mente il valore di R_3, il motore rallenta; quando invece il controllo agisce in modo da anticipare l'istante di innesco, al motore viene fornita una maggiore corrente.

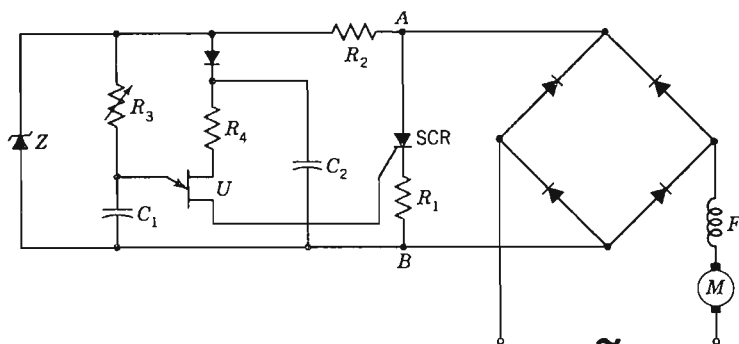



FIG. 15-11. — Controllo in corrente della velocità del motore.

Il condensatore C_1 si carica tendendo alla tensione del diodo Zener Z, ma quando raggiunge la tensione di innesco di U, il transistore unigiunzione fa scattare l'SCR e C_1 si scarica parzialmente attraverso U ed R_1. Ora, mentre l'SCR conduce, la tensione fra A e B scende al disotto del livello Z e la tensione applicata a C_1 attraverso R_2 ed R_3 dipende dalla tensione fra A e B che a sua volta dipende dalla corrente che circola nel motore. Quanto maggiore è la corrente nel motore durante l'intervallo di conduzione, tanto più alta sarà la tensione ai capi di C_1 quando l'SCR smette di condurre, alla fine del ciclo alternativo. Dopo di che il condensatore riprenderà nuovamente a caricarsi, tendendo al livello dello Zener, e provocando ancora lo scatto di U.

Un'alta tensione ai capi di C_1 al termine del periodo di conduzione dell'SCR, implica che si raggiungerà molto rapidamente il livello di scatto del transistore unigiunzione, e che innescherà in anticipo l'SCR nel successivo semiperiodo. Si vede che quanto maggiore è la corrente nel motore, tanto più l'SCR si innesca in anticipo, con che si fornisce al motore la maggiore corrente necessaria per mantenere costante la velocità del motore all'aumentare della coppia. Il valore di R_1 può essere calcolato sperimentalmente; un valore troppo alto provoca un aumento della velocità all'aumentare della coppia e porta all'instabilità.

15-5. Regolazione della velocità mediante controllo della tensione di armatura.

Se si mantiene costante la contro f.e.m., la velocità del motore rimarrà costante salvo l'effetto della reazione di armatura. La tensione di

armatura differisce dalla contro f.e.m. solo per la caduta IR di armatura, che ordinariamente è piccola. Questo è il principio su cui si fonda il circuito di fig. 15-12.

Il diodo Zener Z costituisce un riferimento rispetto al quale si confronta la somma della tensione di armatura E_a e della tensione ai capi di C. Il resistore R_1 fissa la velocità dato che controlla il tempo di carica di C. Il diodo D_2 impedisce che la corrente di carica venga fornita attraverso il circuito di armatura.

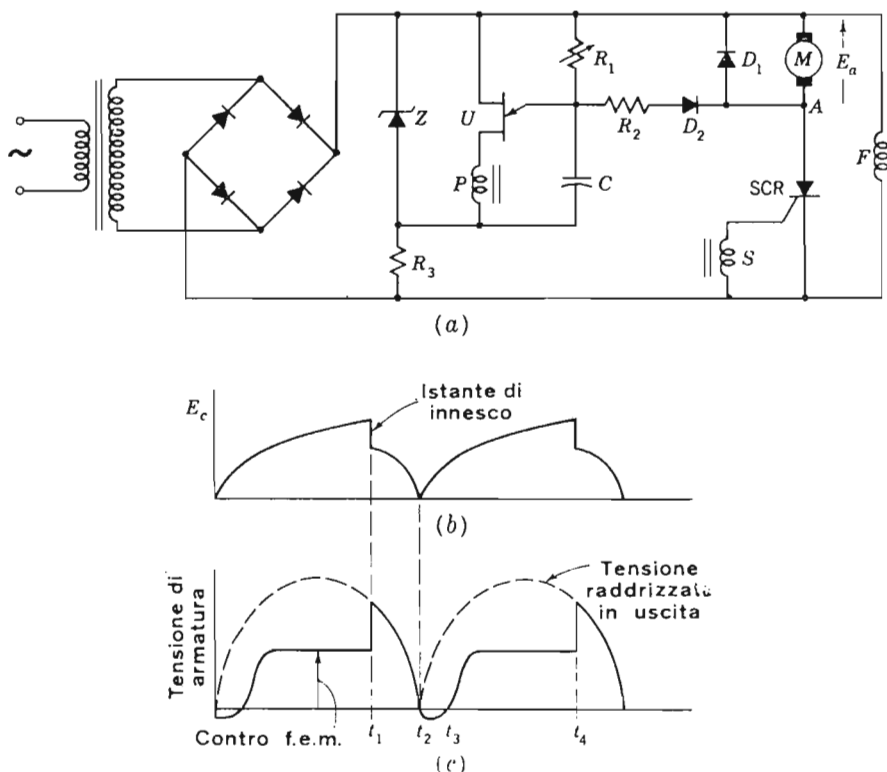



FIG. 15-12. — (a) Circuito per il controllo della velocità. (b) Tensione all'emettitore di U. (c) Tensione dell'armatura.

Quando all'istante t_1 il transistore unigiunzione innesca l'SCR, viene fornita all'armatura una tensione fino alla fine del semiperiodo raddrizzato della tensione di alimentazione. L'SCR si interdice in corrispondenza dello istante in cui la tensione è nulla, ma l'energia induttiva immagazzinata nella armatura, annullandosi sostiene una corrente attraverso D_1 fino all'istante t_3. Ciò è analogo a quanto accade per i diodi posti ai capi dei carichi induttivi, come si è esaminato in precedenza. La caduta ai capi di D_1 assicura che D_2

durante questo intervallo è bloccato e che C si carica attraverso R_1 come è mostrato in fig. 15-12*b*. All'istante t_3, l'energia induttiva è stata dissipata e la tensione di armatura cresce tendendo al valore E_a della contro f.e.m. Il diodo D_2 ora è direttamente polarizzato e la corrente di carica di C viene shuntata attraverso R_2. L'efficacia dell'azione di D_2 dipende da E_a, quindi la tensione ai capi di C è controllata in modo che la velocità con cui essa cresce dipende dalla f.e.m. inversa. Cioè

$$E_C + iR_2 + E_a = E_Z$$

e la corrente *i*, sottratta dalla corrente di carica di C, è la variabile che crea la condizione di equilibrio. Cosicché l'istante t_4 di innesco dell'SCR dipende, ed è controllato, da E_a, cioè dalla velocità del motore.

FIG. 15-13. — Regolazione della tensione di armatura per il controllo della velocità, col metodo del reattore saturabile.

In effetti, anche l'istante di innesco dell'SCR è controllato dalla coppia prodotta dal motore. Con carichi meccanici piuttosto elevati, il motore rallenta, riducendo E_a ed assorbendo più corrente. L'abbassamento di E_a riduce l'effetto di shunt su C nell'intervallo fra t_3 e t_4 e quindi permette a C di caricarsi più rapidamente e di raggiungere la condizione di innesco in anticipo durante il ciclo. Una maggiore corrente di armatura, che indica un aumento del carico, comporta un immagazzinamento maggiore di energia induttiva nel motore e quindi un allungamento dell'intervallo t_2, t_3 durante il quale essa viene dissipata, mentre C, non essendo shuntato, si carica rapi-

damente attraverso R_1. Il condensatore C si scarica quindi da t_1 a t_2 attraverso D_2 e l'SCR ed in questo modo si riporta in condizione di misurare la velocità e la coppia nel semiperiodo successivo.

Un circuito di controllo di questo tipo può essere realizzato anche con thyratron. Nel circuito di fig. 15-13, per esempio, la tensione che indica la velocità è prelevata ai capi di R_1 e paragonata con la tensione fissa esistente su R_2. La tensione differenza è amplificata dall'amplificatore in continua, T_1 e T_2, ed è impiegata per controllare il reattore saturabile SR. Se la velocità è inferiore a quella normale, la tensione differenza rende negativa la griglia di T_2. Ciò rende positivo il punto X e la griglia di T_1 ed aumenta la corrente di saturazione di SR. L'angolo di innesco dei thyratron viene anticipato e ciò aumenta la corrente di armatura e la velocità del motore, finché la tensione ai capi di R_1, che indica la velocità, non eguaglia la tensione fissa ai capi di R_2. Si otterranno delle alte velocità del motore spostando verso sinistra il cursore di R_1, basse velocità spostandolo verso destra.

15-6. Compensazione della caduta di tensione.

Dato che la tensione di armatura è la somma di E_a ed $I_{dc}R_a$, essa non rappresenta esattamente la velocità. È però possibile eseguire elettronicamente la sottrazione di $I_{dc}R_a$ dalla tensione di armatura in modo da far dipendere il controllo di velocità solo dalla contro f.e.m.

FIG. 15-14. — Segnale di compensazione della caduta IR ottenuto da un trasformatore di corrente.

Un circuito che può svolgere questa funzione è quello di fig. 15-14, in cui si impiega un trasformatore di corrente CT per ottenere una tensione secondaria proporzionale alla corrente del motore. I due primari eliminano la componente continua e sommano le correnti dei due raddrizzatori. La rettificazione della corrente secondaria rende l'uscita ai capi di R_5 proporzionale alla corrente che circola nel motore. Una frazione dell'uscita viene poi introdotta nel circuito di misura di fig. 15-14 in modo da alterare la tensione che indica la velocità.

L'ingresso al tubo T_2 tra griglia e catodo, applicato nel modo indicato in fig. 15-14 è fornito da una caduta di potenziale su R_1 proporzionale ad $E_a +$ $+ I_{dc}R_a$, con in serie un'aliquota del potenziale presente su R_2 ed una aliquota di quello presente su R_5 proporzionale ad $I_{dc}R_a$. Il segnale effettivo di tensione è proporzionale ad E_a ed è equilibrato dalla tensione di riferimento presente su R_2.

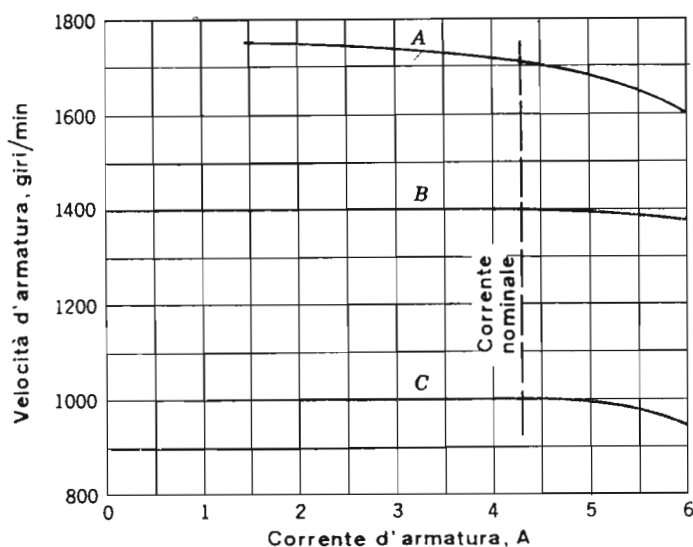



FIG. 15-15. — Funzionamento di un regolatore di velocità.

La caratteristica interessante di questo circuito consiste nell'impiego di una tensione fissa di riferimento su R_2. La regolazione su R_1 fatta in base alla contro f.e.m. dà luogo ad una tensione di ingresso al sistema di controllo $E_a + I_{dc}R_a$ costante a tutte le velocità. Poichè il valore della corrente e l'ampiezza di $I_{dc}R_a$ saranno gli stessi ad ogni velocità, il riferimento, E_a e la compensazione della caduta IR sono sempre mantenute al valore esatto qualunque sia l'effettiva velocità del motore.

È evidente che i circuiti esaminati non consentono un controllo di velocità di grande precisione, essi contengono però le variazioni entro qualche percento. In fig. 15-15 sono riportati i risultati che si ottengono per diversi valori di velocità.

15-7. Limitazione della corrente di armatura.

È relativamente semplice proteggere il motore ed i raddrizzatori da sovracorrenti dovute all'avviamento o al funzionamento con carico eccessivo.

La fig. 15-16 mostra come sia possibile inserire un limitatore di corrente nel circuito studiato in precedenza. Il limitatore di corrente è costituito dal tubo T_6 e dal resistore di controllo R_6, mentre la polarizzazione è realizzata attraverso R_2. Il tubo T_2 che controlla la velocità ed il T_6, limitatore di cor-

Fig. 15-16. — Controllo della corrente.

rente, utilizzano entrambi l'uscita del rettificatore T_5 posto a valle del trasformatore di corrente, ed hanno segnali in ingresso opposti in fase. Un aumento della corrente di armatura tende a portare la griglia di T_6 verso valori più positivi mentre, a causa della caduta IR, rende più negativa la griglia di T_2.

Entro il normale campo di funzionamento, cioè con un carico compreso fra zero ed il 150% di quello nominale, R_2 polarizza oltre l'interdizione il

tubo T_6 che pertanto non dà uscita. Entro questi limiti il tubo T_2 controlla la velocità nel modo prima descritto. Quando la corrente di armatura supera il valore massimo prefissato, il tubo T_6 inizia a condurre, dato che la tensione positiva ai capi di R_6 aumenta. T_6 presenta un guadagno molto più alto di T_2 per cui il suo effetto predomina nel determinare la tensione di griglia di T_1. Ne segue che appena T_6 rende più negativa la griglia di T_1, la corrente nella reattanza saturabile SR diminuisce e l'angolo di innesco ritarda. Si evita così che la corrente di armatura superi un certo limite. Il funzionamento è mostrato in fig. 15-17; si noti che il motore può essere fermato senza che la corrente superi il 200% del valore normale.

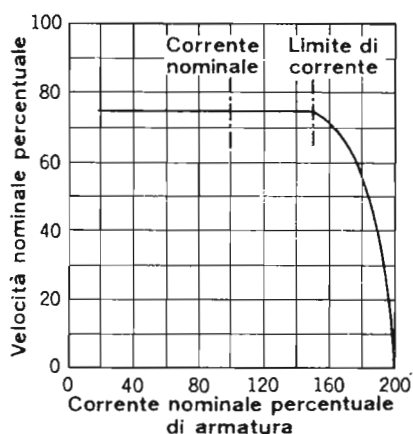



FIG. 15-17. — Effetto del circuito limitatore di corrente.

All'avviamento la corrente di armatura è nulla e non c'è tensione ai capi di R_6, il tubo T_6 è interdetto e l'angolo di innesco dei raddrizzatori è molto anticipato, di conseguenza il limitatore di corrente non influisce sull'ampiezza del primo semiperiodo della corrente che circola nei raddrizzatori. Si aggiunge pertanto uno speciale circuito protettivo, costituito da R_7, C_3, dall'interruttore S e da una tensione ausiliaria, per controllare la corrente di avviamento. L'interruttore S normalmente è chiuso e carica C_3 alla tensione E_1, positiva sulla griglia di T_6. All'istante in cui si chiudono i contatti sulla rete, l'interruttore S si apre lasciando una tensione positiva ai capi di C_3, per cui il tubo T_6 conduce, provocando l'interdizione di T_1 e ritardando l'angolo di innesco dei raddrizzatori tanto che essi non conducono affatto.

Il condensatore C_3 si scarica quindi attraverso R_7 ed R_6 per cui rapidamente la corrente in T_6 comincia a decrescere portando T_1 in conduzione e quindi anticipando l'angolo di innesco. Quando C_3 è del tutto scarico, esiste già una tensione su R_6 che controlla T_6 e che limita la corrente nel

modo normale. La costante di tempo di C_3 e dei resistori ad esso connessi dovrebbe essere pari a qualche ciclo soltanto, in modo da consentire al circuito limitatore di corrente di assicurare rapidamente il controllo dell'angolo di innesco.

In fig. 15-18 è mostrato l'effetto che si ha controllando la corrente di armatura durante i primi semiperiodi. Nei primi cinque semiperiodi la corrente viene inizialmente mantenuta al massimo valore consentito, finché non è terminato il periodo di accelerazione; dopo di che T_2 ed il circuito che controlla la velocità, assumono il controllo della corrente di armatura.

15-8. Controllo tachimetrico della velocità.

I motori di piccola potenza presentano elevate resistenze ed una scarsa capacità intrinseca di regolare la propria velocità; per essi non sono sufficienti i circuiti finora esaminati, se si vuole un controllo accurato della velocità. Occorre un mezzo che misuri effettivamente la velocità del motore, paragonandola poi con un riferimento standard, invece di dedurla indirettamente.

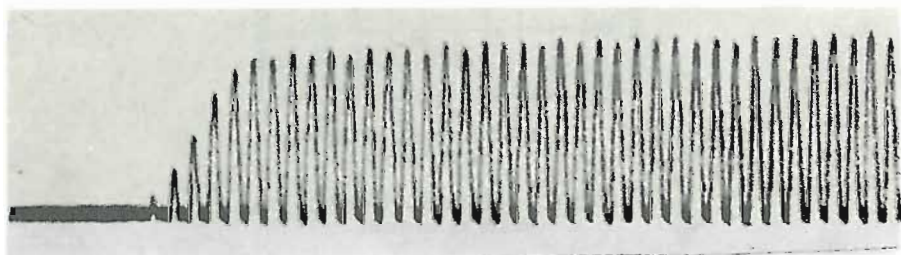



FIG. 15-18. — Impulsi della corrente durante la partenza, con il limitatore di corrente.

Un sistema di questo tipo è mostrato in fig. 15-19; esso è costituito da un piccolo generatore tachimetrico in continua, quasi sempre a magnete permanente, il quale fornisce una f.e.m. proporzionale alla velocità. Il generatore tachimetrico è accoppiato all'albero del motore che si vuole controllare, la tensione prodotta dal tachimetro viene confrontata con una tensione stabile di riferimento, il cui valore E_r è una funzione nota della velocità. La differenza fra E_r e la tensione del tachimetro E_t viene amplificata e costituisce il segnale che controlla il raddrizzatore principale in modo da riportare la velocità al valore voluto.

Se l'amplificatore in continua ha un guadagno sufficiente, è possibile regolare la velocità con un errore inferiore all'1%. Le variazioni di temperatura e della tensione di rete hanno un effetto trascurabile dato che entra in gioco direttamente la misura della velocità.

Si realizzano dei sistemi di controllo completi comprendenti limitatori della corrente di armatura e misuratori tachimetrici della velocità. Sorge naturalmente il problema della stabilità, dato che il sistema è reazionato; esso verrà studiato nel prossimo capitolo.

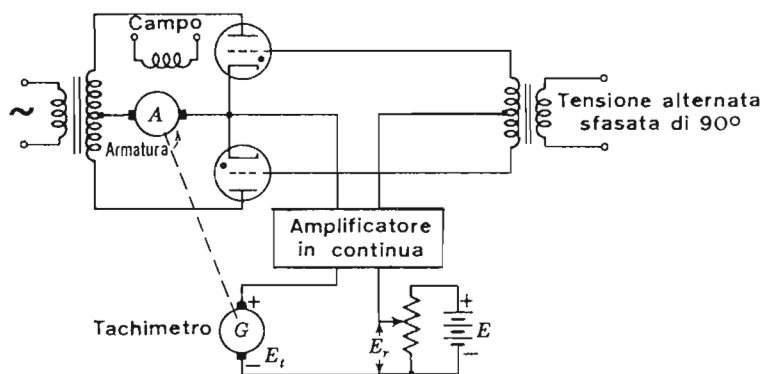



FIG. 15-9. — Controllo della velocità mediante tachimetro.

15-9. Controllo di un motore a corrente alternata di piccola potenza.

Il controllo di motori di piccola potenza a corrente alternata, monofase o bifase, costituisce un'applicazione elettronica di una certa importanza per gli strumenti registratori e per i sistemi di controllo. Questi motori sono di solito destinati a far variare una resistenza che equilibria un ponte, oppure ad azionare il pennino di un registratore o a variare la posizione di una valvola o di qualche altro dispositivo meccanico. Il motore ruota ad intermittenza nel verso adatto per equilibrare il ponte o il potenziometro rispetto alla variabile di ingresso, con velocità che dipende dalla ampiezza, o dalla velocità, con cui la variabile si discosta dal valore voluto.

Occorre fornire a questi piccoli motori informazioni riguardo la velocità ed il verso di rotazione, mediante circuiti elettronici. Queste informazioni vengono ordinariamente fornite al circuito di controllo dall'ampiezza e dalla fase della grandezza in ingresso.

In fig. 15-20 è riportato un semplice circuito di controllo adatto a motori monofase con condensatore. In esso, per controllare il motore, si fa uso delle reattanze saturabili S_1 ed S_2 pilotate da transistori.

Quando la tensione di base di T_1 è più positiva di quella di T_2, in T_1 circola una corrente più elevata che in T_2 ed il reattore S_1 presenta una caduta minore di quella presentata da S_2. L'avvolgimento di eccitazione F_1 risulta quindi eccitato direttamente, mentre F_2 è parzialmente eccitato da S_1

attraverso il condensatore, si ottiene così una coppia di avviamento in un ben determinato verso. Quando predomina la conduzione in T_2, l'avvolgimento F_2 è eccitato direttamente, mentre F_1 è alimentato attraverso il condensatore, ed il motore ruota in senso contrario.

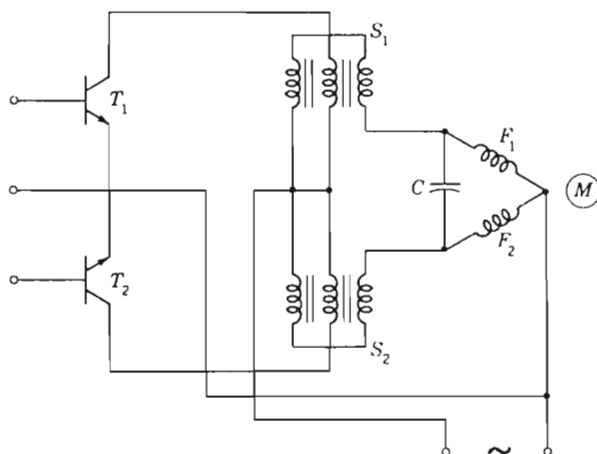



FIG 15-20. — Controllo di un piccolo motore a corrente alternativa.

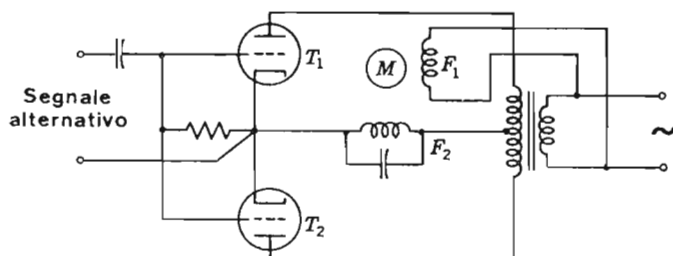



FIG. 15-21. — Circuito di controllo di un piccolo motore con rivelatore di fase.

Un altro circuito è riportato in fig. 15-21. Esso è adatto ad un motore bifase ed impiega una tensione anodica alternativa, con gli anodi polarizzati in senso opposto ed un unico segnale di ingresso. Ciascun tubo paragona la fase della tensione di ingresso con quella della propria tensione anodica, e conduce quel tubo che ha entrambe queste tensioni positive rispetto al catodo. Si realizza così l'inversione del senso di rotazione del motore in base alla fase del segnale di ingresso. Un circuito di questo tipo è adatto ad essere pilotato mediante un ponte in alternata, nel quale una variazione di fase di 180° indica l'allontanamento in un verso o nell'altro dalla posizione di equilibrio.

15-10. Circuiti indicatori di fase.

Nei circuiti esaminati ultimamente si è fatto uso di rivelatori di fase per ottenere informazioni riguardo una direzione o una polarità; questi circuiti appartengono tutti alla categoria dei rivelatori di fase. Questi circuiti, di cui in fig. 15-22 si riporta uno schema di principio, sono comunemente impiegati con diversi sistemi indicatori.

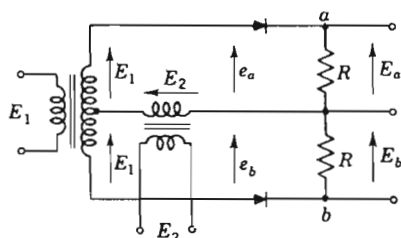



FIG. 15-22. — Rivelatore di fase.

Al circuito vengono applicati due segnali alternativi di valore efficace rispettivamente E_1 ed E_2, di ugual frequenza ma di fase arbitraria. Si possono definire queste tensioni come segue

$$e_1 = E_{1m} \text{ sen } \omega t \qquad (15\text{-}29)$$
$$e_2 = E_{2m} \text{ sen } (\omega t + \Phi) \qquad (15\text{-}30)$$

in cui Φ generalmente è zero o 180°. Nel circuito secondario, le tensioni e_a ed e_b sono date da:

$$e_a = E_{1m} \text{ sen } \omega t + E_{2m} \text{ sen } (\omega t + \Phi) \qquad (15\text{-}31)$$
$$e_b = E_{1m} \text{ sen } \omega t - E_{2m} \text{ sen } (\omega t + \Phi) \qquad (15\text{-}32)$$

Se si suppone che i diodi abbiano caratteristiche dinamiche identiche e lineari, il che è verificato se $r_p \ll R$, le tensioni di uscita, dopo il raddrizzamento, saranno

$$E_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} E_{1m} \text{ sen } \omega t \, d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} E_{2m} \text{ sen } (\omega t + \Phi) \, d(\omega t)$$

ed

$$E_b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} E_{1m} \text{ sen } \omega t \, d(\omega t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} E_{2m} \text{ sen } (\omega t + \Phi) \, d(\omega t)$$

Eseguendo l'integrazione e ponendo $b=E_{2m}/E_{1m}$ si ottiene

$$E_a = \frac{E_{1m}}{\pi}(1 + b \cos \Phi) \tag{15-33}$$

$$E_b = \frac{E_{1m}}{\pi}(1 - b \cos \Phi) \tag{15-34}$$

Cioè l'ampiezza delle due tensioni rispetto al punto comune dipende dall'angolo Φ e, se $b=1$, l'uscita varierà fra zero e $2E_{1m}/\pi$ in entrambi i sensi al variare di Φ fra zero e 180°.

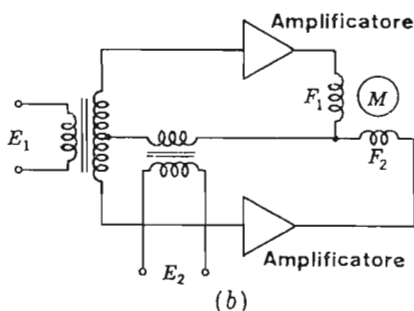
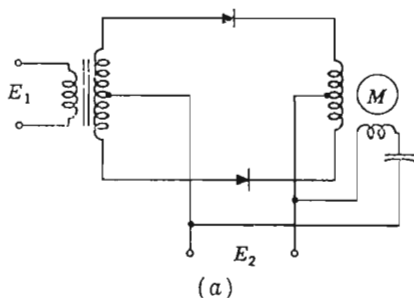



FIG. 15-23. — Controllo di un motore a.c. mediante rivelatore di fase.

In fig. 15-23 è mostrata l'applicazione di un circuito di questo tipo al controllo di un motore bifase. Il circuito di fig. 15-23*b* utilizza un angolo $\Phi = \pm 90°$ ed il motore rivela la fase direttamente, senza l'intervento dei raddrizzatori. Questo circuito è comunemente impiegato nei servomeccanismi.

Il rivelatore di fase prima descritto si trasforma in un utile indicatore di fase se viene modificato nel modo indicato in fig. 15-24; in questo caso i raddrizzatori devono avere una caratteristica quadratica, per cui occorre che sia $r_p \gg R$. Si può allora supporre che

$$i_b = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 \tag{15-35}$$

e se e_a ed e_b sono quelli delle equazioni (15-31) e (15-32) la corrente nei diodi sarà

$$i_{b1} = a_0 + a_1E_{1m} \operatorname{sen} \omega t + a_1E_{2m} \operatorname{sen} (\omega t + \Phi) + a_2E_{1m}^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + 2a_2E_{1m}E_{2m} \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \Phi) + a_2E_{2m}^2 \operatorname{sen}^2 (\omega t + \Phi) \quad (15\text{-}36)$$

$$i_{b2} = a_0 - a_1E_{1m} \operatorname{sen} \omega t + a_1E_{2m} \operatorname{sen} (\omega t + \Phi) + a_2E_{1m}^2 \operatorname{sen}^2 \omega t - 2a_2E_{1m}E_{2m} \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \Phi) + a_2E_{2m}^2 \operatorname{sen}^2 (\omega t + \Phi) \quad (15\text{-}37)$$

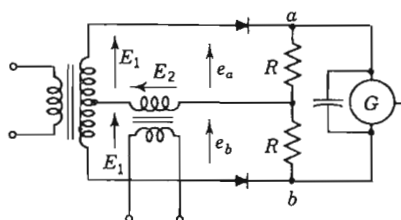



FIG. 15-24. — Indicatore di fase.

Queste correnti produrranno fra i terminali a-b una tensione risultante data da

$$e_{ab} = (i_{b1} - i_{b2})R = 2a_1E_{1m}R \operatorname{sen} \omega t - a_2E_{1m}E_{2m}R \cos (2\omega t + \Phi) + a_2E_{1m}E_{2m}R \cos \Phi \quad (15\text{-}38)$$

Un condensatore può cortocircuitare la fondamentale e la seconda armonica, per cui rimane solo la componente continua:

$$E_{ab} = a_2E_{1m}E_{2m}R \cos \Phi \quad (15\text{-}39)$$

Se E_{1m} ed E_{2m} sono rese costanti mediante un circuito limitatore, la tensione E_{ab} sarà proporzionale a $\cos\Phi$, cioè al fattore di potenza, ed uno strumento indicatore, posto fra *a* e *b*, può misurare l'angolo Φ. Un circuito di questo tipo, con l'uscita in corto circuito agli effetti delle componenti alternative, può anche essere impiegato per alimentare il sistema di controllo di fig. 15-20.

PROBLEMI

15-1. Nel circuito di fig. 15-2 c'è un motore da 3/4 hp. La resistenza di armatura è 2,48 Ω, l'induttanza è 0,021 H. Il motore, provato alimentando l'armatura con tensione continua a 115 Volt, ruota a 1800 giri/minuto ed assorbe una corrente di 5,7 A. Calcolare e tracciare la curva T/T_0 in funzione del coefficiente di velocità *a* per $\theta_i = 90°$ quando questo motore è alimentato con degli SCR. La tensione totale sul secondario del trasformatore è 300 V.

15-2. Lo stesso motore del problema 15-1 viene fatto funzionare ad una velocità di 1000 giri/minuto mediante SCR. Calcolare la corrente media.

15-3. Spiegare in che modo si può utilizzare il circuito compensatore della caduta RI.

15-4. Calcolare il rapporto I_{rms}/I_{dc} per il motore del problema 15-1 con $\theta_1 = 80°$ ad una velocità di 1700 giri/minuto.

BIBLIOGRAFIA

1. VEDDER E. H., and K. P. PUCHLOWSKI: Theory of rectifier-D-C- Motor Drives, *Trans. AIEE*, **62**: 863 (1943).
2. MOYER E. E.: Electronic Control of D-C Motors, *Electronics*, **16**: 98 (May, 1943), 119 (June, 1943), 118 (July, 1943), 133 (September, 1943), 128 (October, 1943).
3. SCHMIDT A. Jr.: Operating D-C Motors from Controlled Rectifiers, *Elec. Eng.*, **67**: 516 (1948).
4. ENGINEERS OF THE WESTINGHOUSE ELECTRIC CORPORATION: "Industrial Electronics Reference Book," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
5. "Silicon Controlled Rectifier Manual," 3d ed., General Electric Company, Rectifier Components Department, Auburn, N. Y., 1964.
6. "Silicon Controlled Rectifier Designers' Handbook," Westinghouse Electric Corporation, Youngwood, Pa., 1964.
7. HELMICK C. G., and I. M. MACCONALD: Adjustable Frequency A-C Drive System with Static Inverter, *Westinghouse Eng.*, 123 (July, 1961).

CAPITOLO XVI

SERVOMECCANISMI

L'uomo, con i suoi tempi di risposta specificamente lunghi costituisce un fattore limitante sia per la prontezza che per la complessità di parecchi apparati moderni; pertanto, la sua sostituzione con un controllo automatico è di notevole importanza.

Nel progetto di sistemi di controllo automatici si impiegano frequentemente dei dispositivi elettronici adatti a funzionare ad alta velocità. Quasi tutti questi sistemi sono reazionati ed i metodi di analisi che si impiegano sono simili a quelli studiati da Black, Nyquist e Bode e già visti per gli amplificatori reazionati. Questa impostazione rende l'analisi ed il progetto dei servomeccanismi e degli altri sistemi di controllo molto semplice per coloro che lavorano nel campo dell'elettronica industriale.

16-1 Servomeccanismi e controlli.

Un *sistema a ciclo aperto* è un sistema di controllo nel quale l'uscita non viene confrontata con l'ingresso, cioè non si fa uso della controreazione. Per esempio, un generatore destinato ad alimentare un laboratorio è installato lontano da questo con il suo reostato di eccitazione. La scala del reostato è tarata in valori di tensione di linea, ma non è installato alcun voltmetro che dia l'indicazione effettiva di tale tensione. Il progettista suppone che la tensione fornita al laboratorio sia quella indicata dalla taratura originaria del reostato. In effetti questa taratura non può dare affidamento, poichè la tensione può venire modificata dal carico, dalla velocità del generatore, dalla tensione disponibile per l'eccitazione e da altre variabili. Non si effettua alcuna misura sulla grandezza controllata, cosicchè il funzionamento è quello di un sistema a ciclo aperto.

Se nel laboratorio si dispone di un voltmetro capace di misurare la tensione di carico, e facente parte di un dispositivo tale che ogni movimento della lancetta del voltmetro viene ripetuto da un motore che aziona il reostato di eccitazione in modo da mantenere la tensione di linea ad un valore prefissato, il funzionamento in tal caso diventa quello di un *sistema*

a ciclo chiuso. In questo dispositivo, ogni errore o differenza fra il valore desiderato ed il valore effettivo, da luogo ad una azione di correzione.

Il termine *servomeccanismo* si applica ordinariamente a controlli di posizione a ciclo chiuso siano essi rotatori o traslatori. Il dispositivo che, nello esempio precedente, rileva lo spostamento dell'ago del voltmetro e fa sì che il motore sposti il cursore del reostato costituisce un servomeccanismo. Questo termine implica due cose. Primo: si intende che l'energia necessaria in uscita venga fornita da una sorgente locale, non dall'ingresso. Infatti l'energia occorrente in uscita è di solito molto maggiore di quella disponibile in ingresso. Secondo: il sistema viene azionato da un segnale di errore, cioè dalla differenza fra l'ingresso e la corrispondente uscita. Cioè, se θ_i è la posizione angolare di ingresso in ogni istante e θ_o è la posizione angolare di uscita allo stesso istante, l'errore sarà

$$\text{Errore} = \varepsilon = \theta_i - \theta_o \tag{16-1}$$

Questo è il segnale di errore. La fig. 16-1 mostra lo schema di principio di un servomeccanismo. L'essenza del controllo a ciclo chiuso è proprio il controllo attraverso l'errore, o differenza fra ingresso ed uscita, così come avviene per l'amplificatore reazionato. Se in un certo istante la posizione in uscita non corrisponde alla posizione in ingresso, il controllo reagisce spostando θ_o verso il valore di θ_i.

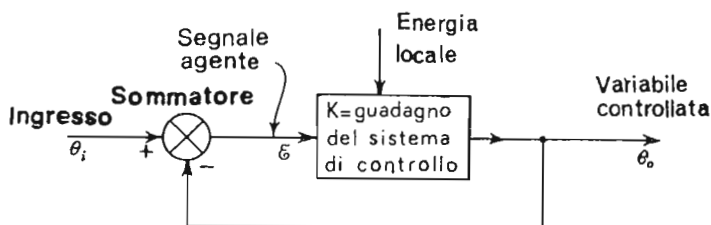



FIG. 16-1. — Un semplice servomeccanismo.

Al contrario, in un sistema a ciclo aperto, l'ingresso ignora la posizione dell'uscita; esso può solo ordinare all'uscita di cambiare. Dipende poi dai parametri del sistema il fatto che l'uscita esegua effettivamente la variazione, mentre un sistema a ciclo chiuso è praticamente indipendente dai parametri del sistema. Il prezzo che si paga per questo migliore funzionamento è una maggiore complessità del progetto per assicurare che il sistema sia stabile e non oscillante.

I dispositivi che servono per controllare grandezze fisiche quali la pressione, la temperatura o la tensione, sono detti *regolatori*. Tutto il meccanismo per

il controllo della tensione del generatore prima descritto, compreso il voltmetro ed il reostato, può essere considerato un regolatore, mentre il meccanismo che fissa la posizione del reostato in base alla posizione dell'indice del voltmetro è detto servomeccanismo.

Altro esempio è dato dal regolatore della pressione di un gas, di fig. 16-2. La distinzione fra servomeccanismi e regolatori non è sempre chiara e può non essere necessaria da un punto di vista sostanziale. La definizione di servomeccanismo come di qualcosa legato ad una posizione, spiega perchè l'analisi del sistema venga ordinariamente eseguita assumendo l'angolo istantaneo θ come variabile indipendente.

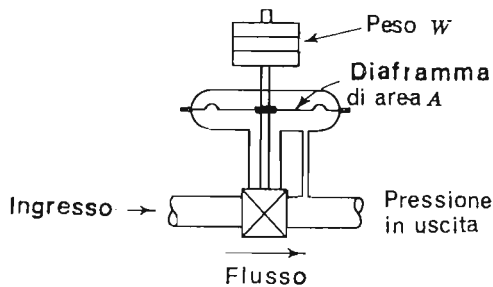



FIG. 16-2. — Regolatore di pressione di un gas.

Un *controllo continuo* è quello nel quale l'uscita è sotto il controllo dello ingresso in ogni istante. Ciò a differenza di altri tipi nei quali le correzioni dell'uscita vengono eseguite solo ad intervalli prefissati.

Un *controllo proporzionale* sviluppa in uscita una coppia proporzionale alla differenza fra l'uscita attuale ed il valore di uscita che si desidera ottenere. La coppia, o la forza, di correzione, può anche essere proporzionale ad altri fattori come la velocità con cui varia l'errore o l'integrale dell'errore.

Un *controllo a tutto o niente* ha solo due condizioni, o stati, di funzionamento; la correzione dipende solo dal segno dell'errore, non dalla sua ampiezza. Un ordinario termostato esegue di solito un controllo di questo tipo.

L'analisi delle caratteristiche di un sistema di controllo, comprende la determinazione delle soluzioni transitorie e stazionarie per diversi tipi di segnale di ingresso. La risposta transitoria ad un ingresso a gradino e la risposta a regime ad un ingresso sinoidale, danno delle informazioni molto utili; perciò esse saranno studiate in dettaglio. Quest'analisi verrà applicata in generale a sistemi di controllo reazionati, senza tener conto del sistema, elettrico, idraulico o meccanico, mediante il quale si realizza l'amplificazione.

16-2 Servomeccanismi del primo ordine.

In fig. 16-3 è riportato lo schema di principio di un semplice servomeccanismo che viene descritto da una equazione differenziale del primo ordine. Il sistema ha lo scopo di fare in modo che, ad ogni istante, la posizione θ_0 dell'albero di uscita, segua la posizione θ_i dell'albero di ingresso. La posizione di uscita θ_0 è riportata in ingresso e sottratta a θ_i in modo da fornire l'errore $\varepsilon = \theta_i - \theta_0$, che viene applicato all'ingresso dell'amplificatore di guadagno K, misurato in coppia sviluppata per ogni radiante di errore. Pertanto all'albero viene applicata una coppia di valore $K\varepsilon = K(\theta_i - \theta_0)$. Il carico, sull'albero in uscita, è costituito da un dispositivo di inerzia trascurabile con coefficiente di attrito viscoso F. Con ciò si fa l'ipotesi che la coppia di attrito, che costituisce il carico, sia proporzionale alla velocità di rotazione, cioè che la coppia di carico sia $Fs\theta$ usando la notazione s per indicare la derivata rispetto al tempo. Un carico di questo tipo potrebbe essere un piccolo indicatore.

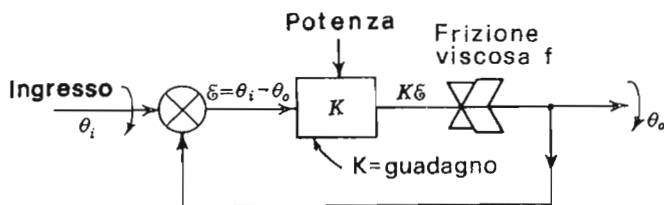



FIG. 16-3. — Un semplice servomeccanismo del primo ordine.

L'equazione differenziale del sistema si può scrivere uguagliando a zero la somma delle coppie agenti sull'albero di uscita, cioè:

$$Fs\theta_o - K(\theta_i - \theta_o) = 0 \tag{16-2}$$

$$\theta_o = \frac{K\theta_i}{K + Fs} = \frac{1}{1 + Fs/K}\,\theta_i \tag{16-3}$$

L'ultima equazione esprime la relazione che deve esistere fra θ_o e θ_i.

Per determinare la risposta di un servomeccanismo risulta utile, così come lo era per gli amplificatori, la *funzione a gradino* (fig. 16-4).

La *funzione a gradino* gode delle seguenti proprietà:

$$\theta_i = 0 \qquad \text{per } t \leq 0$$
$$\theta_i = A \qquad \text{per } t > 0$$

per cui talora è detta *ingresso ad ampiezza costante*. Allora dall'eq. (16-2)

per $t > 0$ si ha:

$$\frac{F}{K} s\theta_o + \theta_o = \theta_i = A \tag{16-4}$$

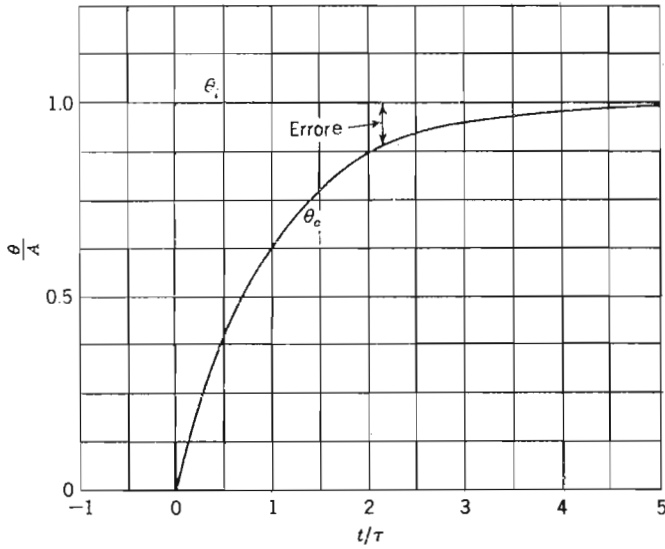



FIG. 16-4. — Risposta θ_o di un servomeccanismo, del primo ordine ad un ingresso a gradino θ_i.

Il secondo termine dell'equazione è un angolo e perciò è adimensionale. Nel primo termine, s ha le dimensioni di 1/t, per cui il coefficiente F/K deve avere le dimensioni di un tempo per rendere adimensionale anche il primo termine. Se allora si pone:

$$\tau = \frac{F}{K} \tag{16-5}$$

si può ricavare la soluzione transitoria scrivendo la (16-4) come segue

$$(\tau s + 1)\theta_o = 0 \tag{16-6}$$

Una soluzione della (16-6) è notoriamente:

$$\theta_{ot} = C\epsilon^{-t/\tau} \tag{16-7}$$

Con C = costante. Ricordando l'analoga relazione che si ottiene nel caso dei circuiti RC ed RL, il parametro τ può essere considerato una *costante di tempo.*

Si può dimostrare che in un sistema reazionato, la soluzione a regime ha la stessa forma della funzione di ingressso θ_i. Ma il valore a regime di θ_i è A, per cui a regime $s\theta_i = 0$. Dall'equazione (16-4) si ricava allora la soluzione a regime

$$\theta_{os} = A$$

e la soluzione completa è:

$$\theta_o = \theta_{os} + \theta_{ot} = A + C\epsilon^{-t/\tau} \qquad (16\text{-}8)$$

Se la posizione di riferimento in uscita è scelta in modo che per $t = 0$ sia $\theta_o = 0$, allora $C = -A$ e,

$$\theta_o = A(1 - \epsilon^{-t/\tau}) \qquad (16\text{-}9)$$

per $t > 0$. La figura 16-4 mostra un diagramma della risposta al gradino, in termini dei parametri adimensionali θ_o/A e t/τ. Il transitorio è di tipo esponenziale e dopo un tempo molto lungo, cioè per t grande, l'uscita θ_o sarà uguale all'ingresso A; questo significa che non vi sarà errore a regime per un sistema del primo ordine con ingresso a gradino. Questo risultato è analogo a quello che si ottiene per i circuiti elettrici del primo ordine, comprendenti cioè RC oppure RL.

Poichè $\tau = F/K$, si può rendere la risposta più pronta aumentando il guadagno K, cioè progettando un amplificatore di maggiore potenza. In questo modo però potrebbero diventare apprezzabili gli effetti dell'inerzia, per cui il sistema che si supponeva essere del primo ordine diventa del secondo ordine e quindi con risposta molto più complessa.

È interessante studiare la risposta di un sistema del primo ordine al cosiddetto *ingresso a rampa*, θ_i, del tipo mostrato in fig. 16-5. La funzione di ingresso è

$$\theta_i = 0 \quad \text{per} \quad t < 0$$
$$\theta_i = \lambda t \quad \text{per} \quad t > 0$$

Questa funzione è anche detta ingresso a velocità costante. La soluzione transitoria θ_{ot} è, naturalmente, indipendente dalla funzione di ingresso, per cui si ottiene di nuovo l'equazione (16-7). È logico supporre che la soluzione o regime abbia la stessa forma di θ_i, cioè

$$\theta_{os} = B_1 t + B_2 \qquad (16\text{-}10)$$

Dalle equazioni (16-10) e (16-4) e ponendo $\theta_i = \lambda t$, si ottiene:

$$B_1\tau + B_1 t + B_2 = \lambda t \qquad (16\text{-}11)$$

Eguagliando le potenze uguali di t presenti al primo ed al secondo membro della equazione si ottiene

$$B_1 = \lambda \qquad B_2 = -\lambda\tau$$

Il valore di θ_o si ottiene da queste due uguaglianze, aggiungendovi la soluzione transitoria

$$\theta_o = C\epsilon^{-t/\tau} + \lambda(t - \tau) \qquad (16\text{-}12)$$

Imponendo la condizione iniziale $\theta_o = 0$ per $t = 0$, risulta $C = \lambda\tau$ e la soluzione completa per l'ingresso a rampa sarà:

$$\theta_o = \lambda(t - \tau + \tau\epsilon^{-t/\tau}) \qquad t > 0 \qquad (16\text{-}13)$$

Se l'uscita seguisse esattamente l'ingresso, θ_o sarebbe uguale a λt. Invece l'equazione (16-13) mostra che esiste un transitorio esponenziale più un errore a regime cioè un ritardo di tempo di τ secondi.

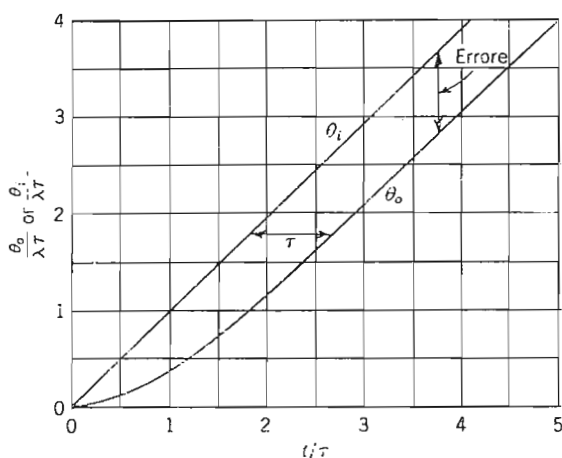



Fig. 16-5. — Risposta di un servomeccanismo del primo ordine ad un ingresso a rampa.

In fig. 16-5 è riportato un diagramma adimensionale di $\theta_o/\lambda\tau$ in funzione di t/τ. L'errore a regime può essere ridotto aumentando K in modo da ridurre τ, ma ancora una volta le inerzie, che sono state trascurate nel ragionamento precedente, possono diventare importanti; in tal caso il sistema diventerebbe del secondo ordine.

È anche importante la risposta a regime ad un ingresso sinusoidale, sia perchè si può utilizzare questa risposta per conoscere quella ad una qualsiasi

altra funzione periodica, attraverso la serie di Fourier, sia perchè essa è utile per prevedere la stabilità del sistema in caso di funzionamento a ciclo chiuso. Si può supporre che l'ingresso sia del tipo

$$\theta_i = D \cos \omega t$$

A regime la risposta sarà sinoidale e della stessa frequenza, cosicchè si può supporre che l'uscita sia

$$\theta_o = H \cos (\omega t + \varphi) \tag{16-14}$$

in cui bisogna determinare H e φ. L'equazione differenziale che descrive il sistema è l'eq. (16-4):

$$(\tau s + 1)\theta_o = \theta_i \tag{16-15}$$

Da cui, in base all'eq. (16-14), si ottiene

$$-\omega\tau H \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) + H \cos (\omega t + \varphi) = D \cos \omega t \tag{16-16}$$

che si può scrivere

$$H\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cos (\omega t + \varphi + \gamma) = D \cos \omega t$$

con

$$\gamma = \operatorname{arctang} \omega\tau$$

Uguagliando ampiezza e fase dei termini in coseno, si ottiene:

$$\frac{H}{D} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \tag{16-17}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctang} \omega\tau \tag{16-18}$$

La soluzione a regime è dunque

$$\theta_o = \frac{D}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos (\omega t + \varphi) \tag{16-19}$$

Per $\omega\tau \ll 1$, il rapporto fra la ampiezza in uscita e la ampiezza in ingresso, dato dalla Eq. (16-17) è praticamente uno, e l'angolo di fase, dato dall'Eq. (16-18) è prossimo a zero. Quando $\omega\tau$ diventa apprezzabile rispetto all'unità, questo rapporto comincia a diminuire ed appare un ritardo di fase; per $\omega\tau \gg 1$, esso diminuisce proporzionalmente ad $1/\omega\tau$.

La costante di tempo τ può calcolarsi a partire dalla risposta sinoidale, osservando che $\omega\tau = 1$ cioè $\tau = 1/\omega$, quando il rapporto $|\theta_o|/D$ è 0,707 del valore che ha a frequenza zero.

In fig. 16-6 sono riportati i diagrammi del rapporto $|\theta_o|/D$ e di φ, in funzione di $\omega\tau$; essi sono simili alle curve di risposta di un amplificatore RC.

Il campo di frequenza che interessa i servomeccanismi va ordinariamente da zero a poche centinaia di Hertz.

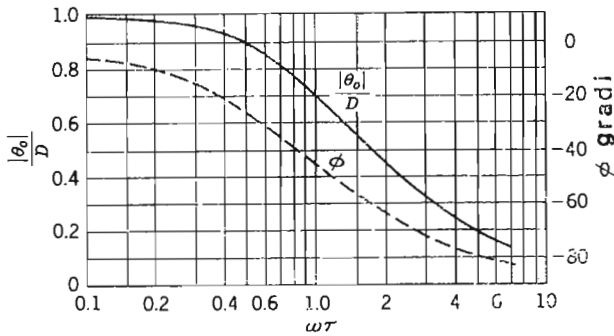



FIG. 16-6. — Risposta frequenziale di un servomeccanismo del primo ordine.

16-3 Sistemi del secondo ordine.

I sistemi del primo ordine non si realizzano se non in qualche caso, ma il loro studio è utile per introdurre i metodi di analisi che si vedranno nel seguito. Un sistema più aderente alla realtà è quello del secondo ordine, nel quale si tiene conto delle inerzie dell'apparecchiatura e del carico, il che aggiunge ai problemi della risposta transitoria ed a regime, già considerati per i sistemi del primo ordine, quello della stabilità.

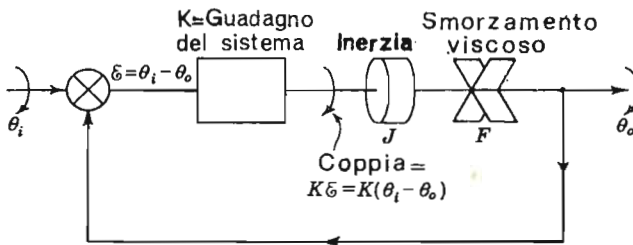



FIG. 16-7. — Controllo di posizione del secondo ordine.

Quando si tiene conto dell'inerzia, il comportamento di un semplice sistema come quello di fig. 16-7, è descritto da un'equazione del secondo ordine. Sia J la inerzia complessiva del sistema riportata all'albero di uscita,

F il coefficiente di attrito viscoso, mentre si considera trascurabile ogni attrito coulombiano o non lineare. Si trascurano anche le coppie di carico esterne. La somma delle coppie agenti sull'albero di uscita è

$$J \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + F \frac{d\theta_o}{dt} - K(\theta_i - \theta_o) = 0 \qquad (16\text{-}20)$$

da cui

$$\theta_o = \frac{\theta_i}{(J/K)s^2 + (F/K)s + 1} \qquad (16\text{-}21)$$

Scomponendo la frazione che compare al secondo membro della uguaglianza ora scritta, si può esprimere l'equazione mediante una serie di potenze di s. Cioè:

$$\theta_o = \left[1 - \frac{F}{K} s + \left(\frac{F^2}{K^2} - \frac{J}{K}\right) s^2 - \ldots\right] \theta_i \qquad (16\text{-}22)$$

Questa forma è utile per determinare la risposta a regime ad ingressi funzione del tempo. Per esempio, se θ_i è una funzione a gradino, allora $\theta_i \cdot s = \theta_i s^2 = \theta_i s^n = 0$ a regime e $\theta_o = \theta_i$; cioè un servomeccanismo del secondo ordine presenta un errore nullo a regime per un ingresso a gradino o di ampiezza costante.

Per un ingresso a rampa, cioè a velocità costante, con $\theta_i = \lambda t$ per $t > 0$, si ha che $\theta_i s = \lambda$, $\theta_i s^n = 0$ per $n > 1$. Dall'Eq. (16-22), la risposta a regime ad un ingresso a rampa è

$$\theta_{os} = \lambda \left(t - \frac{F}{K}\right) \qquad (16\text{-}23)$$

Poichè l'ingresso è $\theta_i = \lambda t$, l'uscita ritarda rispetto all'ingresso di F/K secondi. Questo mostra che la variabile θ_o dà luogo sempre ad un errore di valore sufficiente a sviluppare una coppia in grado di equilibrare la coppia di smorzamento viscoso F e di fornire velocità all'uscita, dato che la rampa d'ingresso appare come una velocità costante. Questo ritardo rende il sistema del secondo ordine simile a quello del primo ordine soggetto allo stesso ingresso.

Un'altro esempio di applicazione della Eq. (16-22) è dato dallo studio di un ingresso tale che:

$$\theta_i = \lambda t^2 \qquad (16\text{-}24)$$

Allora $s\theta_i = 2\lambda t$, $s^2\theta_i = 2\lambda$ ed $s^n\theta_i = 0$ per $n > 2$. La soluzione a regime è

$$\theta_{os} = \lambda t^2 - 2\lambda \left(\frac{F}{K} t - \frac{F^2}{K^2} + \frac{J}{K}\right) \qquad (16\text{-}25)$$

Il primo termine al secondo membro dell'uguaglianza è la funzione di ingresso Cioè si ritrova l'accelerazione iniziale, ma l'errore aumenta in funzione del tempo. Ciò è dovuto alla necessità di avere un segnale di errore che sviluppi una coppia di uscita che superi il carico costituito dall'attrito e che contemporaneamente equilibri la coppia resistente prodotta dalla accelerazione del carico dotato di inerzia.

16-4 Risposta transitoria di un sistema del secondo ordine ad un ingresso a gradino.

L'equazione che descrive un sistema del secondo ordine può essere scritta a partire dalla Eq. (16-20) nella seguente forma:

$$\left(\frac{J}{K} s^2 + \frac{F}{K} s + 1\right) \theta_o = \theta_i \tag{16-26}$$

A tale sistema si può applicare un ingresso a gradino tale che

$$\theta_i = 0 \text{ per } t \leqslant 0$$
$$\theta_i = A \text{ per } t > 0$$

Abbiamo già mostrato che una soluzione a regime è $\theta_{os} = A$. Se ne può ottenere la soluzione transitoria supponendo che sia del tipo $\theta_{ot} = C\varepsilon^{\gamma t}$ quando θ_i è nullo. Sostituendo nella Eq. (16-26) si ottiene

$$\frac{J}{K}\gamma^2 + \frac{F}{K}\gamma + 1 = 0$$

le cui radici sono

$$\gamma_{1,2} = -\frac{F}{2J} \pm \sqrt{\frac{F^2}{4J^2} - \frac{K}{J}} = -\frac{F}{2J} \pm \sqrt{\frac{K}{J}}\sqrt{\frac{F^2}{4KJ} - 1} = \tag{16-27}$$

$$= -a \pm b \tag{16-28}$$

Queste equazioni mostrano che *b* può essere reale, nullo o immaginario, secondo i parametri del sistema. La soluzione transitoria sarà

$$\theta_{ot} = C_1\varepsilon^{\gamma_1 t} + C_2\varepsilon^{\gamma_2 t} \tag{16-29}$$

e la forma della risposta transitoria dipenderà dalla relazione fra $F^2/4KJ$ e l'unità.

Se noi supponiamo che il servomeccanismo abbia smorzamento nullo,

cioè il coefficiente di attrito F sia zero, allora:

$$\gamma_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{K}{J}} \tag{16-30}$$

e la soluzione transitoria sarà del tipo

$$\theta_{ot} = C_1 \varepsilon^{j\sqrt{K/J}\,t} + C_2\, \varepsilon^{-j\sqrt{K/J}\,t} \tag{16-31}$$

che si può anche scrivere sotto la forma

$$\theta_{ot} = C_3 \cos \sqrt{\frac{K}{J}}\,t + C_4 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{J}}\,t \tag{16-32}$$

Questa risposta senza smorzamento è oscillatoria con pulsazione

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \tag{16-33}$$

altrimenti nota come *frequenza naturale senza smorzamento.*

Nel caso generale, la natura delle radici dipende dalla relazione fra $F^2/4KJ$ e l'unità, ed è perciò conveniente definire *il fattore di smorzamento* ξ in base all'espressione

$$\xi = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} \tag{16-34}$$

Ne segue che la costante di tempo è

$$\tau = \frac{1}{a} = \frac{2J}{F} = \frac{1}{\xi\omega_n} \tag{16-35}$$

Le radici nell'Eq. (16-27) possono essere espresse in funzione di questi parametri:

$$\gamma_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{16-36}$$

Questa forma delle radici mostra che vi sono tre possibili tipi di risposta transitoria ad un ingresso a gradino, secondo il valore di ξ rispetto all'unità.

Caso I - Per $\xi < 1$ le radici sono complesse coniugate e la soluzione transitoria è

$$\theta_{ot} = \varepsilon^{-\xi\omega_n t}\left(C_1\varepsilon^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t} + C_2\varepsilon^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t}\right) \tag{16-37}$$

Si è già visto che a regime $\theta_o = \theta_i = A$, cosicchè per

$\xi < 1$ la soluzione completa per ingresso a gradino può essere scritta come segue

$$\theta_o = \theta_{os} + \theta_{ot} = A + \epsilon^{-\xi\omega_n t}(C_3 \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}t + C_4 \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}t) \quad (16\text{-}38)$$

Le condizioni iniziali $\theta_o = 0$, $s\theta_o = 0$, per $t = 0$, applicate all'Eq. (16-38) permettono di ricavare

$$C_3 = -A \qquad C_4 = -\frac{A\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Si può quindi scrivere la risposta completa del sistema del secondo ordine con $\xi < 1$:

$$\frac{\theta_o}{A} = 1 - \epsilon^{-\xi\omega_n t}\left(\cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\, t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t\right) \quad (16\text{-}39)$$

Questa equazione rappresenta un'oscillazione smorzata, come era da aspettarsi essendo le radici complesse coniugate. Con $\xi < 1$ il sistema si dice *ipercritico*.

Caso II - $\xi > 1$ le radici dell'Eq. (16-27) sono entrambe reali; ne segue che il sistema è smorzato. La soluzione completa è

$$\theta_o = A + \epsilon^{-\xi\omega_n t}(C_3 \epsilon^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t} + C_4 \epsilon^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t}) \quad (16\text{-}40)$$

Imponendo all'Eq. (16-40) ed alla sua derivata le condizioni iniziali, si ottiene

$$\frac{\theta_o}{A} = 1 - \frac{\epsilon^{-\xi\omega_n t}}{2}\left[\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)\epsilon^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t} + \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)\epsilon^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t}\right] \quad (16\text{-}41)$$

Cioè per $\xi > 1$, la risposta ad un ingresso di ampiezza costante è esponenziale ed il sistema si dice *subcritico*.

Caso III - $\xi = 1$. In tal caso le radici dell'Eq. (16-27) si riducono ad una sola radice perchè $b = 0$ e la soluzione transitoria è del tipo

$$\theta_{ot} = \epsilon^{-\omega_n t}(C_1 + C_2 t) \quad (16\text{-}42)$$

da cui si può ricavare la soluzione completa aggiungendo A. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene per il caso di $\xi = 1$:

$$\frac{\theta_o}{A} = 1 - \epsilon^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad (16\text{-}43)$$

che è detta condizione di *smorzamento critico*. Questo è il minimo smorzamento fra quelli che danno luogo ad una risposta priva di sovraelongazione.

In effetti fisicamente il caso delle due radici uguali non si verifica mai perchè non è possibile mantenere un sistema con ξ esattamente uguale alla unità.

Nessuna di queste soluzioni è tale che θ_0 segua istantaneamente il gradino di ingresso θ_1, a causa dell'inerzia e degli effetti di smorzamento. L'attitudine di θ_0 a seguire un ingresso a gradino è illustrata in fig. 16-8 dove sono riportate le risposte $|\theta_0|/A$ in funzione del tempo con il fattore di smorzamento ξ come parametro. I valori di ξ compresi fra 0,3 ed 1 danno una risposta veloce; tra essi è da preferire il valore $\xi = 0,7$ se si può tollerare una piccola sovraelongazione.

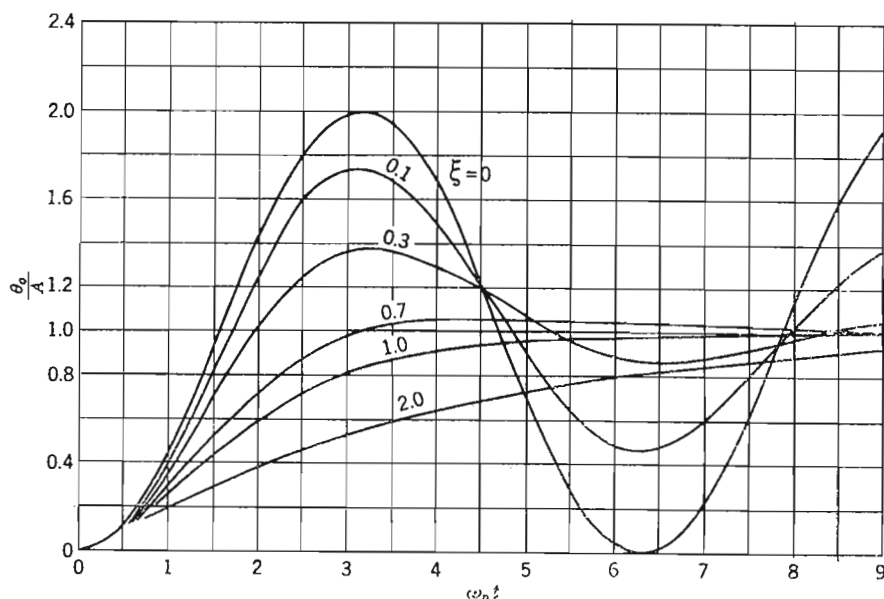



FIG. 16-8. — Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine.

È possibile ridurre il tempo di risposta aumentando il guadagno K, e quindi ω_n, ed aumentando poi lo smorzamento F per mantenere lo stesso fattore di smorzamento ξ. Con un K di notevole valore si ottiene un sistema *rigido*; c'è però un limite al valore utile di K, dato dai giochi degli ingranaggi e da altri analoghi ritardi.

La presenza di radici complesse coniugate porta ad un sistema che può oscillare. Queste oscillazioni saranno tuttavia smorzate *se la parte reale delle radici è negativa*. Perciò una prova per decidere della stabilità di questi sistemi consiste nel determinare le eventuali radici a parte reale positiva.

Nell'Eq. (16-23) si è mostrato che per una funzione di ingresso a rampa, l'errore a regime era di F/K secondi. Se si ritiene di incontrare un ingresso

di questo tipo, conviene ridurre ξ, e quindi tollerare una più ampia sovraelongazione in caso di improvvise variazioni della posizione dell'ingresso, onde ridurre l'errore a regime. La scelta del fattore di smorzamento può dunque dipendere dal tipo di ingresso che ci si aspetta.

16-5 Controllo con reazione della derivata della grandezza di uscita.

Nel sistema esaminato in precedenza, l'ingresso all'amplificatore di coppia era dato dal segnale di errore $\theta_i - \theta_o$, coincidente con l'errore di posizione; in tal caso si dice che il sistema possiede un *controllo di posizione.* Si è visto che l'efficacia di questo controllo dipende notevolmente dal valore che si assegna allo smorzamento viscoso. Si è trovato che, in molti servo sistemi reali, l'attrito viscoso proprio del meccanismo, degli ingranaggi, eccetera, è tale da rendere $\xi < 0{,}3$. Perciò per rendere soddisfacente la risposta transitoria, occorre aumentare lo smorzamento viscoso, il quale può dissipare una notevole frazione della potenza di uscita del motore o, in generale, del dispositivo di uscita. Un metodo migliore per correggere la caratteristica del sistema, è quello di aggiungere un ciclo di *reazione della derivata della grandezza di uscita.*

In fig. 16-9 è riportato lo schema di un sistema di questo tipo; in esso non solo viene reazionata e sottratta all'ingresso la posizione di uscita θ_o, ma si reaziona e sottrae anche la sua derivata $s\theta_o$. Ciò equivale a sottrarre una quantità proporzionale alla velocità di uscita. Si può ottenere l'indicazione della velocità o mediante un generatore tachimetrico collegato all'albero di uscita, o con circuiti differenziatori, se è possibile ottenere θ_o in termini di tensione.

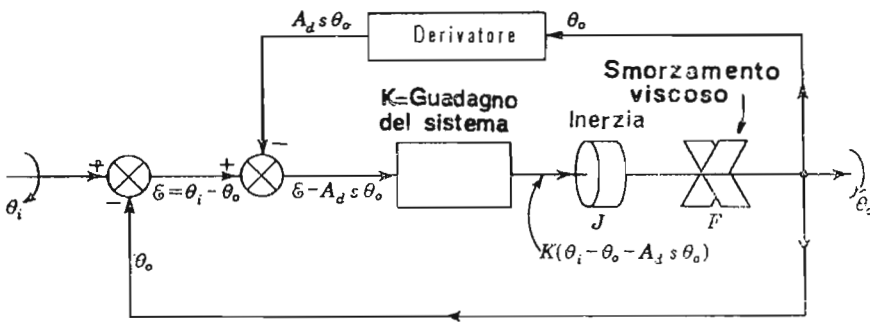



FIG. 16-9. — Controllo con reazione della derivata dell'uscita.

Una coppia di smorzamento è proporzionale alla velocità così come è proporzionale alla velocità la coppia sviluppata da un segnale di reazione

proporzionale alla velocità. In questo modo si riesce ad aumentare o diminuire il valore totale della coppia di smorzamento efficace agente nel sistema.

Se $A_d s\theta_o$ è il valore della reazione della derivata, con A_d costante, si può scrivere l'equazione differenziale del sistema di fig. 16-9 come somma delle coppie agenti sull'albero di uscita:

$$Js^2\theta_o + Fs\theta_o - K(\theta_i - \theta_o - A_d s\theta_o) = 0$$

che si può trasformare come segue

$$[Js^2 + (F + KA_d)s + K]\theta_o = K\theta_i \tag{16-44}$$

Il coefficiente del termine $s\theta_o$ è $F + KA_d$, che rappresenta la *costante di smorzamento effettiva* che si ottiene dalla reazione della derivata. Nonostante lo smorzamento sia aumentato, il termine KA_d non determina alcuna ulteriore perdita di energia.

Dall'Eq. (16-34) si ricava il fattore di smorzamento ξ

$$\xi = \frac{F + KA_d}{2\sqrt{KJ}} \tag{12-45}$$

Con la reazione della derivata della grandezza controllata è possibile ottenere un qualsiasi fattore di smorzamento in un sistema lineare del secondo ordine.

Il vero smorzamento, F, può allora essere realmente piccolo, ed il valore di ξ può essere tale da rendere piccola la sovraelongazione in caso di improvvise variazioni di posizione. L'errore a regime per segnali a rampa, cioè a velocità costante, è F/K secondi; ora si può rendere F piccolo per ridurre questo errore, pur mantenendo ξ ad un valore tale da evitare una risposta oscillatoria ad un ingresso a gradino, agendo sul termine KA_d della reazione della derivata.

16-6 Controllo con segnale proporzionale alla derivata dell'errore.

Un altro metodo con cui si può modificare l'effettivo smorzamento di un sistema consiste nell'introdurre un segnale proporzionale alla derivata dell'errore, come è mostrato in fig. 16-10. Oltre alla solita reazione di posizione si deriva il segnale di errore e si applica questo segnale all'ingresso dell'amplificatore unitamente allo stesso segnale di errore. La somma delle coppie applicate all'albero di uscita è

$$Js^2\theta_o + Fs\theta_o - K(\varepsilon + A_e s\varepsilon) = 0 \tag{16-46}$$

e poichè $\varepsilon = \theta_i - \theta_o$, allora:

$$[Js^2 + (F + KA_e)s + K]\theta_o = (1 + A_e s)K\theta_i \tag{16-47}$$

Il valore effettivo del rapporto di smorzamento viscoso è allora:

$$\xi = \frac{F + KA_e}{2\sqrt{KJ}} \tag{16-48}$$

e si può ottenere un qualunque valore di questo rapporto agendo sul coefficiente A_e.

Come avviene nel caso del controllo con reazione della derivata dell'uscita, anche in questo caso la modifica di ξ rende possibile la riduzione di F ad un valore trascurabile. Si riduce così sensibilmente l'errore a regime per un ingresso a rampa, cioè a velocità costante. D'altra parte il sistema può mantenere una piccola sovraelongazione, propria di un sistema ben smorzato, per una variazione a gradino dell'ingresso.

Il termine $A_e s\theta_i$ a secondo membro della (16-47) indica che dovrebbe esservi un impulso di ampiezza infinita all'istante di applicazione del gradi-

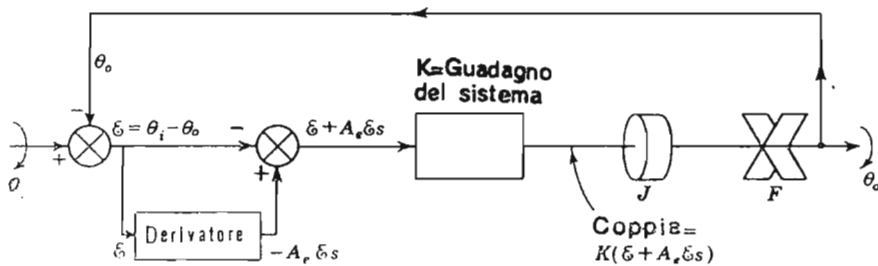



FIG. 16-10. — Sistema di controllo con segnale proporzionale alla derivata dell'errore.

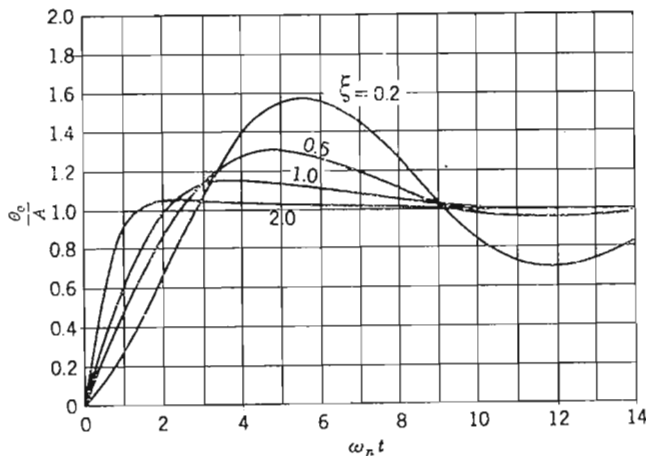



FIG. 16-11. — Risposta al gradino di un sistema di controllo con smorzamento proporzionale alla derivata dell'errore.

no. I sistemi fisicamente realizzabili non possono però rispondere in questo modo, per cui vi sarà uno smorzamento effettivo sempre inferiore a quello indicato dall'analisi teorica, a causa del valore finito delle uscite fornite dai differenziatori effettivamente realizzabili. Ciò è mostrato dalle curve di risposta al gradino $\theta_i = A$ di fig. 16-11; si nota che è sempre presente una certa sovraelongazione, qualunque sia il valore effettivo di ξ.

16-7 Controllo con segnale proporzionale all'integrale dell'errore.

Un altro tipo di controllo interessante ed utile consiste nell'introdurre un segnale proporzionale all'integrale dell'errore, in esso si esegue l'integrale nel tempo dell'errore e lo si introduce nell'amplificatore unitamente al segnale di errore. Questo sistema di controllo è anche detto *controllo ad azzeramento.*

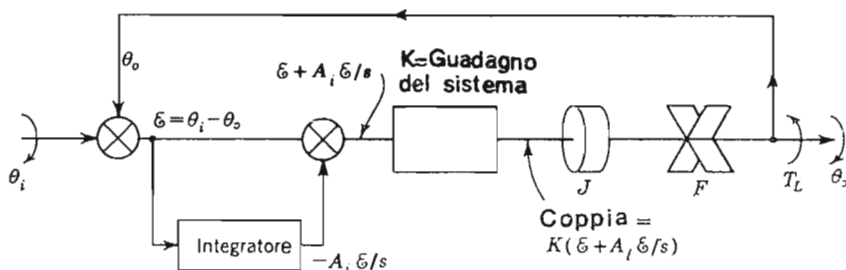



FIG. 16-12. — Sistema di controllo con segnale proporzionale all'integrale dell'errore.

In fig. 16-12 è riportato uno schema di un sistema di controllo con segnale proporzionale all'integrale dell'errore al quale è stata applicata una coppia di carico T_L in uscita. La somma delle coppie in uscita è

$$Js^2\theta_o + Fs\theta_o - K(1 + A_i/s)\varepsilon + T_L = 0$$

che si può scrivere in funzione dell'errore ε invece che della uscita θ_o

$$\left(Js^2 + Fs + K + \frac{KA_i}{s}\right)\varepsilon = T_L + (Js^2 + Fs)\theta_i \qquad (16\text{-}49)$$

L'equazione che ne risulta è del terzo ordine c la soluzione transitoria avrà tre radici una delle quali certamente reale presentandosi le radici complesse sempre a coppie.

È di particolare interesse lo studio della risposta, a regime, ad ingressi

a gradino ed a rampa (a velocità costante), che può essere fatto eseguendo la divisione:

$$\varepsilon = \frac{T_L + (Js^2 + Fs)\theta_i}{Js^2 + Fs + K + KA_i/s} \tag{16-50}$$

che porta a

$$\varepsilon = \left[\frac{F}{KA_i} s^2 + \left(\frac{J}{KA_i} - \frac{F}{KA_i^2}\right) s^3 + \dots\right] \theta_i$$
$$+ \left(\frac{1}{KA_i} s - \frac{1}{KA_i^2} s^2 + \dots\right) T_L \tag{16-51}$$

Poichè l'ingresso è $\theta_i = A$ per un ingresso a gradino, e $\theta_i = \lambda t$ per una rampa, cioè ingresso a velocità costante, l'espressione ora scritta indica che con il controllo con integrazione dell'errore si ha a regime un errore nullo, dato che la più piccola derivata di θ_i, che compare nel termine in θ_i dell'errore, è la derivata seconda.

Dall'Eq. (16-51) si vede anche che se la coppia di carico T_L è costante, non si introduce un errore a regime dovuto alla presenza di questo carico. In fig. 16-13 è mostrata la risposta al gradino di un ordinario controllo con integrazione dell'errore.

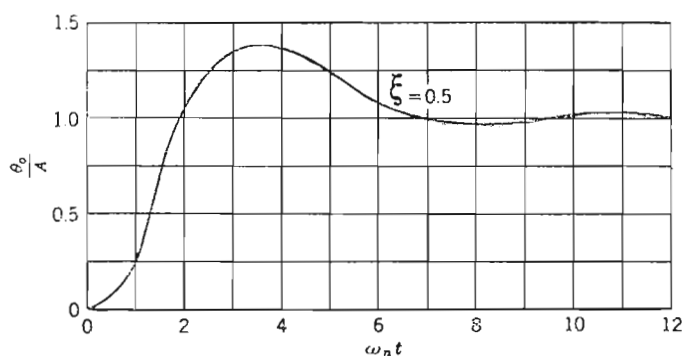



FIG. 16-13. — Risposta al gradino di un controllo con segnale proporzionale all'integrale dell'errore; $A_i/\omega_n = 0,2$.

Si usano spesso sistemi che combinano il controllo con integrazione, che dà errore nullo a regime, con una reazione della derivata dell'errore che fornisce uno smorzamento sufficiente a dare una soddisfacente risposta transitoria. Quando si usa il controllo con integrazione in questo modo, con parecchi cicli di reazione, bisogna studiare il problema della stabilità.

16-8 Regolatore di temperatura con controllo con integrazione dell'errore.

In questo paragrafo si illustra l'effetto di un controllo con integrazione considerando la sua applicazione al problema di controllo della temperatura di fig. 16-14, in cui un liquido viene riscaldato mediante un combustibile immesso attraverso una valvola di regolazione. La quantità di calore somministrata al recipiente contenente il liquido viene considerata proporzionale al segnale di errore

$$H_I = K(\theta_i - \theta_o)$$

Nel campo del controllo dei processi, questo sistema è noto come *controllo proporzionale*. Perchè vi sia proporzionalità occorre che siano costanti i parametri del combustibile e che vi sia una relazione lineare fra la posizione della valvola ed il flusso di combustibile.

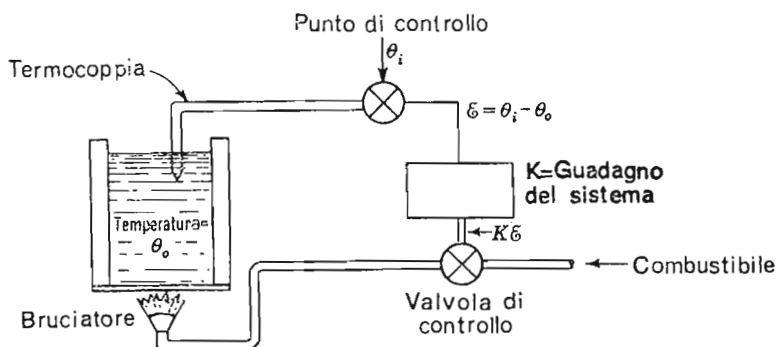



FIG. 16-14. — Regolatore di temperatura.

In questo caso l'uscita θ_o e l'ingresso θ_i sono rispettivamente la temperatura effettiva e quella voluta. Il combustibile fornisce il calore $H_s d\theta_o/dt$, nonchè il calore di conduzione che è proporzionale alla differenza fra la temperatura voluta e la temperatura ambiente θ_e. La costante di proporzionalità sia λ. L'equazione del sistema è dunque

$$K\ (\theta_i - \theta_o) = H_s\ s\ \theta_o + \lambda\ (\theta_o - \theta_e) \tag{16-52}$$

da cui

$$\left(\frac{H_s}{\lambda} s + \frac{K}{\lambda} + 1\right) \theta_o = \frac{K}{\lambda} \theta_i + \theta_e \tag{16-53}$$

Questa equazione è del tipo della Eq. (16-4) relativa ad un sistema del primo ordine, la risposta transitoria sarà dunque un'esponenziale simile a quello di fig. 16-4 con costante di tempo $H_s/(K + \lambda)$.

A regime, con θ_i e θ_e costanti, si avrà $s\theta_o = 0$ e la temperatura sarà

$$\theta_{os} = \frac{1}{K + \lambda} (K\theta_i + \lambda\theta_e) \tag{16-54}$$

Se $\lambda \ll K$, l'errore a regime sarà piccolo. Rimane tuttavia l'effetto delle variazioni della temperatura ambiente, anche se diminuito del fattore $\lambda/(K+\lambda)$. Se questa quantità viene ridotta aumentando K, diventano importanti altri effetti dinamici ed il sistema può diventare del secondo ordine.

Per ridurre l'errore a regime e l'effetto di una variazione di λ, o di θ_e, è possibile aggiungere un controllo con integrazione dell'errore.

Si fa allora variare la posizione della valvola, e quindi il calore dovuto al combustibile, con la legge seguente

$$H_i = K(\theta_i - \theta_o) + K_1\int(\theta_i - \theta_o)\, dt$$

Sostituendo questa quantità al primo membro della Eq. (16-52) e differenziando, in modo da eliminare l'integrale, si ha:

$$\left(\frac{H_s}{K_1} s^2 + \frac{K + \lambda}{K_1} s + 1\right) \theta_o = \left(\frac{K}{K_1} s + 1\right) \theta_i + \frac{\lambda}{K_1} s\theta_e \tag{16-55}$$

equazione simile alla Eq. (16-47) che descrive un sistema del secondo ordine con controllo della derivata dell'errore; questo sistema si comporterà in maniera analoga con

$$\xi = \frac{K + \lambda}{2\sqrt{H_s K_1}} \tag{16-56}$$

L'errore a regime sarà zero e sarà indipendente da variazioni dei parametri K e λ. Le variazioni della temperatura ambiente influiscono sui transitori ma non modificheranno la temperatura di regime θ_{os}. Con l'aggiunta del controllo con integrazione si è dunque migliorato il funzionamento.

16-9 Risposta di un sistema del secondo ordine ad un segnale sinusoidale.

Nell'Eq. (16-44) si è individuato il funzionamento del sistema di fig. 16-15 che è del secondo ordine, con reazione della posizione e della sua derivata:

$$[Js^2 + (F + KA_d)s + K]\theta_o = K\theta_i \tag{16-57}$$

L'Eq. (16-33) definisce la frequenza naturale non smorzata di un sistema del secondo ordine:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

mentre dall'Eq. (16-45) si ricava il coefficiente di smorzamento di questo sistema:

$$\xi = \frac{F + KA_d}{2\sqrt{KJ}}$$

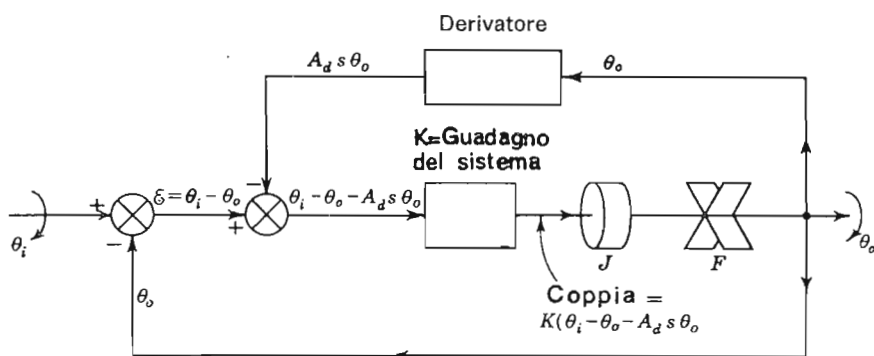



FIG. 16-15. — Controllo del secondo ordine a controreazione della posizione e della sua derivata.

Sostituendo ω_n e ξ nell'Eq. (16-57) si ha

$$\left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1\right) \theta_o = \theta_i \tag{16-58}$$

Se l'ingresso è sinoidale e cioè $\theta_i = A_1 \cos \omega t = A_1 \mathrm{Re}\, \epsilon^{j\omega t}$, la risposta a regime può essere ottenuta assumendo $\theta_o = A_2 \mathrm{Re}\, \epsilon^{j(\omega t + \varphi)}$, per cui col solito procedimento:

$$\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\xi\omega/\omega_n} = Y(j\omega) = M \underline{/ \Phi} \tag{16-59}$$

in cui M è il modulo di $Y(j\omega)$, funzione di trasferimento a ciclo chiuso, e Φ è l'angolo di fase. Dalla espressione ora scritta si ricava:

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \tag{16-60}$$

$$\Phi = - \text{arctang} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \tag{16-61}$$

Conviene studiare $Y(j\omega)$ mediante i diagrammi di M e di Φ, in funzione di ω/ω_n e di ξ, riportati in fig. 16-16 e 16-17.

La fig. 16-16 mostra una risonanza per $\omega/\omega_n \cong 1$. Queste curve ricordano quelle della fig. 4-23 dell'amplificatore a tubi a larga banda compensato. Esiste del resto una relazione fra i due sistemi, che sono entrambi descritti da equazioni del secondo ordine di forma simile.

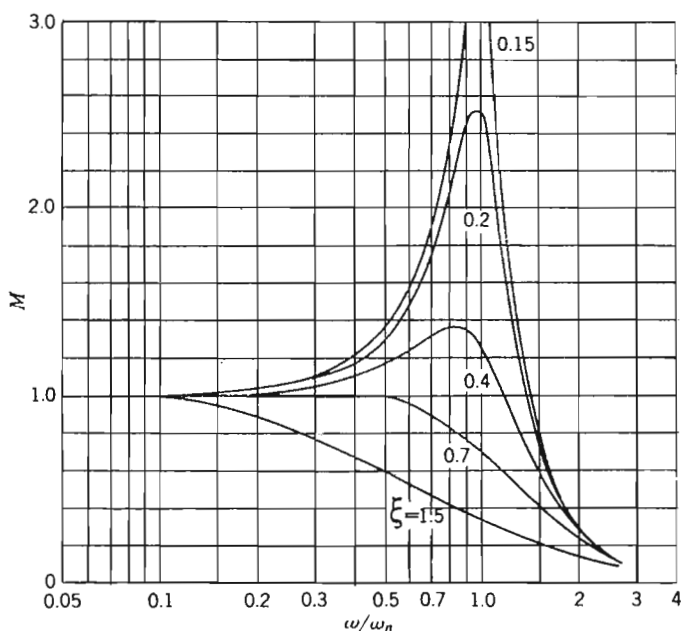



FIG. 16-16. — Ampiezza di Y (jω).

Il picco di risonanza si verifica quando il denominatore dell'Eq. (16-60) passa per un minimo. Calcolando la derivata del denominatore rispetto ad ω ed uguagliandola a zero si ottiene:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad (16\text{-}62)$$

che è la frequenza per cui si ha il picco di risonanza. Se $\xi > 0{,}707$ non c'è massimo o sovraelongazione nella risposta in frequenza.

Ponendo $\omega = \omega_p$ nell'Eq. (16-60), si ottiene:

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \qquad (16\text{-}63)$$

che è il valore massimo del modulo della funzione di trasferimento.

Dalla fig. 16-17 si nota che l'angolo di fase è —90° per tutti i valori di ξ, quando $\omega/\omega_n = 1$ e che tende a —180° quando ω/ω_n è grande.

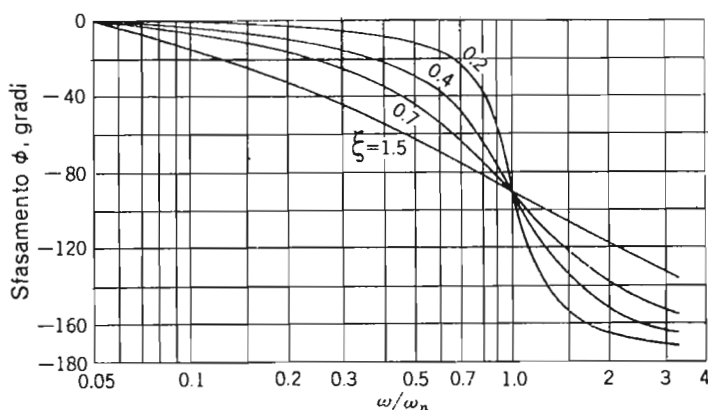



FIG. 16-17. — Sfasamento di un sistema del secondo ordine.

16-10 Analisi della funzione di trasferimento.

I metodi analitici precedentemente illustrati sono applicabili a diversi tipi di circuiti; finora si è supposto che questi comprendessero degli amplificatori ideali di guadagno K e non sono stati indicati i metodi mediante i quali studiare l'effetto dovuto ad amplificatori di caratteristiche diverse da quelle ideali.

Un metodo che porta a risultati più generali è basato sullo studio delle *funzioni di trasferimento* per descrivere l'effetto di ogni sottogruppo di elementi del sistema sulla risposta complessiva. La funzione di trasferimento è il rapporto fra l'uscita e l'ingresso di un dispositivo o di un sottosistema, espresso in funzione dell'operatore *s*:

$$\frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}} = \text{funzione di trasferimento} = Y(s) \qquad (16\text{-}64)$$

Per esempio, la fig. 16-10 mostra che la trasformata della coppia in uscita dell'amplificatore di un sistema di controllo è

$$T_o = K(\mathcal{E} + A_e s\mathcal{E}) = K(1 + A_e s)\mathcal{E}$$

Il guadagno dinamico di questo amplificatore, espresso come trasformata della coppia sviluppata per la trasformata di ogni radiante di errore è

$$\frac{T_o}{\mathcal{E}} = K(1 + A_e s) = Y_1(s) \qquad (16\text{-}65)$$

la quale definisce la funzione di trasferimento $Y_1(s)$ dell'amplificatore, compreso il derivatore che si considera facente parte dell'amplificatore.

Anche il sottosistema comprendente l'inerzia J e lo smorzamento viscoso F può essere rappresentato con una funzione di trasferimento. In ingresso a questo sottosistema c'è la coppia T_o, in uscita c'è θ_o. Dall'Eq. (16-46) si può ricavare l'equazione del moto che lega queste due quantità:

$$(Js^2 + Fs)\theta_o = T_o$$

dalla quale:

$$\frac{\theta_o}{T_o} = \frac{1}{Js^2 + Fs} = \frac{1/F}{s\left(\frac{J}{F}s + 1\right)} = Y_2(s) \qquad (16\text{-}66)$$

Y_2 è dunque la funzione di trasferimento di quella parte del sistema che comprende l'inerzia e la resistenza viscosa di uscita. Si può allora ridisegnare lo schema di fig. 16-10 facendo uso delle funzioni di trasferimento come è mostrato in fig. 16-18 a.

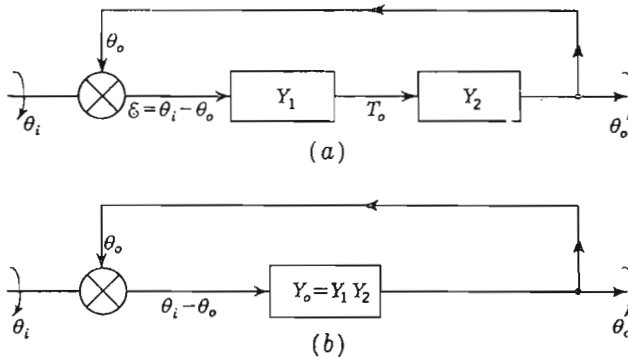



FIG. 16-18. — Sistema di controllo descritto da funzioni di trasferimento.

Come secondo esempio di applicazione di questo metodo si consideri l'amplificatore del sistema a controllo con integrazione, fig. 16-12, il quale ha una funzione di trasferimento del tipo:

$$Y_1 = \frac{T_o}{\varepsilon} = K(1 + A_1 s^{-1}) \qquad (16\text{-}67)$$

Questo amplificatore è seguito dal sottosistema con inerzia e smorzamento, descritto da Y_2, Eq. (16-66). Così lo schema a blocchi di fig. 16-18 a descrive anche il controllo con integrazione di fig. 16-12; in effetti, definendo

in maniera opportuna Y_1, questo schema è in grado di descrivere il controllo di posizione, oltre quello con derivata dell'errore e quello con integrazione.

Se si spezza il ciclo di reazione di fig. 16-18 a), rimane un sistema con una uscita θ_0 ed un ingresso dato da una certa quantità ε, che però non rappresenta $\theta_i - \theta_0$. In base alla definizione di funzione di trasferimento si può allora scrivere, dalla fig. 16-18:

$$\theta_o = Y_2 T_o = Y_1 Y_2 \mathcal{E} = Y_o \mathcal{E} \tag{16-62}$$

che serve per definire

$$Y_1 Y_2 = \frac{\theta_o}{\mathcal{E}} \tag{16-69}$$

funzione di trasferimento a ciclo aperto del sistema, cioè la funzione di trasferimento che si otterrebbe se si eliminasse la controreazione.

In base alla definizione di Y_0, è sempre possibile ridurre lo schema a blocchi di un sistema, con un solo ciclo di reazione, a quello di fig. 16-18 b. Quando si chiude il ciclo di reazione, sarà $\varepsilon = \theta_i - \theta_0$ per cui

$$\theta_o = Y_o \mathcal{E} = Y_o(\theta_i - \theta_o)$$

$$\theta_o = \frac{Y_o}{1 + Y_o}\,\theta_i \tag{16-70}$$

La funzione di trasferimento di un sistema con un solo ciclo di reazione è dunque $Y_0/(1 + Y_0)$ se la si esprime a mezzo della funzione di trasferimento a ciclo aperto Y_0.

16-11 Funzione di trasferimento per sistemi con più cicli di reazione.

Spesso i servomeccanismi comprendono numerosi elementi, ciascuno con la propria funzione di trasferimento, e per ragioni di stabilità si reazio-

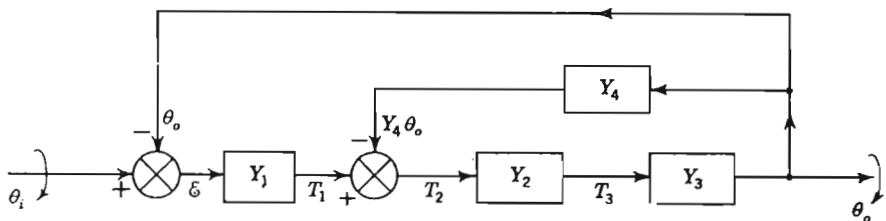



FIG. 16-19. — Servomeccanismi a più cicli di reazione.

nano sia le singole parti del sistema sia tutto il complesso. Un sistema di questo tipo è quello di fig. 16-19.

Il segnale, dopo essere passato attraverso il primo elemento del sistema, diventa

$$T_1 = Y_1\mathcal{E} = Y_1(\theta_i - \theta_o)$$

e

$$T_2 = Y_1(\theta_i - \theta_o) - Y_4\theta_o \tag{16-71}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} T_3 &= Y_2[Y_1(\theta_i - \theta_o) - Y_4\theta_o] \\ \theta_o &= Y_2Y_3[Y_1\theta_i - (Y_1 + Y_4)\theta_o] \end{aligned} \tag{16-72}$$

Il sistema completo è dunque descritto dalla funzione di trasferimento

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{Y_1Y_2Y_3}{1 + Y_1Y_2Y_3 + Y_2Y_3Y_4} \tag{16-73}$$

In modo analogo è possibile analizzare anche sistemi con più cicli di reazione.

16-12 Funzione di trasferimento di alcuni circuiti.

Data l'importanza delle funzioni di trasferimento nella analisi dei sistemi, è utile conoscere queste funzioni per i circuiti e per gli elementi dei sistemi più comunemente usati. Fra questi vi sono i circuiti integratori e differenziatori di fig. 16-20, già studiati nel Cap. VIII. Dalla fig. 16-20 b si ricava,

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = e_i \tag{16-74}$$

osservando che $e_0 = Ri$ si ha:

$$e_o = \frac{RCs}{1 + RCs}\,e_i$$

Allora la funzione di trasferimento del circuito di fig. 16-20 b è

$$Y(s) = \frac{e_o}{e_i} = \frac{RCs}{1 + RCs} \tag{16-75}$$

Se RC « 1 il sistema si comporta come un derivatore. Questo circuito sarà indicato nel seguito col nome di *rete anticipatrice* facendo riferimento alla sua risposta a regime ai segnali sinoidali; sostituendo infatti $s=j\omega$ ed $1/RC = \omega_a$ si ottiene:

$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{\omega/\omega_a}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_a^2}}\,\underline{/\,\Phi_a} \tag{16-76}$$

con

$$\Phi_a = \text{arctang}\ \frac{1}{\omega/\omega_a} \tag{16-77}$$

cioè e_0 anticipa rispetto ad e_i dell'angolo Φ_a.

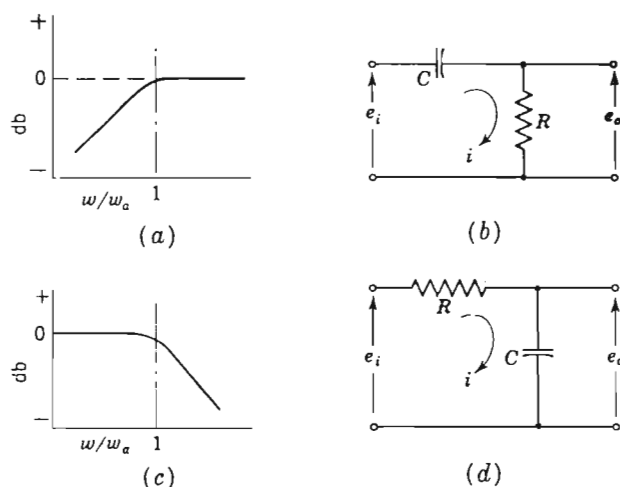



FIG. 16-20. — *a, b*) Rete differenziatrice o anticipatrice. *c, d*) Rete integratrice o ritardatrice.

Per il circuito di fig. 16-20 d si ha ancora

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\ dt = e_i$$

ma ora $e_0 = i/Cs$ per cui

$$e_0 = \frac{1}{1 + RCs}\ e_i \tag{16-78}$$

e la funzione di trasferimento del circuito è

$$Y(s) = \frac{e_0}{e_i} = \frac{1}{1 + RCs} \tag{16-79}$$

quando RC » 1 il sistema funziona da integratore. Questo circuito è anche noto come *rete ritardatrice* con riferimento al suo funzionamento in regime

sinoidale; se si pone $s = j\omega$, $1/RC = \omega_a$, si ha:

$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_a^2}} \underline{/ \Phi_b} \qquad (16\text{-}80)$$

$$\Phi_b = - \operatorname{arctang} \frac{\omega}{\omega_a} \qquad (16\text{-}81)$$

cioè e_o ritarda dell'angolo Φ_B rispetto ad e_i.

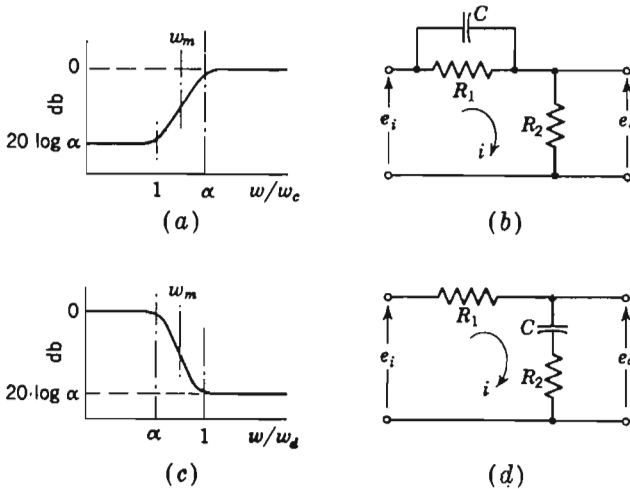



FIG. 16-21. — *a, b*) Rete anticipatrice. *c, d*) Rete ritardatrice.

Altri due circuiti che si comportano da rete anticipatrice e ritardatrice, rispettivamente, sono quelli di fig. 16-21. Essi sono già stati analizzati nel paragrafo 4-9 come circuiti adatti a modificare la fase o la ampiezza nel dominio della frequenza. Ricordando le conclusioni di quel paragrafo e scrivendo $s = j\omega$, si ottiene la seguente funzione di trasferimento del circuito di fig. 16-21 b

$$Y(s) = \frac{e_o}{e_i} = \alpha \frac{1 + R_1Cs}{1 + \alpha R_1Cs} \qquad (16\text{-}82)$$

in cui

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Il circuito funziona da rete anticipatrice, come è mostrato in fig. 16-21 a, in cui $\omega_c = 1/R_1C$ e la pulsazione cui corrisponde il massimo sfasamento è

$$\omega_m = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}}$$

La funzione di trasferimento del circuito di fig. 16-21 d è:

$$Y(s) = \frac{e_o}{e_i} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + R_2Cs/\alpha} \tag{16-83}$$

in cui ancora è $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$. Il circuito funziona da rete ritardatrice come è mostrato in fig. 16-21 c, in cui $\omega_d = 1/R_2C$ e la pulsazione corrispondente al massimo sfasamento ω_m è data da

$$\omega_m = \omega_d \sqrt{\alpha}$$

Di solito la rete anticipatrice di fig. 16-21 b si preferisce a quella di fig. 16-20 b, dato che quest'ultima ha una funzione di trasferimento che si annulla per $\omega = 0$, il che provoca un errore a regime. Inoltre i circuiti di fig. 16-21 sono più flessibili per quanto riguarda lo sfasamento, dato che l'angolo di anticipo o ritardo massimo può essere scelto dal progettista.

16-13 Funzione di trasferimento di alcuni elementi fisici.

Nei servo sistemi, la coppia di uscita viene spesso fornita da un motore in corrente continua con eccitazione indipendente. Occorre perciò considerare, nella funzione di trasferimento dell'amplificatore di coppia, anche la funzione di trasferimento del motore, considerando l'inerzia e lo smorzamento del motore come facenti parte del carico.

L'equazione del motore di fig. 16-22 è

$$e_i = R_a i + C_n s \theta_o \tag{16-84}$$

in cui R_a è la resistenza dell'armatura, C_n è una costante espressa in Volt per radiante al secondo.

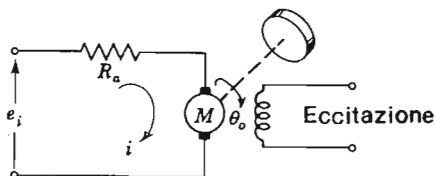



FIG. 16-22. — Circuito di un motore a corrente continua.

La coppia del motore è proporzionale alla corrente:

$$\text{Coppia} = C_T i = Js^2\theta_o \tag{16-85}$$

in cui C_T è la coppia sviluppata per unità di corrente di armatura. Il momento di inerzia è quello dell'armatura più il carico ad essa connesso; si trascurano le perdite per attrito perchè in questi motori sono molto ridotte. Sostituendo l'Eq. (16-85) nell'Eq. 16-84), si ottiene:

$$Y = \frac{\theta_o}{e_i} = \frac{1/C_n}{s\left(\frac{R_a J}{C_T C_n} s + 1\right)} = \frac{1/C_n}{s(T_m s + 1)} \tag{16-86}$$

equazione che ha forma identica a quella della Eq. (16-66) del sistema dotato di inerzia e di elemento smorzante viscoso. In questo caso l'effetto delle perdite per viscosità è dato dalla contro f.e.m. del motore.

Spesso la reazione di posizione si realizza con un sincro trasmettitore mentre un sincro differenziale, fig. 16-23, effettua la differenza fra la posizione di uscita e quella di ingresso. Il trasmettitore è costituito da un rotore monofase con uno statore trifase. Le tensioni trifase indotte nello statore rappresentano allora la posizione angolare del rotore. Queste tensioni provenienti dal sincro di ingresso, sono applicate agli avvolgimenti statorici dell'apparecchio sincro-differenziale, mentre le tensioni trifase provenienti dal sincro di uscita sono applicate agli avvolgimenti rotorici trifase del differenziale. Il rotore del differenziale ruota allora di un angolo pari allo errore $\theta_i - \theta_o$, se è trascurabile la coppia di carico ad esso applicata.

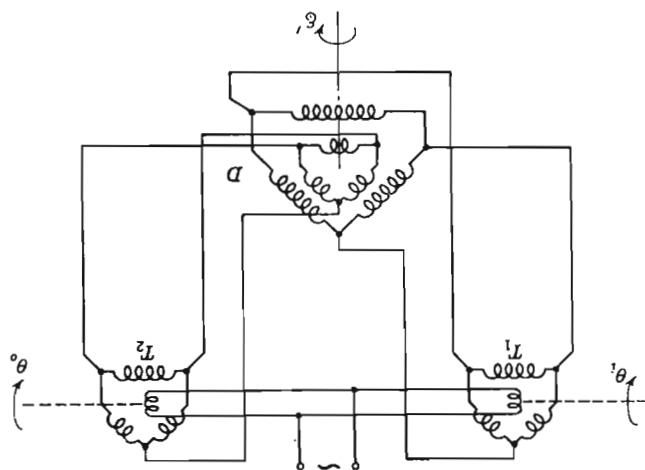



FIG. 16-23. — Sistema sincrodifferenziale.

La funzione di trasferimento complessiva del sistema sincrodifferenziale è:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{s^2/\omega_n + (2\xi/\omega_n)s + 1} \tag{16-87}$$

in cui ε è l'errore vero $\theta_i - \theta_0$ ed ε' l'indicazione effettiva del sincro. Ordinariamente occorre aggiungere un elemento smorzante per evitare delle eccessive sovraelongazioni del sistema.

L'amplificatore di coppia idraulico di fig. 16-24 presenta alcuni vantaggi rispetto al motore elettrico, in quanto è in grado di fornire un più ampio campo di velocità ed è dotato di un migliore rapporto fra coppia di uscita ed inerzia del sistema. Il fluido viene immesso nella camera A o B del pistone, mediante un piccolissimo spostamento della valvola pilota. Successivamente, il contenitore della valvola pilota cambia posizione in modo tale da riportare la valvola stessa nella posizione di riposo.

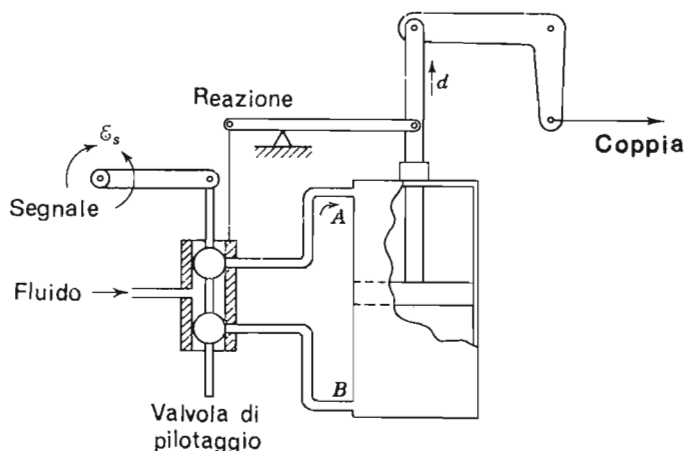



FIG. 16-24. — Valvola idraulica o pneumatica.

Così ogni movimento dell'uscita, prodotto dal segnale, produce un movimento determinato e controllato del pistone la cui velocità è approssimativamente proporzionale allo spostamento della valvola pilota ed all'ampiezza ε_s dello spostamento. Si trova che la funzione di trasferimento di un dispositivo di questo tipo è

$$\frac{\varepsilon_s}{d} = \frac{K}{s(\tau_a s + 1)} \tag{16-88}$$

in cui d è lo spostamento del pistone, K è il valore del guadagno, τ_a è la costante di tempo dell'amplificatore di coppia. Questa funzione è formalmente identica all'Eq. (16-86) del motore a corrente continua.

16-14 Servo sistemi con motore a corrente alternata.

Nel Cap. VII si sono esaminati dei servomoltiplicatori per calcolatori analogici, i quali producono una tensione:

$$e_{xy} = e_x e_y$$

In fig. 16-25 è mostrato un esempio di servomeccanismo di questo tipo. Una tensione di ingresso e_y aziona un motore il quale sposta il cursore di un potenziometro a filo fino a prelevare la tensione e_y.

A questo potenziometro ne è connesso meccanicamente un altro, la cui tensione totale è e_x; ma la posizione del cursore del secondo potenziametro è proporzionale ad e_y, per cui la tensione prelevata da questo cursore è $e_x e_y = e_{xy}$ come si voleva.

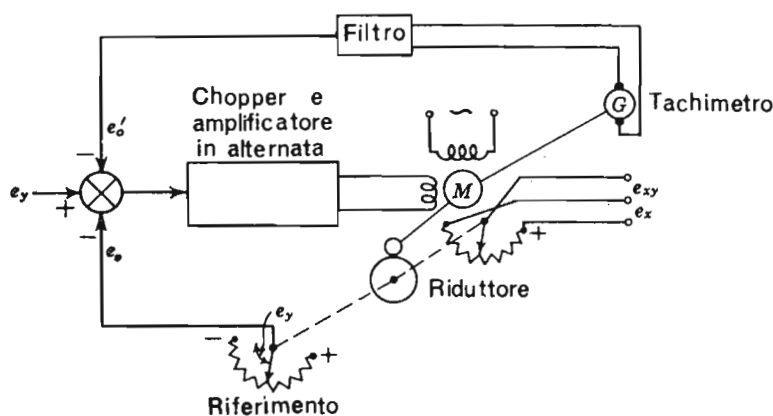



FIG. 16-25. — Servomoltiplicatore.

Il sistema di controllo comprende una controreazione di posizione, realizzata attraverso il potenziometro di riferimento, ed una reazione sulla derivata realizzata con un generatore tachimetrico. Un ingresso a velocità costante produce un'uscita costante, cioè a frequenza zero, del generatore tachimetrico, che viene eliminata da un filtro passa-alto del tipo di fig. 16-20 b. Con questo metodo, si elimina l'errore a regime proprio della reazione sulla derivata mentre si conserva l'efficacia della reazione sulla derivata a frequenze maggiori in modo da aumentare lo smorzamento. Occorre però che la pulsazione di interdizione del filtro sia molto inferiore al valore della ω_n del sistema.

Il segnale continuo di ingresso $e_y - e_0 - e_0'$ è parzializzato da un vibratore a 60 Hz ed amplificato in modo da alimentare uno degli

avvolgimenti di un motore bifase; l'altra fase viene alimentata direttamente dalla rete. La polarità della tensione in ingresso all'amplificatore determina il verso di rotazione del motore. La figura 16-26 mostra questo sistema ridisegnato in modo da comprendere la funzione di trasferimento di ciascun elemento. Risulta allora facile scrivere la funzione di trasferimento dell'intero sistema, applicando il metodo illustrato nel paragrafo 16-10.

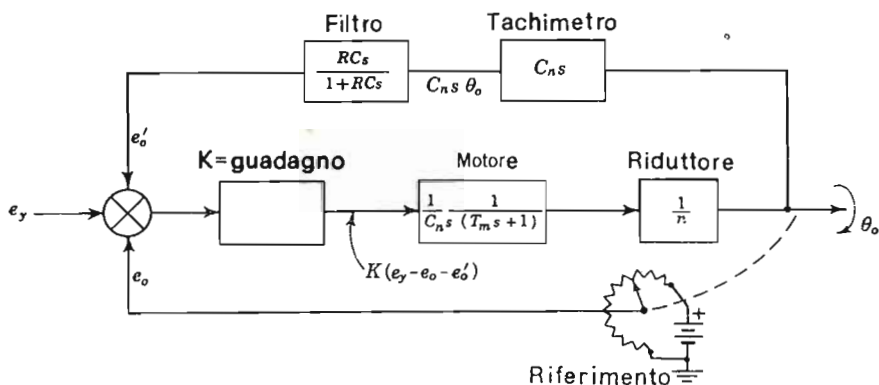



FIG. 16-26. — Schema a blocchi di un servomoltiplicatore.

16-15 Stabilità.

Molti servomeccanismi reali sono descritti da equazioni differenziali del secondo ordine, o anche di ordine maggiore, ordinariamente con alcune radici complesse; occorre quindi esaminare la possibilità che questi sistemi siano instabili.

Dall'Eq. (16-70) si ha

$$(1 + Y_o)\theta_o = Y_o\theta_I$$

Per un ingresso sinusoidale, l'uscita a regime, può supporsi che sia del tipo $\theta_o = \text{Re}\, \epsilon^{j\omega t}$ e la Y_o può venire trasformata da funzione di s in una funzione di $j\omega$, poichè $s^n\theta_o = (j\omega)^n\theta_o$. Allora l'Eq. (16-70) si scrive

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{Y_o(j\omega)}{1 + Y_o(j\omega)} \tag{16-89}$$

si noti che essa ricorda l'espressione del guadagno dell'amplificatore reazionato studiato al Cap. V

$$A' = \frac{A}{1 - A\beta} \tag{16-90}$$

Le due equazioni hanno in effetti lo stesso aspetto, salvo che al denominatore dell'Eq. (16-89) c'è il segno positivo dovuto al fatto che la reazione nei servomeccanismi si suppone che sia essenzialmente negativa. L'analisi del servomeccanismo inizia considerando un errore $\varepsilon = \theta_i - \theta_o$ come ingresso, non considerando cioè nella analisi stessa l'operazione di sottrazione; invece nell'amplificatore reazionato l'analisi è compiuta a partire da un segnale esterno per cui la sottrazione dell'uscita dall'ingresso viene considerata durante l'analisi stessa.

Questa differenza è una questione di abitudine ma rende conto della differenza di segno che si nota nei denominatori delle Eq. (16-89) e (16-90).

Esaminando l'Eq. (16-89) si nota che se la funzione di trasferimento a ciclo aperto, scritta nel caso di ingresso sinoidale, $Y_o(j\omega)$, tende al valore $-1 + j0$, l'uscita θ_o tenderà all'infinito il che è una condizione di instabilità. Se il luogo descritto da $Y_o(j\omega)$, quando ω assume tutti i valori possibili, circonda il punto $-1, j0$, allora si avrà oscillazione. Questo risultato è basato sul lavoro di Nyquist e differisce da quanto già detto al Cap. V solo per il fatto che il punto critico si sposta dal semipiano destro al sinistro dato che si passa dal segno $-$ di $A\beta$ al segno $+$ di $Y_o(j\omega)$.

È preferibile basare lo studio sulla funzione di trasferimento a ciclo aperto ed in regime sinoidale $Y_o(j\omega)$, invece che sulla funzione a ciclo chiuso; ciò appare chiaro se si pensa che questa può essere calcolata e misurata più facilmente della funzione a ciclo chiuso e che nel caso di sistemi instabili la funzione a ciclo chiuso non può addirittura essere misurata.

A titolo di esempio di diagramma di risposta a ciclo aperto, simile al diagramma $A\beta$ del Cap. V, si consideri il semplice controllo di posizione di fig. 16-7, che ha la seguente equazione a ciclo aperto

$$Js^2\theta_o + Fs\theta_o - K\varepsilon = 0 \; .$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento a ciclo aperto $Y_o(s) = \theta_o/\varepsilon$ che è

$$Y_o(s) = \frac{K/F}{s[(J/F)s + 1]} \qquad (16\text{-}91)$$

nel caso di regime sinoidale, $s = j\omega$ e la funzione a ciclo aperto diventa:

$$Y_o(j\omega) = \frac{KJ/F^2}{(j\omega J/F)\,(j\omega J/F + 1)} = \frac{K\tau/F}{j\omega\tau(j\omega\tau + 1)} \qquad (16\text{-}92)$$

in cui $\tau = J/F$ è una costante di tempo. Si osservi che il numeratore della Eq. (16-92) è costante ed è proporzionale al guadagno del sistema in esame. I fattori la cui ampiezza e fase dipendono dalla frequenza, sono al denomi-

natore e possono essere indicati con G(jω); chiamando con K′ quei fattori che sono indipendenti dalla frequenza per cui

$$Y_0(j\omega) = K'G(j\omega) \tag{16-93}$$

L'equazione (16-92) è riportata in grafico in fig. 16-27 in funzione di ωτ, con il guadagno effettivo $K' = H\tau/F = 1$. È evidente che ogni sistema di questo tipo sarà stabile in quanto un aumento del guadagno K′ può solo

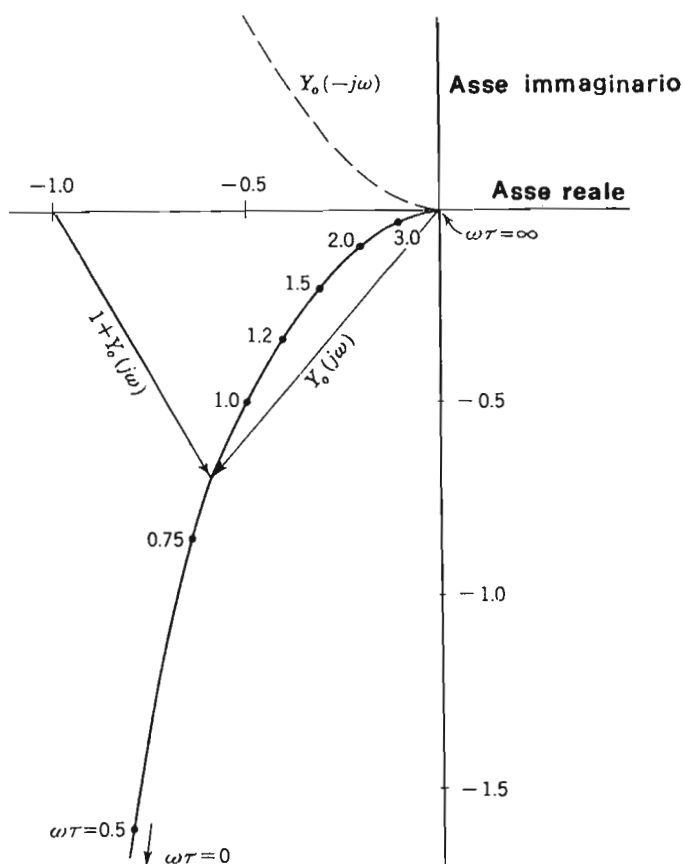



FIG. 16-27. — Diagramma di Y_o (jω) dell'Eq. 16-92.

allargare il diagramma ma non riuscirà mai a modificare la curva in modo che essa circondi il punto — 1, j0. Poichè questa curva è il luogo di $Y_0(j\omega)$, si può ottenere da essa la curva $1 + Y_0(j\omega)$ sottraendo — 1 da ciascun vet-

tore $Y_0(j\omega)$. Questo spiega perchè il luogo deve circondare o passare per il punto critico perchè si abbia instabilità, infatti solo così può essere

$$Y_0(j\omega) = -1 + j0$$

cioè il vettore $1 + Y_0(j\omega)$ può diventare zero.

L'esistenza di picchi di risonanza può far sì che il luogo $Y_0(j\omega)$ si avvicini al punto $-1, j0$ in corrispondenza di qualche frequenza; ciò può causare un lungo transitorio con oscillazioni quando si abbia una improvvisa variazione in ingresso.

16-16 Criteri di stabilità.

Nel progetto dei sistemi si usa esaminare prima l'andamento della $G(j\omega)$, che determina la forma della curva Y_0. In questo modo si lascia indeterminato il valore del guadagno da usare, il che è importante dato che la distanza della curva Y_0 dal punto critico, rappresenta una misura sia della stabilità relativa del sistema che della sua velocità di risposta al gradino. Le curve mostrate in precedenza, indicano che la risposta al gradino sarà rapida ma non oscillatoria per quei sistemi la cui risposta sinoidale presenta solo un leggero picco. La presenza del picco indica che la curva a ciclo aperto si avvicina molto al punto critico; è allora utile individuare una relazione fra la funzione a ciclo aperto ed il valore del guadagno a ciclo chiuso.

Questa relazione è anche di aiuto nel valutare il funzionamento dei sistemi di ordine più elevato, che qui non sono stati trattati. In generale, la risposta alla sinusoide di questi sistemi è piuttosto piatta, con qualche leggero picco ad alcune frequenze, oltre le quali la risposta tende a zero; perciò da essi si ottiene una soddisfacente risposta transitoria.

È possibile stabilire una relazione fra l'ampiezza della risposta a ciclo aperto ed a ciclo chiuso, direttamente dal diagramma di Nyquist della funzione a ciclo aperto $Y_0(j\omega)$. Dall'eq. (16-70) si ricava l'ampiezza della funzione a ciclo chiuso

$$Y(j\omega) = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{Y_o(j\omega)}{1 + Y_o(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \tag{16-94}$$

Se si indica con M l'ampiezza e con φ la fase di questa funzione, come si è fatto nel paragrafo 16-9, si ha:

$$M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 + x)^2 + y^2} \tag{16-95}$$

ed

$$1 - M^2 = \frac{1 + 2x}{(1 + x)^2 + y^2} \tag{16-96}$$

da cui si può scrivere

$$x - \frac{M^2}{1 - M^2} = \frac{x^2 - y^2 + x}{1 + 2x}$$

e infine:

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2 \qquad \text{per } M < 1 \tag{16-97}$$

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1}\right)^2 \qquad \text{per } M > 1 \tag{16-98}$$

Queste equazioni rappresentano nel piano Y_0 una famiglia di circonferenze ciascuna relativa ad un valore costante di M della funzione di trasferimento a ciclo chiuso $Y(j\omega)$.

I raggi di queste circonferenze sono

$$r = \left| \frac{M}{1 - M^2} \right|$$

ed i centri hanno coordinate

$$y = 0 \qquad x = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \qquad \text{per } M > 1$$

$$y = 0 \qquad x = \frac{M^2}{1 - M^2} \qquad \text{per } M < 1$$

Quando M ha un valore molto alto, il raggio del cerchio tende a zero ed il centro tende a —1,0. La curva per M = 1 è un cerchio di raggio infinito (cioè una retta perpendicolare all'asse reale e passante per $x = -1/2$). Le circonferenze corrispondenti ad $M > 1$ hanno i centri sull'asse reale negativo; quelli per $M < 1$ hanno i centri sull'asse reale positivo.

In fig. 16-28 si è sovrapposto a questa famiglia di circonferenze la curva di $Y_0(j\omega)$ riportata in fig. 16-27 con $K' = 1$. Dal diagramma risulta che questa curva è all'incirca tangente alla circonferenza relativa ad M = 1,2 ad una frequenza data da $\omega\tau \cong 0{,}85$. Questo indica l'esistenza di un valore di picco per $M_p = 1{,}2$ per la funzione di trasferimento a ciclo chiuso $Y(j\omega)$.

Per calcolare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso per la sinusoide, con $K' = 1$, si può usare l'Eq. (16-94)

$$Y(j\omega) = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{K'G(j\omega)}{1 + K'G(j\omega)} \tag{16-99}$$

Si ottiene la fig. 16-29 a, che conferma che $M_p = 1{,}2$. Se è preferibile un picco di maggiore ampiezza, per migliorare la risposta transitoria, si può rendere più ampia la curva $Y_0(j\omega)$ moltiplicando ogni vettore Y_0 per un fat-

tore costante e mantenendo invariata la fase. Si ottiene in tal modo la curva tratteggiata di fig. 16-28. Questo aumenta l'ampiezza del picco che diventa $M_p = 1{,}5$ alla frequenza data da $\omega\tau \cong 1{,}2$.

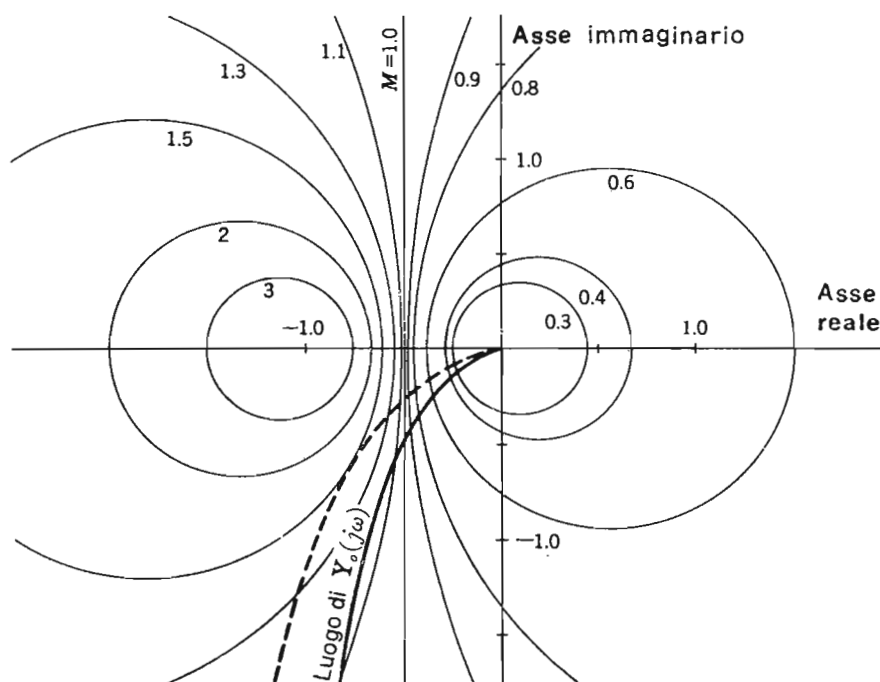



FIG. 16-28. — Circonferenze ad M costante.

Dall'Eq. (16-63) si è visto che $\xi = 0{,}356$ per $M_p = 1{,}5$; osservando inoltre che

$$K' = K\tau/F = KJ/F^2 = (\tfrac{1}{2}\xi)^2$$

si può dire che, per $M_p = 1{,}5$, $K' = 1{,}98$ che è il valore del guadagno necessario per ottenere il nuovo valore di picco. In fig. 16-29 è riportata la funzione di trasferimento a ciclo chiuso, calcolata con l'Eq. (16-99) con $K' = 1{,}98$; si ha ancora $M_p = 1{,}5$.

Esiste un metodo approssimato per determinare direttamente la stabilità, conoscendo il guadagno a ciclo aperto in regime sinusoidale e lo sfasamento, mediante diagrammi della ampiezza espressa in decibel e dello sfasamento, in funzione del logaritmo della frequenza; si fa uso della stessa

tecnica della frequenza di taglio illustrata al Cap. IV. Scegliendo, per esempio, il sistema descritto dall'Eq. (16-92) si ha:

$$Y_o(j\omega) = K'G(j\omega) = \frac{K'}{j\omega\tau(j\omega\tau + 1)} \tag{16-100}$$

l'ampiezza espressa in decibel è

$$\begin{aligned} db &= 20 \cdot \log \frac{1}{\omega\tau} + 20 \log \left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| \\ &= -20 \log (\omega\tau) - 20 \log\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \end{aligned} \tag{16-101}$$

si può allora tracciare una curva in decibel in funzione di $\omega\tau$, separatamente per ciascun termine, e sommare poi le ordinate in modo da ottenere la fig. 16-30.

Si vede che il primo termine dell'Eq. (16-100) dà una diminuzione del guadagno di —6 db per ottava ed uno sfasamento costante di —90°. Alle frequenze più alte, quando $\omega\tau \gg 1$ anche il secondo termine dà luogo ad una curva di pendenza pari a —6 db per ottava e ad uno sfasamento di —90°. La somma di questi due termini, per $\omega\tau \gg 1$ è un diagramma con pendenza di —12 db per ottava e con uno sfasamento di circa —180°. I termini di secondo grado ovviamente daranno luogo a dei picchi.

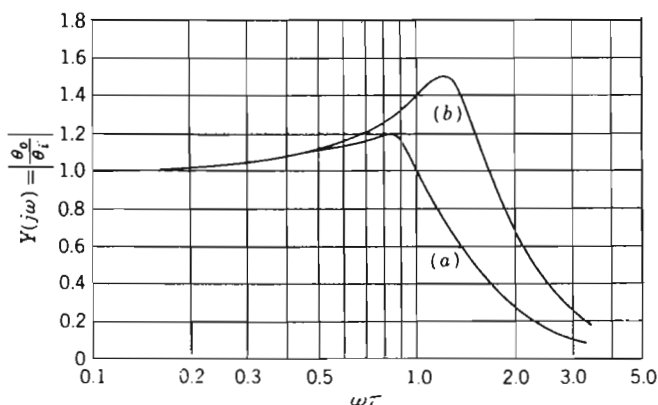



FIG. 16-29. — Ampiezza del guadagno a ciclo chiuso: *a*) per la curva a tratto pieno di fig. 16-28 con K' = 1. *b*) per la curva tratteggiata, di fig. 16-28, con K' = 2.

Si può allora concludere che quando la curva della ampiezza espressa in decibel presenta una pendenza di —6 db per ottava, in corrispondenza vi sarà uno sfasamento di —90°; se la pendenza è —12 db per ottava, lo sfasamento sarà di —180° e così via.

Dalla fig. 16-27 si osserva che se lo sfasamento è minore di —180°, alla frequenza per cui il guadagno è uguale ad uno, il diagramma di Nyquist non circonda il punto —1, j0 ed il sistema è stabile. Dal diagramma logaritmico di fig. 16-30 si può valutare lo sfasamento in corrispondenza del guadagno unitario (zero decibel); infatti se la pendenza è pari o superiore a —12 db per ottava, lo sfasamento in quel punto sarà uguale o superiore a —180°. Gli asintoti tracciati sul diagramma suddetto, in corrispondenza del guadagno di zero decibel, aiutano a giudicare rapidamente se vi sia da aspettarsi instabilità.

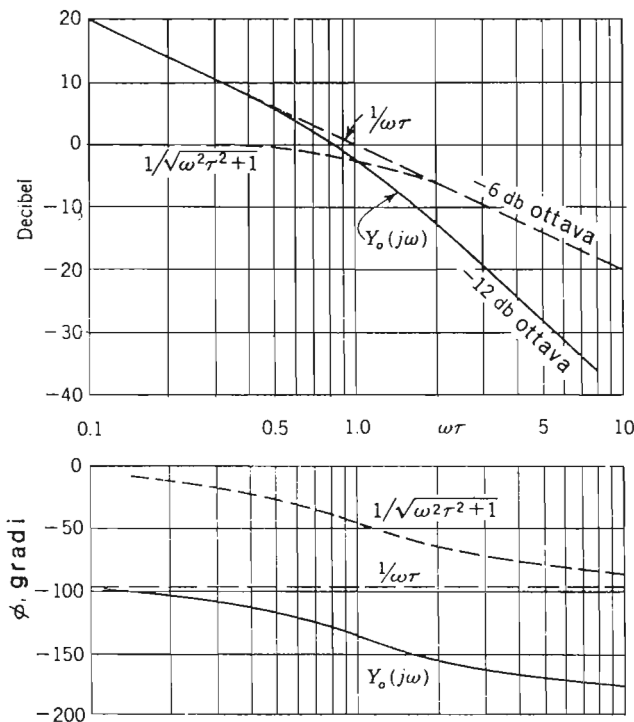



FIG. 16-30. — La Y_0 (jω) tracciata col sistema della frequenza d'angolo.

Poichè non è possibile tracciare un diagramma sperimentale per un sistema instabile, questo metodo è molto utile nel progetto; esso permette di valutare quanto ci si avvicini o di quanto si superi il valore per cui si verifica l'instabilità. In sede di progetto di un sistema di controllo si cerca di ottenere un diagramma della attenuazione a ciclo aperto in funzione della frequenza, con una pendenza inferiore a —12 db per ottava, nella zona prossima al punto di guadagno zero db. In realtà si cerca di solito di realizzare in questa zona

una pendenza non superiore ai —6 db per ottava. Un sistema di questo tipo sarà stabile in un ciclo chiuso e, se la pendenza di —6 db per ottava continua molto al di là del punto con zero db di guadagno, la risposta al gradino sarà prossima ad un'esponenziale ed il funzionamento del sistema sarà simile a quello di un sistema del primo ordine.

16-17 Margini di guadagno e di fase.

Un metodo migliore, per determinare quanto ci si avvicini alla instabilità, si ottiene dal diagramma di Nyquist della funzione a ciclo aperto in regime sinoidale, come è mostrato in fig. 16-31.

Si definisce *margine di guadagno* l'ampiezza della funzione $1 + Y_0(j\omega)$ nel punto in cui la fase è —180° (cioè lungo l'asse reale negativo). Questa quantità indica quale aumento di guadagno può tollerarsi senza che vi sia oscillazione, come è indicato in fig. 16-31.

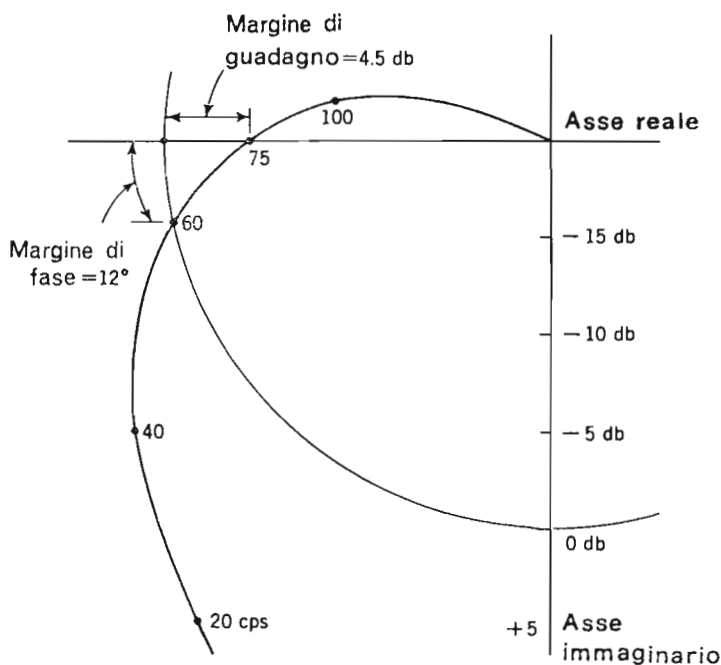



FIG. 16-31. — Margini di guadagno e di fase.

Il *margine di fase* è dato da 180° meno l'angolo formato da $Y_0(j\omega)$ alla frequenza per cui $|Y_0(j\omega)|$ è uguale ad uno. Questo punto si trova come intersezione della curva col cerchio di raggio unitario.

I valori più adatti per il margine di guadagno e di fase variano secondo il tipo di sistema e l'applicazione cui esso è destinato. Se, in una certa zona, il diagramma della attenuazione in decibel ha una pendenza troppo elevata, occorre inserire dei circuiti compensatori o formatori del tipo delle reti illustrate al paragrafo 16-11, in modo da ridurre la pendenza e lo sfasamento ad un valore accetabile. In pratica mediante tali circuiti si può variare il guadagno e l'angolo di fase alle frequenze che interessa.

Di solito queste reti anticipatrici o ritardatrici si possono inserire direttamente negli amplificatori; in tal caso l'analisi del sistema cambia solo in quanto si deve introdurre in esso un'altra funzione di trasferimento. È da notare che una rete anticipatrice riduce il guadagno in bassa frequenza del fattore α; è necessario allora aumentare della stessa quantità il guadagno interno se si vuole avere ancora un piccolo errore a regime. Una rete ritardatrice ridurrà il guadagno in alta frequenza secondo un analogo fattore.

16-18 Altre applicazioni del diagramma di Nyquist.

Un'altro esempio di applicazione del diagramma di Nyquist per l'analisi della stabilità di un sistema si ha nell'esame del controllo di posizione con reazione della derivata della grandezza d'uscita, illustrato in fig. 16-9. L'effetto dell'introduzione di un ciclo con reazione della derivata dell'uscita può essere evidenziato considerando lo schema di fig. 16-32 come quello di

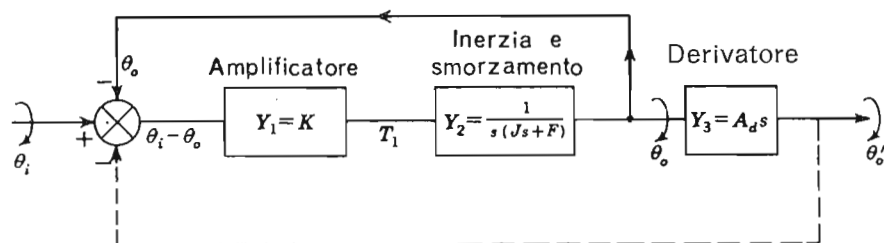



FIG. 16-32. — Il controllo con reazione della derivata dell'uscita visto in ciclo aperto.

un sistema a ciclo aperto, cioè considerando la reazione di posizione come una parte interna del sistema. In tal modo l'ingresso a ciclo aperto è θ_i mentre l'uscita è θ'_0. Chiudendo il ciclo nel modo indicato dalla linea tratteggiata, si ottiene un sistema equivalente a quello di fig. 16-9.

A ciclo aperto, prima della chiusura della linea tratteggiata in figura, si ha:

$$\theta_o' = Y_1 Y_2 Y_3 (\theta_i - \theta_o) \qquad (16\text{-}102)$$

ma

$$\theta_o = \frac{\theta'_o}{Y_3}$$

per cui

$$Y_o(s) = \frac{\theta'_o}{\theta_i} = \frac{Y_1Y_2Y_3}{1 + Y_1Y_2} = \frac{Y_3}{1/Y_1Y_2 + 1} \tag{16-103}$$

Sostituendo le singole espressioni delle funzioni di trasferimento si ha:

$$Y_o(s) = \frac{A_d s}{(J/K)s^2 + (F/K)s + 1}$$

e ponendo

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \qquad \xi = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}$$

si ottiene

$$Y_o(s) = \frac{A_d s}{s^2/\omega_n^2 + 2\xi s/\omega_n + 1} \tag{16-104}$$

In regime sinoidale, sostituendo $s = j\omega$, la (16-104) diventa:

$$Y_o(j\omega) = \frac{j\omega A_d}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j(2\xi\omega/\omega_n)} \tag{16-105}$$

In un sistema ipercritico si abbia $\xi = 0,3$; dopo qualche modifica al numeratore, si ottiene:

$$Y_o(j\omega) = K'G(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_n)\,(\omega_n A_d)}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j0,6(\omega/\omega_n)}$$

in cui il guadagno a ciclo aperto è

$$K' = \omega_n A_d$$

e la funzione che dipende dalla frequenza è

$$G(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j0,6(\omega/\omega_n)} \tag{16-106}$$

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

$$Y(j\omega) = \frac{K'G(j\omega)}{1 + K'G(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1/K' + G(j\omega)} \tag{16-107}$$

Scritta in questa forma, si vede che il punto critico è $-1/K', j0$ per il diagramma $G(j\omega)$, il che consente di studiare l'effetto del guadagno a ciclo aperto sulla stabilità. Un solo diagramma di $G(j\omega)$ è necessario, in quanto il punto critico si sposta sul diagramma, lungo l'asse reale, secondo il valore del guadagno effettivo K'.

Si può fare un diagramma della funzione $G(j\omega)$ nel piano complesso, come è mostrato in fig. 16-33. Per $\omega/\omega_n = 0$ la curva passa per l'origine; il suo valore aumenta con ω/ω_n ruotando in senso orario. Si ottiene una circonferenza la quale incrocia l'asse reale nel punto 1,67 per $\omega/\omega_n = 1$, torna indietro verso l'origine per valori elevati di ω/ω_n e raggiunge l'origine $\omega/\omega_n = \infty$.

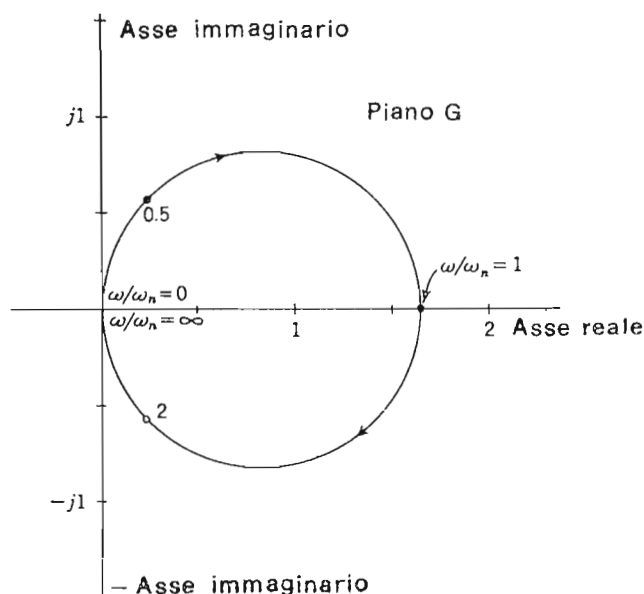



FIG. 16-33. — Diagramma di G (jω).

Per valori negativi di ω, la curva a partire dall'origine ripercorre la circonferenza in senso antiorario. Il diagramma completo della G (jω) per ω variabile fra $-\infty$ e $+\infty$ è dato da due giri sulla circonferenza.

Poichè il punto critico è $-1/K' + j0$ cioè $-1/\omega_n A_d + j0$, il sistema può essere stabile o instabile secondo il valore di A_d. Se A_d è nullo o positivo, la curva non girerà intorno al punto critico che si troverà sull'asse reale negativo, ed il sistema sarà stabile. Se invece A_d diventa negativo il punto critico si sposterà sull'asse reale positivo e la stabilità dipenderà dalla ampiezza di A_d. Per $-0,6/\omega_n < A_d < 0$ il punto critico si trova

all'esterno del cerchio ed il sistema è stabile. Per $A_d < -0,6/\omega_n$, il punto critico si sposta all'interno del cerchio, quindi il sistema sarà instabile.

In generale si vede che il punto critico è determinato dallo smorzamento. Cioè per $A_d > -2\xi/\omega_n$ il sistema sarà stabile, mentre per $A_d < -2\xi/\omega_n$ il sistema sarà instabile. Per $A_d = 2\xi/\omega_n$ il sistema oscillerà dopo ogni disturbo iniziale, sicchè anche questo punto può essere considerato instabile.

16-19 Altri sistemi.

I sistemi esaminati sono indicativi dei principii di funzionamento dei servomeccanismi, ma sono abbastanza più semplici di quelli che si incontrano in pratica. Non si è trattato di sistemi di ordine più elevato, che hanno diagrammi di Nyquist più complessi e presentano più complessi problemi di stabilità. nè si è trattato di tutta la classe dei servomeccanismi che funzionano con segnali alternativi modulati. Del resto la letteratura sui servomeccanismi è così vasta che si è ritenuto opportuno in questa sede esaminare soltanto i sistemi fondamentali, lasciando a testi specializzati lo studio di quelli più complessi.

PROBLEMI

16-1. L'equazione del moto di un sistema avente inerzia trascurabile è

$$a_1 s \theta + a_0 \theta = f(t)$$

determinare la risposta ad un ingresso a gradino con $f(t) = 0$ per $t < 0$, $f(t) = A$ per $t > 0$. Supporre $\theta = 0$ per $t = 0$, e riportare in grafico θ/A in funzione di t.

16-2. Un sistema del secondo ordine si ha:

$$s^2mx + scx + kx = f(t)$$

con $m = 1$ Kg, $K = 1$ Kg per metro, $c = 0,1$ Kg per metro. Calcolare la frequenza naturale di oscillazione, il fattore di smorzamento, il valore di c necessario per avere lo smorzamento critico. Calcolare inoltre il tempo necessario per raggiungere il primo massimo della risposta, se $\xi = 0,3$.

16-3. Un servomeccanismo ha la seguente funzione di trasferimento

$$Y_0(j\omega) = \frac{K'}{j\omega\tau(3j\omega\tau + 1)(j\omega\tau + 1)}$$

Determinare, col metodo delle circonferenze ad M costante, il massimo valore che può assumere K' se si vuole che la curva del guadagno abbia un valore di picco di 1,4. Determinare inoltre il valore di $\omega\tau$ in corrispondenza di questo picco.

16-4. Tracciare un diagramma a ciclo aperto di

$$Y_o(j\omega) = \frac{4}{j\omega(1 + 0{,}04j\omega)}$$

e determinare se il sistema è stabile.

16-5. Tracciare il diagramma a ciclo aperto di

$$Y_o(j\omega) = \frac{100}{j\omega(15 - j\omega)}$$

16-6. Tracciare il diagramma a ciclo aperto di

$$Y_o(j\omega) = \frac{-\omega^2 X}{(1 + 2j\omega)\,(1 - 0{,}5j\omega - \omega^2)}$$

e determinare le condizioni cui deve soddisfare X perchè si abbia un sistema stabile.

16-7. Il sistema di fig. 16-34 ha la seguente equazione del moto:

$$C\,(\theta_i - \theta_o) = Fs\,\theta_o + T_L$$

Scrivere la espressione di θ_o come serie di potenze di s, usando il metodo con cui si è ricavata l'Eq. (16-22), e trovare l'uscita a regime corrispondente agli ingressi $\theta_i = \alpha t$ e $\theta_i = \beta_i t^2$, con il carico T_L costante.

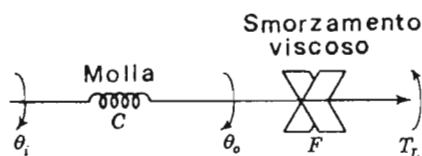



FIG. 16-34

16-8. Il sistema di fig. 16-7 ha $J = 0{,}75$ ed $F = 0{,}15$. (*a*) Tracciare la funzione di trasferimento a ciclo aperto nel piano Y_o. (*b*) Determinare da questo diagramma il valore del guadagno K' per $M_p = 1{,}25$ e determinare la frequenza per la quale si ha questo guadagno. (*c*) Determinare il coefficiente di smorzamento del sistema.

16-9. Si aggiunga all'amplificatore del problema 16-8 un controllo con integrazione, il che può essere realizzato modificando la funzione di trasferimento dell'amplificatore come segue: $Y = K(1 + A_i s^{-1})$ in cui $A_i = 2\ \text{sec}^{-1}$. (*a*) Tracciare la funzione a ciclo aperto nel piano Y_o. (*b*) Calcolare il guadagno K' per il minimo valore di M_p.

16-10. Un sistema di controllo reazionato ha $K'G(j\omega)$ dato da

$$K'G(j\omega) = \frac{K'}{(j\omega\tau_1 + 1)\,(j\omega\tau_2 + 1)}$$

(*a*) per $\tau_1 = \tau_2 = 1$ sec, tracciare il diagramma di Nyquist e calcolare il valore di M_p. (*b*) ripetere l'esercizio con $\tau_1 = 10$ sec, $\tau_2 = 1$ sec.

BIBLIOGRAFIA

1. Minorsky, N.: Directional Stability of Automatically Steered Bodies, *J. Am. Soc. Naval Engrs.*, **34**: 280 (1922).
2. Hazen, H. L.: Theory of Servomechanisms, *J. Franklin Inst.*, **218**: 279 (1934).
3. Hazen, H. L.: Design and Test of a High Performance Servomechanism, *J. Franklin Inst.*, **218**: 543 (1934).
4. Nyquist, H.: Regeneration Theory, *Bell System Tech. J.*, **11**: 126 (1932).
5. Trimmer, J. D.: "Response of Physical Systems," John Willey & Sons, Inc., New York, 1950.
6. Nixon, F. E.: "Principles of Automatic Control," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1953.
7. Chestnut, H., and R. W. Mayer: "Servomechanisms and Regulating Systems Design," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
8. Thaler, G. J., and R. G. Brown: "Servomechanism Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
9. Bruns, R. A., and R. M. Saunders: "Analysis of Feedback Control Systems," McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
10. Savant, C. J., Jr.: "Basic Feedback Control System Design," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
11. Del Toro, V., and S. R. Parker: "Principles of Control System Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
12. D'Azzo, J. J., and C. H. Houpis: "Feedback Control System Analysis and Synthesis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

APPENDICE

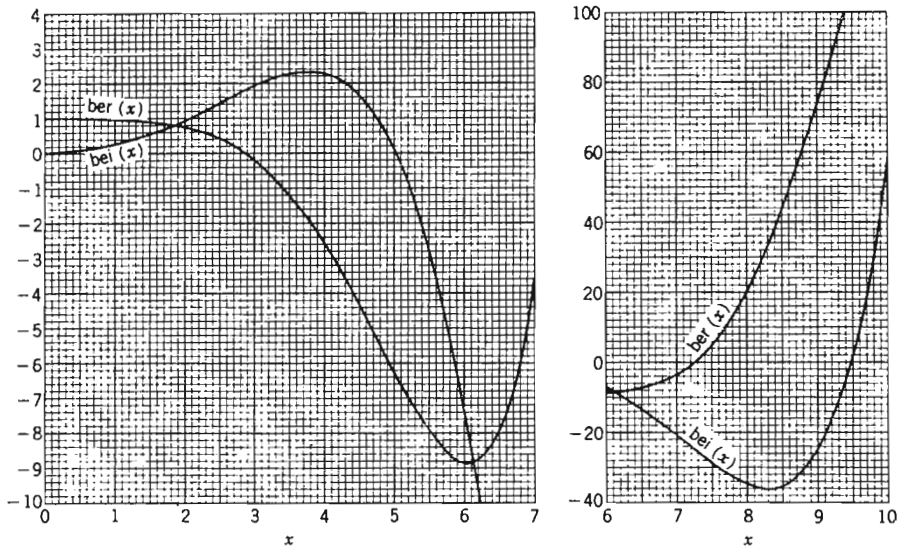



FIG. A-1. — Andamento di Ber (x) e Bei (x).

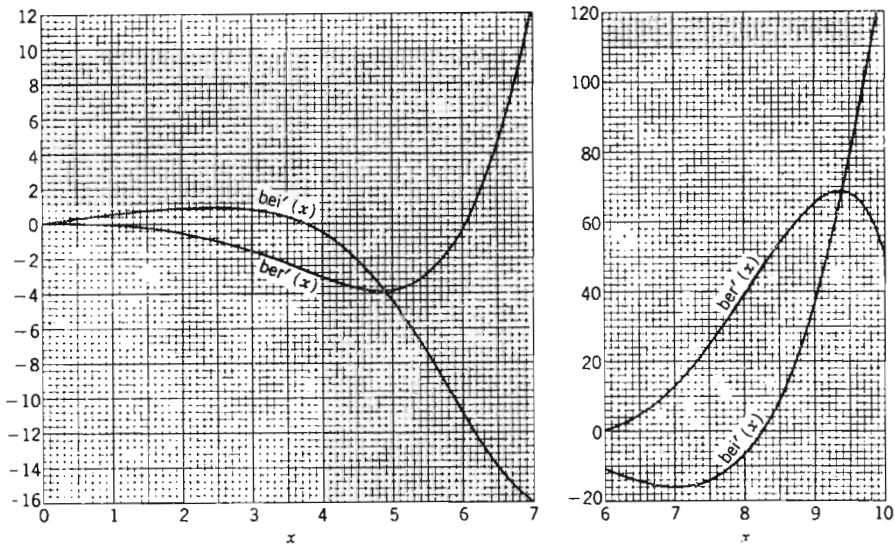



FIG. A-2. — Andamento di Ber' (x) e Bei' (x).

INDICE

CAPITOLO I

PRINCIPI FISICI DEI TUBI ELETTRONICI

CAPITOLO II

PRINCIPI FISICI DEI DISPOSITIVI A SEMICONDUTTORE

Capitolo III

TIPI FONDAMENTALI DI AMPLIFICATORE

CAPITOLO IV

RISPOSTA DEGLI AMPLIFICATORI LINEARI PER PICCOLI SEGNALI

CAPITOLO V

LA REAZIONE

CAPITOLO VI

AMPLIFICATORI DI POTENZA PER BASSA FREQUENZA

CAPITOLO VII

AMPLIFICATORI AD ACCOPPIAMENTO DIRETTO; CALCOLO ANALOGICO

CAPITOLO VIII

CIRCUITI A SCATTO E FORMATORI D'ONDA

Capitolo IX

CIRCUITI LOGICI, CALCOLO NUMERICO

CAPITOLO X

LA CONVERSIONE ANALOGICO-NUMERICA; SISTEMI DI CODIFICAZIONE

CAPITOLO XI

DISPOSITIVI AD EFFETTO FOTOELETTRICO

CAPITOLO XII

AMPLIFICATORI DI POTENZA IN CLASSE C - RISCALDAMENTO AD ALTA FREQUENZA - OSCILLATORI

CAPITOLO XIII

RADDRIZZATORI DI POTENZA E CIRCUITI DI FILTRO

CAPITOLO XIV

CONTROLLO E CONVERSIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

CAPITOLO XV

CONTROLLO ELETTRONICO DEI MOTORI

CAPITOLO XVI

SERVOMECCANISMI